

扰动情况下一类混沌系统的观测器同步*

关新平 何宴辉 范正平

(燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

(2002 年 6 月 3 日收到, 2002 年 7 月 1 日收到修改稿)

研究了存在外界扰动情况下一类混沌系统的同步问题, 混沌系统非线性项无需满足输出反馈形式. 首先对系统进行变换得到未受扰降价混沌系统, 然后基于非线性观测器的思想构造同步观测系统实现了混沌同步, 通过仿真证实了该方法的有效性.

关键词: 混沌系统, 同步, 观测器

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 由于混沌同步在保密通信、扩频通信等领域显示了良好的应用前景, 混沌同步的研究受到了广泛的关注. 混沌系统对初始条件极其敏感, 混沌同步曾一度被认为是控制界的一个难点. 自从开创性的 P-C 同步方法^[1]提出后, 物理界和控制界陆续出现了多种同步方法^[2-13], 如自适应方法^[3,4], 脉冲同步法^[5], 神经网络同步法^[6,7], 观测器同步法^[8-13]等等, 其中观测器方法就不失为一种较好的方法. 观测器同步易于工程实现, 且无需计算条件 Lyapunov 指数, 因而有很大的实用价值. 文献 [9] 和 [10] 基于观测器思想实现了混沌系统的同步, 但其是在理想情况下设计同步控制器, 未考虑外界干扰对系统的影响. 然而, 实际系统中外界干扰几乎是不可避免的, 它致使设计的控制器存在误差, 由于“蝴蝶效应”的影响, 小的误差可能导致同步性能的严重恶化. 文献 [11] 和 [12] 考虑了外界扰动的影响, 但它们仅适用于具有输出反馈形式的混沌系统, 对于更一般的混沌系统则未进行讨论. 文献 [13] 针对具有一般非线性项形式的混沌系统实现了同步, 但是它的输出驱动信号中要包含所有的非线性项信息, 这就限制了该方法在实际中的应用.

本文基于非线性观测器的思想, 实现了扰动情况下混沌系统的同步. 通过一种新的观测器设计方法, 消除了以往一些观测器方法中混沌系统非线性

项只能是输出反馈形式的限制, 且输出驱动信号不需包含非线性项全部信息.

2. 系统模型描述

考虑如下的一类存在外界干扰的混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + f(t, x) + Dd(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x \in R^n$ 为系统的状态, $f \in R^n$ 是混沌系统的非线性项, $y \in R^m$ 为系统的输出, $d(t)$ 为外界扰动, A, C, D 是适当维数的定常矩阵. 且设 $[A, C]$ 为能观对.

(1) 式代表着实际中很大一类混沌系统的模型, 几乎所有的连续混沌系统都可以用上述模型表示. 如 Rössler 超混沌系统、Lorenz 混沌系统、超混沌电路和细胞神经网络超混沌系统等等.

实际系统中, 系统并不是每个变量都会受到外界干扰的影响, 假定系统只有 q 个变量受到外界干扰的影响, 则可经过初等变换将系统 (1) 化为下述形式的混沌系统:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \\ \quad + \begin{bmatrix} f_1(t, \bar{x}) \\ f_2(t, \bar{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} d(t), \\ y = [C_1 \quad C_2] \bar{x}(t), \end{cases} \quad (2)$$

* 国家自然科学基金(批准号 60274023)与河北省自然科学基金(批准号 601225)资助的课题.

其中 $\bar{x}(t) = S \cdot x(t)$, $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = S \cdot A \cdot S^{-1}$,

$$\begin{bmatrix} f_1(t, \bar{x}) \\ f_2(t, \bar{x}) \end{bmatrix} = S \cdot f(t, x),$$

$\bar{x}(t) = [\bar{x}_1(t) \quad \bar{x}_2(t)]^T [C_1 \quad C_2] = C \cdot S^{-1}$,
 S 为初等行变换矩阵的乘积.

3. 同步观测器设计

定义一个辅助变量 $z \in R^q$

$$z(t) = A_{12} \bar{x}_2(t). \tag{3}$$

由(2)式和(3)式

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \vdots & -I_m & 0 \\ 0 & A_{12} & \vdots & 0 & -I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{bmatrix} = 0, \tag{4}$$

其中 $\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, 因为上面矩阵满秩, 所以必定

存在非奇异阵 $T \in R^{m+q}$, 使得

$$T \cdot \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \vdots & -I_m & 0 \\ 0 & A_{12} & \vdots & 0 & -I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Q_1 & \vdots & N_1 \\ I_q & Q_2 & \vdots & N_2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

由(4)式和(5)式可得

$$\begin{cases} Q_1 \bar{x}_2(t) + N_1 \bar{y}(t) = 0, \\ Q_2 \bar{x}_2(t) + \bar{x}_1(t) + N_2 \bar{y}(t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

可见, 受扰子系统状态变量 $\bar{x}_1(t)$ 可用未受扰子系统的状态变量 $\bar{x}_2(t)$ 表示.

