第 52 卷 第 2 期 2003 年 2 月
1000-3290/2003/52(02)/0256-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.2,February,2003


# 转动相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性*

傅景礼[1)2)] 陈立群[1)] 薛 纭[1)]

1)(上海大学上海市应用数学和力学研究所,上海 200072)

2)(商丘师范学院数学力学和数学物理研究所,商丘 476000)

(2002 年 5 月 12 日收到;2002 年 6 月 15 日收到修改稿)

研究转动相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性,给出转动相对论 Birkhoff 自治系统、半自治系统和非自治系统的平衡方程和转动相对论 Birkhoff 自治系统的受扰运动方程和一次近似方程;给出转动相对论 Birkhoff 自治系统平衡稳定性的一次近似方法及其判据;并给出转动相对论 Birkhoff 自治系统平衡稳定性的直接方法及其判据;讨论转动相对论 Birkhoff 系统平衡稳定性和经典转动 Birkhoff 系统平衡稳定性的关系.给出实例以说明方法的应用.

关键词:相对论,转动 Birkhoff 系统,平衡稳定性,一次近似方法

PACC:0320,0412

## 1.引 言

Birkhoff 系统动力学的研究始于美国数学家 Birkhoff 的工作[1],美国物理学家 Santilli 考虑时间变量,给出了 Birkhoff 方程的一般形式,成功地研究了完整系统的动力学问题[2],中国梅凤翔教授应用 Birkhoff 方程系统地研究了非完整系统的动力学问题,构筑了 Birkhoff 系统动力学的理论框架[3],使 Birkhoff 系统动力学的研究取得了一系列重要结果[4—11].近年来相对论分析力学[12—14]、转动相对论力学[15—18]和转动相对论分析力学[19—22]的研究,使爱因斯坦建立的相对论力学取得了进展.最近我们已将 Birkhoff 系统动力学的研究从经典研究领域推广到高速运动的相对论研究领域和高速转动的相对论研究领域,给出了相对论 Birkhoff 系统和转动相对论 Birkhoff 系统的 Pfaff-Birkhoff 原理,Birkhoff 方程,代数结构,Poisson 理论以及对称性理论[23—32].文献[33]系统地研究了相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性,本文给出转动相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性理论.

## 2.转动相对论 Birkhoff 系统的运动方程

研究 $N$ 个粒子构成的转动相对论力学系统,在时刻 $t$,第 $i$ 粒子的角速度为 $\dot{\theta}_i$,最大角速度为 $\Gamma_i$,经典转动惯量为 $I_{0i}$,相对论性转动惯量为[19]

$$I_i = \frac{I_{0i}}{\sqrt{1-\dot{\theta}_i^2/\Gamma_i^2}} \quad (i=1,\cdots,N). \tag{1}$$

可以构造转动相对论系统的 Birkhoff 函数 $B^*$ 和 Birkhoff 函数组 $R_\nu^*$ $(\nu=1,\cdots,2n)$为[28]

$$B^* = B^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu) = B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})$$
$$R_\nu^* = B_\nu^*(I_i(t,a^\mu),t,a^\mu) = B_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})$$
$$(\mu=1,\cdots,2n). \tag{2}$$

再令

$$\tilde{B}^* = \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a}) = B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\tilde{a}),$$
$$\tilde{R}_\nu^* = \tilde{R}_\nu^*(t,\boldsymbol{a}) = R_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\tilde{a}). \tag{3}$$

利用转动系统的相对论性 Pfaff-Birkhoff 原理可得到转动系统相对论性 Birkhoff 方程的一般形式为[28]

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^* \dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right) = 0,$$
$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^* = \left(\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial a^\nu}\right)$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n), \tag{4}$$

式中

$$\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu} = \frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial B^*}{\partial a^\mu},$$

* 河南省自然科学基金(批准号:998405300)资助的课题.

$$\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial a^\mu} = \frac{\partial R_\nu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\nu^*}{\partial a^\mu},$$
$$\frac{\partial \tilde{R}_\nu^*}{\partial t} = \frac{\partial R_\nu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial R_\nu^*}{\partial t}. \tag{5}$$

