第 52 卷 第 2 期 2003 年 2 月
1000-3290/2003/52(02)/0267-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.2, February, 2003

组合 KdV 方程的显式精确解*

石玉仁 吕克璞† 段文山 洪学仁 赵金保 杨红娟

(西北师范大学物理与电子工程学院,兰州 730070)

(2002 年 3 月 17 日收到;2002 年 4 月 23 日收到修改稿)

借助计算机代数系统 Mathematica,利用双曲函数法找到了组合 KdV 方程(Combined KdV Equation)的精确孤立波解,包括钟型孤立波解和扭结型孤立波解.在此基础上又对双曲函数法的思想进行了推广,从而获得了其更多的显式精确解,包括间断型激波解和指数函数型解.这种方法也适用于求解其他非线性发展方程(组).

关键词:组合 KdV 方程,双曲函数法,孤立波解,精确解

PACC:0340K,0290

1. 引 言

求解非线性偏微分方程,长期以来是物理学家和数学家研究的重要课题.近年来,齐次平衡法[1—5]得到了广泛的应用[4—11].文献[12]在该法的基础上,提出了双曲函数法,并且用这种方法成功地找到了若干非线性方程的精确孤立波解.文献[13]对该法又作了进一步的完善以求找到非线性方程的更多的精确解.该方法的优点是借助计算机代数系统如 Maple,Mathematica 等可以快速高效地完成.

本文用双曲函数法,借助 Mathematica 软件,成功得到了组合 KdV 方程[14]

$$\varphi_t + \alpha\varphi\varphi_x + \beta\varphi^2\varphi_x + \gamma\varphi_{xxx} = 0 \tag{1}$$

(α,β,γ 为不等于 0 的常数)的 4 组孤立波解.又在此法思想基础上对其进行了推广,获得了方程(1)的更多精确解.该方法也同样适用于求解其他非线性发展方程(组).

2. 组合 KdV 方程的精确孤立波解

2.1. 双曲函数法简介

文献[12]提出的双曲函数法,简述如下:对于方程,比如两个独立变量 x,t

$$K(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots) = 0. \tag{2}$$

考虑其行波解

$$u(x,t) = \phi(\xi),\xi = kx - ct + l, \tag{3}$$

可将方程(2)化为关于 ϕ 的常微分方程 ODE,假设其解为

$$\phi = \sum_{i=0}^{m} a_i f^i + \sum_{j=1}^{m} b_j f^{j-1} g, \tag{4}$$

其中

$$f = \frac{1}{\cosh\xi + r}, g = \frac{\sinh\xi}{\cosh\xi + r}, \tag{5}$$

则

$$\frac{df}{d\xi} = -fg, \frac{dg}{d\xi} = 1 - g^2 - rf,$$
$$g^2 = 1 - 2rf + (r^2 - 1)f^2. \tag{6}$$

m“通过平衡微分方程 ODE 的最高阶微分项和非线性项的阶数”来确定(文献[13]则指出这样确定的是 m 的最大值,建议从 1 开始取起).接着把(4)式代入 ODE,再利用(6)式化简所得到的方程,使得方程各项满足两个条件:Ⅰ)只有 f 和 g 的幂次项;Ⅱ)g 的幂次不大于 1.然后合并 f 和 g 的同次幂项并取系数为零,就可以得到一个包含所有待定系数的非线性代数方程组 NAES.求解此 NAES 最终可有希望得到非线性发展方程的精确解.以上工作手工推导比较麻烦,借助计算机代数系统如 Maple,Mathematica 等可以快速高效地完成.

2.2. 组合 KdV 方程的孤立波解

为简化起见,先对方程(1)作变量代换,φ =

* 国家自然科学基金(批准号:10247008)和西北师范大学科技创新工程(批准号:NWNU-KJCXGC-215)资助的课题.

† 通讯作者.

$\frac{6\gamma^{\frac{1}{3}}}{\alpha}u$，$x=\gamma^{\frac{1}{3}}x'$，$t=t'$并略去自变量上的撇号，则方程(1)成为

$$u_t+6uu_x+\theta u^2u_x+u_{xxx}=0,\tag{1'}$$

其中 $\theta=\frac{36\beta\gamma^{\frac{1}{3}}}{\alpha^2}$.后面的求解将针对(1′)式进行.