令

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= -N_1 \bar{y}(t) = -[N_{11} \quad N_{12}] \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \\ N_2 &= [N_{21} \quad N_{22}], \end{aligned} \tag{7}$$

得到降阶的 $n - q$ 阶未受扰子系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2(t) = F \bar{x}_2(t) + H y(t) + f_2(t, \bar{x}), \\ \tilde{y}(t) = Q_1 \bar{x}_2(t), \end{cases} \tag{8}$$

其中 $F = A_{22} - A_{21} Q_2 - A_{21} N_{22} A_{12}$, $H = -A_{21} N_{21}$.

因为系统(1)能观测, 所以降阶系统(8)也是能观测的, 且 $[F, Q_1]$ 为能观对. 对系统(8)设计如下的非线性观测器同步系统:

$$\dot{\hat{x}}_2 = F \hat{x}_2 + H y(t) + f_2(t, \hat{x}) + L(\tilde{y} - Q_1 \hat{x}_2). \tag{9}$$

这里 \hat{x}_2 为观测器变量, L 是待设计的观测器增益.

定义 $e = \bar{x}_2 - \hat{x}_2$, 则误差系统

$$\dot{e} = (F - LC)e + f_2(t, \bar{x}) - f_2(t, \hat{x}). \tag{10}$$

如果选取适当的 L 使得(10)式渐进稳定, 那么

$\hat{x}_2 \rightarrow \bar{x}_2$, 就可以根据(6)式构造出系统(2)的同步混沌系统. 在设计 L 之前, 先做如下假设.

假设 1 系统(8)中的非线性项满足条件

$$\|f_2(t, \bar{x}_a) - f_2(t, \bar{x}_b)\| < r \|\bar{x}_a - \bar{x}_b\|, \tag{11}$$

其中, r 为一正常数. 由混沌吸引子的有界性, 这一条件对于系统(8)一般都是满足的. 对系统(10)做运动学分析, 可得到系统的解为

$$\begin{aligned} e(t) &= e^{F_Q t} e(0) + \int_0^t e^{F_Q(t-\tau)} [f_2(\tau, \bar{x}_2(\tau)) \\ &\quad - f_2(\tau, \hat{x}_2(\tau))] d\tau, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $F_Q = F - LQ_1$. 因为 $[F, Q_1]$ 为能观对, 存在 $V \in R^{(n-q) \times (n-q)}$, $\det V \neq 0$, 使得

$$VF_Q V^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-q}) = \Lambda. \tag{13}$$

由(13)式

$$e^{F_Q t} = V^{-1} e^{\Lambda t} V. \tag{14}$$

将(14)式代入(12)式, 且对其两边取范数, 由范数定理及假设 1 知

$$\begin{aligned} \|V e(t)\| &\leq e^{\lambda t} \|V e(0)\| + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} r \|V\| \\ &\quad \cdot \|e(\tau)\| d\tau, \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\lambda = \max_i \lambda_i$. 我们在设计观测器增益时, 总使得

$$\lambda_i = \lambda_i(F - Q_1) < 0.$$

又由于

$$\begin{aligned} \|e(\tau)\| &= \|V^{-1} V e(\tau)\| \\ &\leq \|V^{-1}\| \cdot \|V e(\tau)\|, \end{aligned} \tag{16}$$

故下述不等式成立

$$\begin{aligned} \|V e(t)\| &\leq e^{\lambda t} \|V e(0)\| \\ &\quad + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} r \|V\| \cdot \|V^{-1}\| \cdot \|V e(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

引理 1 对于 $h(t) > 0$, 常数 a, c, λ , 如果

$$h(t) \leq c e^{\lambda t} + \int_0^t a e^{\lambda(t-\tau)} h(\tau) d\tau,$$

那么 $h(t) \leq c e^{(\lambda+a)t}$.

由引理 1 结合(17)式可得

$$\|V e(t)\| \leq \|V e(0)\| e^{(\lambda+r \cdot \|V\| \cdot \|V^{-1}\|)t}. \tag{18}$$

可见当下述条件满足时:

$$\lambda + r \cdot \|V\| \cdot \|V^{-1}\| < 0, \tag{19}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|V e(t)\| = 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ 达到了设计目的.