自治形式,半自治形式和非自治形式的转动相对论性 Birkhoff 方程可分别表示为[28,33]

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*(\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*(\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu} = 0 \quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{6}$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*(\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - \frac{\partial \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{7}$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \tilde{R}_\mu^*(t,\boldsymbol{a})}{\partial t}\right) = 0 \quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{8}$$

其中 $\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*$ 被称为转动系统的相对论性 Birkhoff 协变张量,且有

$$\det(\tilde{\omega}_{\mu\nu}^*) \neq 0. \tag{9}$$

方程(6),(7)和(8)可表成如下逆变形式:

$$\dot{a}^\mu - \tilde{\omega}^{*\mu\nu}(\boldsymbol{a})\frac{\partial \tilde{B}^*(\boldsymbol{a})}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{10}$$

$$\dot{a}^\mu - \tilde{\omega}^{*\mu\nu}(\boldsymbol{a})\frac{\partial \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{11}$$

$$\dot{a}^\mu - \tilde{\omega}^{*\mu\nu}(t,\boldsymbol{a})\left(\frac{\partial \tilde{B}^*(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^\nu} + \frac{\partial \tilde{R}_\nu^*(t,\boldsymbol{a})}{\partial t}\right) = 0 \quad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{12}$$

其中

$$\tilde{\omega}^{*\mu\nu} = (|\tilde{\omega}_{\alpha\beta}^*|^{-1})^{\mu\nu} = \left(\left|\frac{\partial \tilde{R}_\beta^*}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial \tilde{R}_\alpha^*}{\partial a^\beta}\right|^{-1}\right)^{\mu\nu}$$

$$\det(\tilde{\omega}^{*\mu\nu}) \neq 0 \quad (\alpha,\beta,\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \tag{13}$$

$\tilde{\omega}^{*\mu\nu}$ 被称为转动系统的相对论性 Birkhoff 逆变张量.

## 3. 转动相对论 Birkhoff 系统的平衡方程和平衡位置

假设转动相对论 Birkhoff 系统的平衡位置为

$$a^\nu = a_0^\nu = \mathrm{const}, \dot{a}_0^\nu = 0. \tag{14}$$

将(14)式代入方程(6)或(10),得到转动相对论 Birkhoff 自治系统的平衡方程

$$\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)_0 = \left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_0 = 0,$$

$$\tilde{B}^* = B^*(I_i(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a}) \quad (\mu = 1,\cdots,2n), \tag{15}$$

式中下标 0 表示其中的 $a^\nu$ 用 $a_0^\nu$ 替代的结果. 将(14)式代入方程(7)或(11),得到转动相对论 Birkhoff 半自治系统的平衡方程

$$\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)_0 = \left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_0 = 0,$$

$$\tilde{B}^* = B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}) \quad (\mu = 1,\cdots,2n). \tag{16}$$

将(14)式代入方程(8)或(12),得到转动相对论 Birkhoff 非自治系统的平衡方程

$$\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^\mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial \tilde{R}_\mu^*}{\partial t}\right)_0 = \left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu} + \frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial R_\mu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial t} + \frac{\partial R_\mu^*}{\partial t}\right)_0 = 0,$$

$$\tilde{R}_\nu^* = R_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}),$$
$$\tilde{B}^* = B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}) \quad (\mu = 1,\cdots,2n). \tag{17}$$

如果平衡方程(15)或(16)或(17)有解,则相应的系统存在平衡位置. 如果对于方程组(15)或(16)或(17)的 $2n$ 个方程是彼此独立的,则平衡位置是孤立的 如果这 $2n$ 个方程不是彼此独立的,则平衡位置组成流形.

**例 1** 二阶转动相对论 BIrkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组为

$$\tilde{B}^* = I((a^1)^2 + (t+1)(a^2)^2), \tag{a}$$
$$\tilde{R}_1^* = 0, \tilde{R}_2^* = I(t+1)a^1 \quad (t \geqslant 0), \tag{b}$$

式中 $I = I_0/\sqrt{1-((a^1)^2+(a^2)^2)/\Gamma^2}$,试写出系统的平衡方程,并求出系统的平衡位置.