按照双曲函数法，平衡方程(1′)中非线性项 u^2u_x 和最高阶导数项 u_{xxx}，得 $m=1$，从而得到方程(1′)相应的非线性代数方程组 NAES 为

$$\begin{aligned}
&-b_1(c-4k^3-cr^2+7k^3r^2+k(-1+r^2)\theta a_0^2\\
&-18kra_1+2k\theta a_1^2+6ka_0(-1+r^2\\
&-r\theta a_1)-k\theta b_1^2+3kr^2\theta b_1^2)=0,\\
&ca_1-k^3a_1-6ka_0a_1-k\theta a_0^2a_1\\
&+2kr(3+\theta a_0)b_1^2-k\theta a_1b_1^2=0,\\
&-crb_1+k^3rb_1+kr\theta a_0^2b_1-6ka_1b_1\\
&-a_0(-6kr+2k\theta a_1)b_1+kr\theta b_1^3=0,\\
&-k\theta a_1^3-3k(-1+r^2)a_1(2k^2+\theta b_1^2)=0,\\
&-kb_1(4(-1+r^2)(3+\theta a_0)a_1-5r\theta a_1^2\\
&-3r(-1+r^2)(4k^2+\theta b_1^2))=0,\\
&-k(-1+r^2)b_1(3\theta a_1^2\\
&+(-1+r^2)(6k^2+\theta b_1^2))=0,\\
&-2k(3+\theta a_0)a_1^2-2k(-1+r^2)(3+\theta a_0)b_1^2\\
&+2kra_1(3k^2+2\theta b_1^2)=0.
\end{aligned}\tag{7}$$

利用计算机代数系统 Mathematica 直接求解方程组(7)，有一定的难度.通过分别取方程组(7)中 $b_1=0$ 和 $a_1=0$，可得方程(1′)的 4 组精确孤立波解，它们分别为：

情况 1

$$u=-\frac{3}{\theta}+\frac{\sqrt{3}k^2r^2\theta}{\sqrt{-2k^2r^2(r^2-1)\theta^3}}+\frac{\sqrt{-6k^2r^2(r^2-1)\theta^3}}{r\theta^2(r+\cosh(kx-ct+l))},\tag{8}$$

其中 k，l 为任意常数，$c=-\frac{k^3(r^2+2)}{2(r^2-1)}-\frac{9k}{\theta}$.若要求 u 为实函数，则应 $r^2<1$，$\theta>0$ 或 $r^2>1$，$\theta<0$.

情况 2

$$u=-\frac{3}{\theta}+\frac{\sqrt{-6k^2r^2(r^2-1)\theta^3}}{2\theta^2(r^2-1)}-\frac{\sqrt{-6k^2r^2(r^2-1)\theta^3}}{r\theta^2(r+\cosh(kx-ct+l))},\tag{9}$$

其中 k，l 为任意常数，$c=-\frac{k^3(r^2+2)}{2(r^2-1)}-\frac{9k}{\theta}$.若要求 u 为实函数，同样应 $r^2<1$，$\theta>0$ 或 $r^2>1$，$\theta<0$.

情况 3

$$u=-\frac{3}{\theta}\pm\frac{\sqrt{6}\mathrm{i}k\tanh(kx-ct+l)}{\sqrt{\theta}},\tag{10}$$

其中 k，l 为任意常数，$c=-2k^3-\frac{9k}{\theta}$.若要求 u 为实函数，则应 $\theta<0$.

情况 4

$$u=-\frac{3}{\theta}\pm\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}k\sinh(kx-ct+l)}{\sqrt{2\theta}(\cosh(kx-ct+l)+1)},\tag{11}$$

其中 k，l 为任意常数，$c=-\frac{k(18+k^2\theta)}{2\theta}$.若要求 u 为实函数，也应 $\theta<0$.

上面第 1，2 组解是钟型孤立波解，而 3，4 组解是扭结型孤立波解.

3. 方程(1′)的其他精确解

3.1. 方法的探讨

实际应用中可以发现，文献[12]中介绍的双曲函数法，由于限定了函数 f 和 g 的具体取法，所以其找到的解的类型就受到了限制.实际上，我们还可以取其他类型的函数 f 和 g，只要它们满足以下两个条件：

1) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}$，$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi}$都是$f(\xi)$和 $g(\xi)$的多项式；

2) g^2 可以表示为 $f(\xi)$的多项式.