降阶混沌子系统存在同步系统的条件归结为 F_Q 特征向量矩阵 V 的范数条件, 如果能够用 λ_i 对

矩阵 V 进行参数化表示, 则通过优化的方法得到 λ_i 和 V , 运用线性系统特征结构配置理论, 可设计出满足条件的 L .

关于如何将矩阵 V 进行参数化表示, 文献 [14] 已进行过详细讨论.

$$V = [N(\lambda_1)\beta_1, N(\lambda_2)\beta_2 \dots N(\lambda_{n-q})\beta_{n-q}],$$

$$W = [D(\lambda_1)\beta_1, D(\lambda_2)\beta_2 \dots D(\lambda_{n-q})\beta_{n-q}],$$

其中 β_i 为自由参变量, λ_i 为 $n - q$ 个互异的特征根, 且 $\text{Re}\lambda_i < 0$, $N(s), D(s)$ 为能观对 $[F, Q_1]$ 的右互质分解, 即

$$(sI - F^T)^{-1} Q_1^T = N(s)D^{-1}(s).$$

得到 V 的参数化表示后, 运用 Matlab 优化工具箱求解如下优化问题

$$\min J(\lambda_i, \beta_i) = \min(\max \lambda_i) + r \cdot \|V\| \cdot \|V^{-1}\|$$

来寻找满足条件的 λ_i 和 V , 上述优化问题不必进行到底, 只要 $J < 0$ 即可结束寻优过程. 然后根据文献 [15] 的线性系统特征结构配置理论, 当满足 1) $\lambda_i = \bar{\lambda}_j$ 时, $\beta_i = \bar{\beta}_j$; 2) $\det V \neq 0$ 约束条件时,

$$L = -V^{-T}W^T. \tag{20}$$

将 (7) 式代入 (9) 式, 结合 (6) 式, 我们得到了系统 (2) 的同步观测器描述

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = (F_Q - LN_{12}A_{12})\hat{x}_2 + (H - LN_{11})(t) + f_2(t, \hat{x}), \\ \dot{\hat{x}}_1 = -(Q_2 + N_{22}A_{21})\hat{x}_2 - N_{21}(t). \end{cases} \tag{21}$$

4. 数值算例

选取如下的受扰超混沌电路^[16]作为仿真对象, 系统方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & -20 \\ -2 & 6 & -66 & 0 \\ 0 & 1.5 & -15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g(x) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t), \tag{22}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

其中 $g(x) = 3.2|x_2 - 11x_3 - 1| - |x_2 - 11x_3 + 1|$, 我们假设只有状态分量 x_1 受到外界干扰的影响 $d(t) = \sin(10t)$, 则根据文中的观测器设计方法, 将 A 矩阵作如下划分,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -20 & \dots & 0 & 0 & -20 \\ -2 & \dots & 6 & -66 & 0 \\ 0 & \dots & 1.5 & -15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

先对系统进行降价处理, 然后对降价系统设计观测器, 经计算得

$$N(s) = \begin{bmatrix} -s & 0 \\ -\frac{1}{6}(30 + s^2) & 0 \\ 20 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} 300 - \frac{1}{6}(66 + s)(30 + s^2) & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

经寻优计算后, 得到观测器增益为

$$L = \begin{bmatrix} 103.9705 & -0.1299 \\ -11.4957 & -0.015 \\ -14.712 & 0.0324 \end{bmatrix},$$

$$F_Q = \begin{bmatrix} 0 & -103.8406 & -20 \\ 6 & -54 & 0 \\ -1.5 & -0.3204 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

根据 (21) 式和 (22) 式可得系统 (23) 的同步观测器描述为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1299 & -20 \\ 6 & -65.985 & 0 \\ 1.5 & -0.3204 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} -20 & -0.1299 \\ -2 & -0.015 \\ 0 & 0.0324 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{x}_1 = N_{21} y. \end{cases}$$

系统的仿真结果如图 1—4 所示,图 1—4 是系统同步的效果图.由图可见,在外界扰动的影响下混

沌系统仍能保持良好的同步性能.