本题为转动相对论 Birkhoff 非自治系统,由平衡方程(17)给出为

$$\left(\frac{(a_0^1)^2 + (t+1)(a_0^2)^2}{\Gamma^2 - ((a_0^1)^2 + (a_0^2)^2)} + 2\right)a_0^1 = 0, \tag{c}$$

$$\frac{a_0^2((a_0^1)^2 + (t+1)(a_0^2)^2)}{\Gamma^2 - ((a_0^1)^2 + (a_0^2)^2)} + 2(t+1)a_0^2 + a_0^1 = 0. \tag{d}$$

(c)式和(d)式有如下组解:

$$a_0^1 = 0, a_0^2 = \sqrt{2}\Gamma, \tag{e}$$
$$a_0^1 = 0, a_0^2 = -\sqrt{2}\Gamma, \tag{f}$$
$$a_0^2 = 0, a_0^1 = \Gamma, \tag{g}$$
$$a_0^2 = 0, a_0^1 = -\Gamma, \tag{h}$$
$$-(a_0^1)^2 + (t-1)(a_0^2)^2 + 2\Gamma^2 = 0,$$

$$-(t+1)(a_0^2)^3+[2(t+1)a_0^2+a_0^1](\Gamma^2-(a_0^1)^2)=0. \tag{i}$$

而方程组(i)解的形式比较复杂,这些平衡位置不再给出.

## 4. 转动相对论 Birkhoff 自治系统的受扰运动方程和一次近似方程

设 $a^\nu=a_0^\nu(\nu=1,\cdots,2n)$ 是转动相对论 Birkhoff 自治系统的孤立平衡位置,并令

$$a^\nu=a_0^\nu+\xi^\nu \qquad (\nu=1,\cdots,2n). \tag{18}$$

将(18)式代入(6)和(10)式,得到转动相对论 Birkhoff 自治系统的受扰运动方程

$$(\tilde{\omega}^*_{\mu\nu})_1\dot{\xi}^\nu-\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_1=0$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n) \tag{19}$$

和

$$\dot{\xi}^\mu-(\tilde{\omega}^{*\mu\nu})_1\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\nu}\right)_1=0$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n), \tag{20}$$

将$(\quad)_1$ 等在平衡位置附近展成 Taylor 级数,并利用平衡方程(15),得到受扰运动方程的另一种形式

$$(\tilde{\omega}^*_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu-(\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu})_0\xi^\nu=\Lambda_\mu(I_i(\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu),\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu)$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n) \tag{21}$$

和

$$\dot{\xi}^\mu-(\tilde{\omega}^{*\mu\nu})_0(\tilde{\Omega}^*_{\mu\rho})_0\xi^\rho=\bar{\Lambda}_\mu(I_i(\xi^\nu),\xi^\nu)$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n). \tag{22}$$

式中

$$\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\nu}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial a^\nu}\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)=\tilde{\Omega}^*_{\nu\mu}. \tag{23}$$

这里 $\Lambda_\mu,\bar{\Lambda}_\mu$ 是 $\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu$ 的二阶和更高价项,$\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}$ 是对称矩阵,由方程(21),(22)得到受扰运动方程的一次近似方程

$$(\tilde{\omega}^*_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu-(\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu})_0\xi^\nu=0\quad(\mu,\nu=1,\cdots,2n), \tag{24}$$

$$\dot{\xi}^\mu-(\tilde{\omega}^{*\mu\nu})_0(\tilde{\Omega}^*_{\mu\rho})_0\xi^\rho=0\quad(\mu,\nu,\rho=1,\cdots,2n). \tag{25}$$

## 5. 转动相对论 Birkhoff 自治系统平衡稳定性的一次近似方法

转动相对论 Birkhoff 自治系统一次近似方程(24)的特征方程

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-(\tilde{\omega}^*_{11})_0 & (\tilde{\omega}^*_{12})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^*_{12})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}^*_{12n})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^*_{12n})_0\\ (\tilde{\omega}^*_{21})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^*_{21})_0 & -(\tilde{\omega}^*_{22})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}^*_{22n})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^*_{22n})_0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\tilde{\omega}^*_{2n1})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^*_{2n1})_0 & (\tilde{\omega}^*_{2n2})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^*_{22n})_0 & \cdots & -(\tilde{\Omega}^*_{2n2n})_0\end{vmatrix}=0. \tag{26}$$