这种方法的思想就可以推广开来，以找到非线性发展方程的更多的精确解.不难知道，这里条件 1)保证了 f 和 g 对 ξ 的各阶导数都是$f(\xi)$和 $g(\xi)$的多项式，从而可以做到 2.1 节中的Ⅰ)条件 2)保证了可以做到 2.1 节中的Ⅱ).由于满足以上两个条件的函数有很多，故可以很方便地选择合适的 $f(\xi)$和 $g(\xi)$来求解非线性发展方程.下面以方程(1′)为例.

3.2. 方法的应用

仿文献[12]的做法，取

$$f(\xi)=\frac{1}{r+\sinh\xi},g(\xi)=\frac{\cosh\xi}{r+\sinh\xi},\tag{12}$$

则有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}=-fg,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi}=1-g^2-rf,\\&g^2=1-2rf+(r^2+1)f^2.\end{aligned}\tag{13}$$

用和前面同样的方法,得方程(1′)在此时对应的 NAES 为

$$
\begin{aligned}
&-b_1(-c+4k^3-cr^2+7k^3r^2+k(1+r^2)\theta a_0^2\\
&-18kra_1+2k\theta a_1^2+6ka_0(1+r^2\\
&-r\theta a_1)+k\theta b_1^2+3kr^2\theta b_1^2)=0,\\
&ca_1-k^3a_1-6ka_0a_1-k\theta a_0^2a_1\\
&+2kr(3+\theta a_0)b_1^2-k\theta a_1b_1^2=0,\\
&-crb_1+k^3rb_1+kr\theta a_0^2b_1-6ka_1b_1\\
&-a_0(-6kr+2k\theta a_1)b_1+kr\theta b_1^3=0,\\
&-k\theta a_1^3-3k(1+r^2)a_1(2k^2+\theta b_1^2)=0,\\
&-kb_1(4(1+r^2)(3+\theta a_0)a_1-5r\theta a_1^2\\
&-3(r+r^3)(4k^2+\theta b_1^2))=0,\\
&-k(1+r^2)b_1(3\theta a_1^2\\
&+(1+r^2)(6k^2+\theta b_1^2))=0,\\
&-2k(3+\theta a_0)a_1^2-2k(1+r^2)(3+\theta a_0)b_1^2\\
&+2kra_1(3k^2+2\theta b_1^2)=0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

用 Mathematica 对此非线性方程组进行求解,又得到方程(1′)的 2 组精确解:

情况 5

$$
u=-\frac{3}{\theta}\mp\frac{\sqrt{-6k^2r^2(r^2+1)\theta^3}}{2\theta^2(r^2+1)}\pm\frac{\sqrt{-6k^2r^2(r^2+1)\theta^3}}{r\theta^2(r+\sinh(kx-ct+l))},\tag{15}
$$

其中 k,l 为任意常数,$c=-\frac{k^3(r^2-2)}{2(r^2+1)}-\frac{9k}{\theta}$.若要求 u 为实函数,则应 $\theta<0$.

情况 6

$$
u=-\frac{3}{\theta}\pm\frac{\sqrt{6}\mathrm{i}k\coth(kx-ct+l)}{\sqrt{\theta}},\tag{16}
$$

其中 k,l 为任意常数,$c=-2k^3-\frac{9k}{\theta}$.若要求 u 为实函数,也应 $\theta<0$.

一般而言,情况 1,2,3,4 代表非线性方程的孤波解,而情况 5,6 表示间断激波解.

再如,取

$$
f=\frac{1-A^2\mathrm{e}^{2\xi}}{1+A^2\mathrm{e}^{2\xi}},\quad g=\frac{2A\mathrm{e}^{\xi}}{1+A^2\mathrm{e}^{2\xi}},\tag{17}
$$

其中 A 为任意常数,则

$$
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}=-g^2,\quad\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi}=fg,\quad g^2=1-f^2,\tag{18}
$$

得方程(1′)在此时对应的 NAES 为

$$
\begin{aligned}
&-6ka_1b_1-2k\theta a_0a_1b_1=0,\\
&12ka_1b_1+4k\theta a_0a_1b_1=0,\\
&6ka_1^2+2k\theta a_0a_1^2-2k(3+\theta a_0)b_1^2=0,\\
&-6ka_1^2-2k\theta a_0a_1^2+2k(3+\theta a_0)b_1^2=0,\\
&ca_1+2k^3a_1-6ka_0a_1-k\theta a_0^2a_1-k\theta a_1b_1^2=0,\\
&-ca_1-8k^3a_1+6ka_0a_1+k\theta a_0^2a_1\\
&-k\theta a_1^3+4k\theta a_1b_1^2=0,\\
&-cb_1-5k^3b_1+6ka_0b_1+k\theta a_0^2b_1\\
&-2k\theta a_1^2b_1+k\theta b_1^3=0,\\
&k\theta a_1^3+a_1(6k^3-3k\theta b_1^2)=0,\\
&3k\theta a_1^2b_1+b_1(6k^3-k\theta b_1^2)=0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

用 Matematica 对此非线性方程组进行求解,又得到方程(1′)的 2 组精确解.