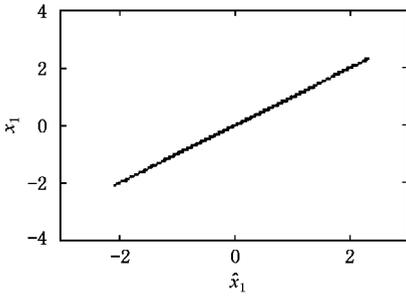


图 1 x_1 分量同步效果图

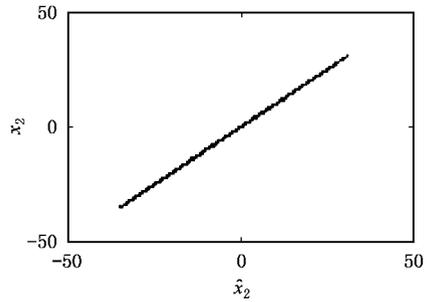


图 2 x_2 分量同步效果图

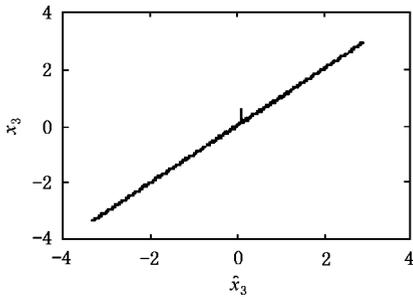


图 3 x_3 分量同步效果图

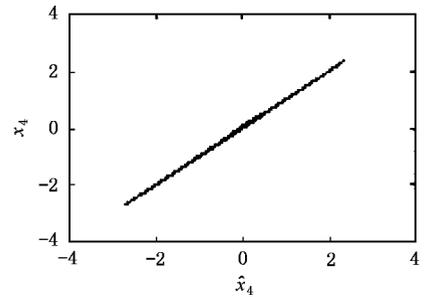


图 4 x_4 分量同步效果图

5. 结 论

本文通过非线性观测器方法,对一类受扰混沌系统的同步问题进行了研究,成功的实现了同步.所

研究的混沌系统具有一般性,消除了对非线性项的一些限制.同时该方法不仅适用于一般的混沌系统,而且对超混沌系统也同样适用,使得该方法更具实用性.最后的仿真结果是令人满意的.

- [1] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Wang T B ,Chen G Z and Tan T F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 185(in Chinese) 王铁邦、陈光旨、覃团发 2001 *物理学报* **50** 1851]
- [3] Li Z and Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [4] He M F *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 830(in Chinese) 贺明峰等 2000 *物理学报* **49** 830]
- [5] Yang L B and Yang T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 33(in Chinese) 杨林保、杨 涛 2000 *物理学报* **49** 33]
- [6] Guan X P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670(in Chinese) 关新平等 2001 *物理学报* **50** 1670]
- [7] Guan X P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2112(in Chinese) 关新平等 2001 *物理学报* **50** 2112]
- [8] Liu F *et al* 2001 *Chin. Phys.* **10** 606
- [9] Wang X F and Wang Z Q 1998 *IEEE Trans. Circuits Sys.* **45** 1101
- [10] Giuseppe G and Mascolo S 1999 *Int. J. Bifurca. Chaos* **9** 1175
- [11] Liao T L and Tsai S H 2000 *Chaos Solitons and Fractals* **11** 1387
- [12] Guan X P ,Zhang Q L and Fan Z P 2001 *Journal of China Institute of Communications* **12** 56(in Chinese) 关新平、张群亮、范正平 2001 *通信学报* **12** 56]
- [13] Yang X S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1919(in Chinese) 杨晓松 2000 *物理学报* **49** 1919]
- [14] Ma K M *et al* 1998 *Control Theory and Applications* **15** 443(in Chinese) 马克茂等 1998 *控制理论与应用* **15** 443]
- [15] Duan G R 1993 *IEEE Trans. Auto. Con.* **38** 276
- [16] Matsumoto T *et al* 1986 *IEEE Trans. Circuits Sys.* **33** 1143

Synchronization of a class of chaotic systems in the presence of perturbation by an observer^{*}

Guan Xin-Ping He Yan-Hui Fan Zheng-Ping

(Institute of Electrical Engineering , Yanshan University , Qinhuangdao 066004 , China)

(Received 3 June 2002 ; revised manuscript received 1 July 2002)

Abstract

Synchronization problem in the presence of perturbation is considered ,and the nonlinear part of the chaotic system is nt in output feedback form. In this paper ,we first transfer the system and obtain a nonfull order system. Second ,we construct a synchronous system based on the nonlinear observer idea and realize the synchronization. Finally numerical example is illustrated and the simulation results verify the conclusion of this paper.

Keywords : chaotic system , synchronization , observer

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.60274023) and by the Natural Science Foundation of Hebei Province , China (Grant No.601225).