令与行列式(26)相应的矩阵记作 $A(\lambda)$.由(23)式知,这里的 $\tilde{\Omega}^*_{\mu\nu}$ 是对称矩阵而 $\tilde{\omega}^*_{\mu\nu}$ 是反对称矩阵[5],则有

$$A(\lambda)=[A(-\lambda)]^{\mathrm{T}}. \tag{27}$$

由矩阵理论知,矩阵转置后其形式不变,有

$$\Delta(\lambda)=\Delta(-\lambda). \tag{28}$$

这表明方程(26)中,$\lambda$ 的奇次方项为零,因此特征方程可写成

$$b_0\lambda^{2n}+b_1\lambda^{2n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda^2+b_n=0, \tag{29}$$

式中系数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 都是实数,方程(29)的根必然成对互为相反符号.于是有如下命题.

**命题 1** 转动相对论 BIrkhoff 自治系统一次近似方程(26)的根总是成对互为反号出现,如有根 $\lambda$,则必有根$(-\lambda)$.

**命题 2** 如果转动相对论 BIrkhoff 自治系统一次近似的特征方程有实部不为零的根,则平衡是不稳定的.

可见这种近似方法不能给出平衡稳定性的判据,只能给出不稳定性的充分条件.

**例 2** 设二阶转劝相对论 BIrkhoff 系统为

$$\tilde{B}^*=I\left\{\frac{1}{b^2}(a^1)^2+\omega^2(a^2)^2\right\},$$
$$\tilde{R}_1^*=Ia^2,\tilde{R}_2^*=I(a^1)^2, \tag{a}$$

式中 $I=I_0/\sqrt{1-((a^1)^2+(a^2)^2)/\Gamma^2}$,为相对论性质量,$b,\omega$ 为常数,试研究该系统的平衡稳定性.

该系统为转动相对论 Birkhoff 自治系统,(6)式

给出如下方程

$$I\left(\frac{(a^1)^3-(a^2)^2}{\Gamma^2-((a^1)^2+(a^2)^2)}+2a^1-1\right)\dot a^2$$

$$-I\left\{\frac{\frac{1}{b^2}(a^1)^3+\omega^2(a^2)^2a^1}{\Gamma^2-((a^1)^2+(a^2)^2)}+\frac{2a^1}{b^2}\right\}=0,$$

$$-I\left(\frac{(a^1)^3-(a^2)^2}{\Gamma^2-((a^1)^2+(a^2)^2)}+2a^1-1\right)\dot a^1$$

$$-I\left\{\frac{\frac{1}{b^2}(a^1)^2a^2+\omega^2(a^2)^3}{\Gamma^2-((a^1)^2+(a^2)^2)}+2\omega^2a^2\right\}=0. \tag{b}$$

由此得到平衡方程

$$\frac{\frac{1}{b^2}(a_0^1)^3+\omega^2(a_0^2)^2a_0^1}{\Gamma^2-((a_0^1)^2+(a_0^2)^2)}+\frac{2a_0^1}{b^2}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{b^2}(a_0^1)^2+\omega^2(a_0^2)^2}{\Gamma^2-((a_0^1)^2+(a_0^2)^2)}+\frac{2}{b^2}\right)a_0^1=0,$$

$$\frac{\frac{1}{b^2}(a_0^1)^2a_0^2+\omega^2(a_0^2)^3}{\Gamma^2-((a_0^1)^2+(a_0^2)^2)}+2\omega^2a_0^2$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{b^2}(a_0^1)^2+\omega^2(a_0^2)^2}{\Gamma^2-((a_0^1)^2+(a_0^2)^2)}+2\omega^2\right)a_0^2=0. \tag{c}$$