情况 7

$$
u=-\frac{3}{\theta}\pm\frac{2\sqrt{6}kA\mathrm{e}^{kx-ct+l}}{\sqrt{\theta}(1+A^2\mathrm{e}^{2(kx-ct+l)})},\tag{20}
$$

其中 k,l 为任意常数,$c=k^3-\frac{9k}{\theta}$.若要求 u 为实函数,应 $\theta>0$.

情况 8

$$
u=-\frac{3}{\theta}\pm\frac{\sqrt{6}\mathrm{i}k(1-A^2\mathrm{e}^{2(kx-ct+l)})}{\sqrt{\theta}(1+A^2\mathrm{e}^{2(kx-ct+l)})},\tag{21}
$$

其中 k,l 为任意常数,$c=-2k^3-\frac{9k}{\theta}$.若要求 u 为实函数,应 $\theta<0$.

如果选择其他合适的 $f(\xi)$和 $g(\xi)$,将有希望获得方程(1′)其他类型的精确解.

4. 结　论

本文用双曲函数法成功得到了组合 KdV 方程的 4 组精确孤立波解,又进一步对双曲函数法的思想进行了推广,总结出选择函数 f 和 g 的两个充分条件,使其应用更为方便,应用范围更为宽广.接着在此条件的指导下,改变了函数 f 和 g 的具体形式,又获得了组合 KdV 方程的若干组精确解.相信在非线性发展方程的求解中,该法将会发挥其重要的作用.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett*. A **199** 169
[2] Wang M L, Zhou Y B and Li Z B 1996 *Phys. Lett*. A **216** 67
[3] Yang L, Zhu Z and Wang Y 1999 *Phys. Lett*. A **260** 55
[4] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin*. **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
[5] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin*. **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
[6] Zhang J F 2000 *Chin. Phys*. **9** 1
[7] Xia T C, Zhang H Q and Yan Z Y 2001 *Chin. Phys*. **10** 694
[8] Zhang J F 1998 *Acta Phys. Sin*. **47** 1416 (in Chinese) [张解放 1998 物理学报 **47** 1416]
[9] Yan Z Y, Zhang H Q and Fan E G 1999 *Acta Phys. Sin*. **48** 1 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]
[10] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin*. **48** 1962 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]
[11] Naranmandula B and Chen Bator 2001 *Mechanics in Engineering* **23** 33 [那仁满都拉、陈巴特尔 2001 力学与实践 **23** 33]
[12] Zhang G X, Li Z B and Duan Y S 2000 *Science in China* (Series A) **30** 1103 (in Chinese) [张桂戌、李志斌、段一士 2002 中国科学(A) **30** 1103]
[13] Lü K P, Shi Y R, Duan W S and Zhao J B 2001 *Acta Phys. Sin*. **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山、赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]
[14] Pan L X, Zhou G H and Li S S 2002 *Chinese Journal of Atomic and Molecular Physics* **19** 79

Explicit and exact solutions of the combined KdV equation*

Shi Yu-ren Lü Ke-Pu Duan Wen-Shan Hong Xue-Ren Zhao Jin-Bao Yang Hong-Juan
(*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)
(Received 17 March 2002; revised manuscript received 23 April 2002)

Abstract

With the aid of computer algebraic system "Mathematica" and by using the hyperbola function method, the exact and solitary wave solutions of the combined KdV equation are obtained, including the bell-like and the kink solitary wave solutions. The thought based on the hyperbola function method is extended, and more explicit and exact solutions are successfully derived, including shock wave type solutions with break point and exponential function type solutions. This method can be used also to solve other nonlinear evolution equation(s).

Keywords: combined KdV equation, hyperbola function method, solitary wave solution, exact solution
PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10247008) and the Natural Science Foundation of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNU-KJCXGC-215)