方程(c)有解

$$a_0^1=0,a_0^2=0. \tag{d}$$

$$a_0^1=0,a_0^2=\sqrt{2}\Gamma,\quad a_0^1=0,a_0^2=-\sqrt{2}\Gamma. \tag{e}$$

$$a_0^2=0,a_0^1=\sqrt{2}\Gamma,\quad a_0^2=0,a_0^1=-\sqrt{2}\Gamma. \tag{f}$$

方程(b)的一次近似方程为

$$\dot\xi^2+\frac{2}{b^2}\xi^1=0,\quad \dot\xi^1-2\omega^2\xi^2=0. \tag{g}$$

其特征方程为

$$(\Delta\lambda)=\begin{vmatrix}\frac{2}{b^2} & \lambda\\ \lambda & -2\omega^2\end{vmatrix}=0. \tag{h}$$

由此得到

$$\lambda^2=-\frac{4\omega^2}{b^2},$$

$$\lambda_1=\mathrm{i}\frac{\omega}{b},\lambda_2=-\mathrm{i}\frac{\omega}{b}$$

为一对纯虚根,利用命题 2 不能判断其稳定性.

## 6. 转动相对论 Birkhoff 系统平衡稳定性的直接方法

对转动系统的相对论性 Birkhoff 函数 $B^*$ 沿自治系统受扰运动方程(22)求对时间 $t$ 的导数,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde B^*(a^0+\xi)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}B^*(I_i(a^0+\xi),a^0+\xi)}{\mathrm{d}t}\\&=\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_1\dot\xi^\mu\\&=\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_1\\&\quad\times(\omega^{*\mu\nu})_1\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\nu}\right)_1\\&=0.\end{aligned} \tag{30}$$

那么,利用 Ляпунов 直接法,得到

**命题 3**　如果 $a^\nu=a_0^\nu(\nu=1,\cdots,2n)$ 是转动相对论 Birkhoff 自治系统的平衡位置,若相对论性 Birkhoff 函数满足 $B^*(I_i(a_0^\nu),a_0^\nu)=0$,且 $B^*(I_i(a_0^\nu),a_0^\nu)$ 在 $a^\nu=a_0^\nu$ 的邻域内是定号函数,则系统的平衡位置是稳定的.

如果 $B^*(I_i(a_0^\nu),a_0^\nu)\neq0$,可取 $V$ 函数为

$$V=B^*(I_i(a_0^\mu+\xi),a_0^\nu+\xi)-B^*(I(a_0^\nu),a_0^\nu),$$

则此命题仍成立.

可以证明,对于转动相对论 Birkhoff 非自治系统,将相对论性 Birkhoff 函数 $B^*$ 沿非自治系统受扰运动方程对时间 $t$ 求导数,有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde B^*(a^0+\xi)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}B^*(I_i(a^0+\xi),a^0+\xi)}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial t}+\frac{\partial B^*}{\partial t}+\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_1\dot\xi^\mu\\&=\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial t}+\frac{\partial B^*}{\partial t}+\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\mu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\mu}\right)_1(\omega^{*\mu\nu})_1\\&\quad\times\left(\frac{\partial B^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B^*}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B_\nu^*}{\partial I_i}\frac{\partial I_i}{\partial t}+\frac{\partial B_\nu^*}{\partial t}\right)_1\neq0,\end{aligned} \tag{31}$$

因此,命题 3 不成立.

## 7. 转动相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性与经典 Birkhoff 系统的平衡稳定性的关系

在 $(\dot\theta_i)\ll\Gamma_i$ 的经典近似下,取 $\sqrt{1-(\dot\theta_i)^2/\Gamma_i^2}$ 关

于$(\dot{\theta}_i)^2/\Gamma_i^2$的幂级数展开式的前两项，则相对论性动能函数为

$$T_r^* \approx I_{0i}\Gamma_i^2 - I_{0i}\Gamma_i^2(1-(\dot{\theta}_i)^2/2\Gamma_i^2) = \frac{1}{2}I_{0i}(\dot{\theta}_i)^2 = T_r,$$

相对论性转动惯量

$$I_i = I_{0i}/\sqrt{1-(\dot{r}_i)^2/\Gamma_i^2} \approx I_{0i},$$

转动系统的相对论性 Birkhoff 函数 $\tilde{B}^* = B^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}) \approx B(t,\boldsymbol{a})$，相对论性 Birkhoff 函数组

$$\tilde{R}_\nu^* = R_\nu^*(I_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a}) = R_\nu(t,\boldsymbol{a}),$$

本文给出经典转动 Birkhoff 系统的平衡稳定性[4].


[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (New York:AMS College publ. Providence R I)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics* Ⅱ (New York:Spring-Verlag)

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京:北京理工大学出版社)]

[4] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Zhu H P 1997 *Stability of Motion of Constrained Mechanical Systems* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、朱海平 1997 约束力学系统的运动稳定性(北京:北京理工大学出版社)]

[5] Mei F X and Shi R C 1993 *Journal of Beijing Institute of Technology* **13** 266 (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌 1993 北京理工大学学报 **13** 266]

[6] Mei F X 1993 *Chin. Sci.* (Series A) **23** 709

[7] Shi R C, Mei F X and Zhu H P 1994 *Mechanics Research Communication* **21** 269

[8] Mei F X 1993 *Sci. Bull.* **38** 31

[9] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1666 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 1666]

[10] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 939]

[11] Zhang H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1837 (in Chinese) [张宏彬 2001 物理学报 **50** 1837]

[12] Luo S K 1987 *Tech. Mater. Commun.* **5** 31 (in Chinese) [罗绍凯 1987 教材通讯 **5** 31]

[13] Luo S K 1991 *Shanghai J. Mech.* **12** 67 (in Chinese) [罗绍凯 1991 上海力学 **12** 67]

[14] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683

[15] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 175

[16] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 889

[17] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 1019

[18] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89

[19] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45

[20] Fu J L, Chen X W and Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1266

[21] Fu J L, Chen X W and Luo S K 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 549

[22] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]

[23] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]

[24] Fu J L, Chen X W and Luo S K 2001 *Acta Mech. Sol. Sin.* **22** 263 (in Chinese) [傅景礼、陈向炜、罗绍凯 2001 固体力学学报 **22** 263]

[25] Fu J L 2001 *Acta Math. Phys. Sci.* **21** 70 (in Chinese) [傅景礼 2001 数学物理学报 **21** 70]

[26] Fu J L, Chen L Q, Luo S K *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯等 2001 物理学报 **50** 2289]

[27] Fu J L and Zheng S W 2000 *J. Yunnan University* **23** 194 (in Chinese) [傅景礼、郑世旺 2000 云南大学学报 **23** 194]

[28] Fu J L and Luo S K 1999 *J. Shangqiu Teachers College* **15** (6) 15 (in Chinese) [傅景礼、罗绍凯 1999 商丘师专学报 **15**(6) 15]

[29] Fu J L and Luo S K 1999 *J. Shangqiu Teachers College* **15**(1) 10 (in Chinese) [傅景礼、罗绍凯 1999 商丘师院学报 **15**(1) 10]

[30] Luo S K, Fu J L and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]

[31] Luo S K, Chen X W and Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[32] Luo S K, Guo Y X, Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]

[33] Fu J L, Chen L Q, Xue Y and Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2683 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭、罗绍凯 2002 物理学报 **51** 2683]

# Stability for the equilibrium state of rotational relativistic Birkhoffian systems*

Fu Jing-Li[1)2)] Chen Li-Qun[1)] Xue Yun[1)]

[1)] (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200072, *China*)

[2)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Shangqiu Teachers College*, *Shangqiu* 476000, *China*)

(Received 12 May 2002; revised manuscript received 15 June 2002)

Abstract

The stability for equilibrium state of rotational relativistic Birkhoffian systems is studied. The equilibrium state equations, the disturbance equation and the first approximation equation are given. The stability criteria for equilibrium state, and the stability criteria of the direct method for the rotational relativistic Birkhoffian autonomous systems are obtained. The relationship of the stability of equilibrium state between rotational relativistic Birkhoffian systems and rotational classical Birkhoffian systems are discussed. Two examples are presented to illustrate the results.

**Keywords**: relativity, rotational Birkhoffian systems, stability, equilibrium state, the first approximate, directive method

**PACC**: 0320, 0412

* Project supported by the Natural Science Foundion of Henan Province, China (Grant No. 98405300).