

统一混沌系统的控制

陶朝海 陆君安[†]

(武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

(2002 年 3 月 19 日收到, 2002 年 7 月 4 日收到修改稿)

对统一混沌系统建立了自反馈控制、错位反馈控制和自适应控制方法, 在理论上给予严格证明, 数值仿真表明这些方法是很有有效的, 还纠正了文献 [10] 的某些不足.

关键词: 统一混沌系统, 反馈, 自适应, 控制, Routh-Hurwitz 定理

PACC: 0545

1. 引 言

自从 1963 年 Lorenz 发现混沌吸引子以来, 人们已逐渐认识到在自然界和人类社会中广泛存在混沌. 混沌控制已有许多方法^[5-9, 11-14]. 1999 年, 陈关荣发现了一个新的混沌吸引子^[11], 它类似 Lorenz 系统但与其不拓扑等价, 而且比 Lorenz 系统更复杂^[1, 2]. 根据 Vaněček 和 Čelikovský 的定义^[3], 这两个系统分属于两个不同的类型: Lorenz 系统满足 $a_{12} a_{21} > 0$; Chen 系统满足 $a_{12} a_{21} < 0$. 最近, 吕金虎、陈关荣等又提出一个新的混沌系统——统一系统^[4], 这个系统连接了 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子, 统一混沌系统的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)xy - x, \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z, \end{cases} \quad (1)$$

其中参数 $\alpha \in [0, 1]$. 这是一族混沌系统, 对于 $\alpha \in [0, 1]$ 系统均为混沌态. 系统 (1) 有三个平衡点 $S_0(0, 0, 0)$, $S_+(\sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, \sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, 27 - 6\alpha)$, $S_-(-\sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, -\sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, 27 - 6\alpha)$. 其中 S_0 为鞍点, S_+ 和 S_- 为不稳定焦点. 本文建立了统一混沌系统的自反馈控制、错位反馈控制和自适应控制方法, 理论上给予严格的证明, 找到了控制参数 k 与系统参数 α 的关系, 与有关文献比较使控制参数 k 更小. 数值仿真表明这些方法都是很有有效的. 本文对文献 [10] 中的不足进行了澄清和改进, 提出的错位反馈控制的机理尚待进一步研究.

2. 对文献 [10] 的更正

文献 [10] 利用 Lyapunov 函数 V 来推导反馈增益 k 应满足的条件, 但对 V 求导时, 所得矩阵 $P(k)$ 对正定的描述有误, 应作如下正确推导.

构造 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= xx + yy + zz \\ &= -ax^2 - (k - c)y^2 - bz^2 + cxy \\ &= -(x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & -\frac{c}{2} & 0 \\ -\frac{c}{2} & k - c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= -X^T P(k) X. \end{aligned}$$

根据线性代数理论, 要使 $\frac{dV}{dt} < 0$, 只需矩阵 $P(k)$ 的顺序主子式均为正. 所以 $a(k - c) - \frac{c^2}{4} > 0$, 即 $k > c + \frac{c^2}{4a}$. 此时, 状态 X 将一致渐近趋于 $S_0(0, 0, 0)$. 对 Chen 系统, 取参数 $a = 35, b = 3, c = 28$ 时, $k > 33.6$.

对于系统参数未知的情况, 可作类似处理.

3. 反馈控制

3.1. 自反馈控制

定理 1 设受控统一混沌系统为

[†]E-mail: jalu@wuhee.edu.cn

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y - ky, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z. \end{cases} \quad (2)$$

当 $k > 27 - 6\alpha$ 时,系统(2)渐近收敛到 $S_0(0, 0, 0)$.

证明 受控系统(2)线性化方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = -(25\alpha + 10)x + (25\alpha + 10)y, \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x + (29\alpha - 1 - k)y, \\ \dot{z} = -\frac{8 + \alpha}{3}z, \end{cases}$$

其 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(25\alpha + 10) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 - k & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8 + \alpha}{3} \end{bmatrix},$$

对应的特征方程 $\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0$ 的系数分别为

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{41 - 11\alpha}{3} + k, \\ c_2 &= (25\alpha + 10)(27 - 6\alpha - k) \\ &\quad + \frac{8 + \alpha}{3}(11 - 4\alpha + k), \\ c_3 &= -\frac{8 + \alpha}{3}(25\alpha + 10)(27 - 6\alpha - k), \end{aligned}$$

故当 $k > 27 - 6\alpha$ 时, $c_1 > 0, c_3 > 0, c_1c_2 - c_3 > 0$. 根据 Routh-Hurwitz 定理, 当 $k > 27 - 6\alpha$ 时, 控制系统(2)的解渐近稳定趋于 $S_0(0, 0, 0)$. 证毕.

对 Chen 系统($\alpha = 1$)情形, 只需满足 $k > 21$, 与用 Lyapunov 函数正定性导出的控制条件 $k > 33.6$ 相比较, 有了很大改进.

3.2. 错位反馈控制

将第一个变量 x 反馈控制到第二个方程右边, 或者将第二个变量 y 反馈控制到第一个方程的右边, 从而有效地将混沌系统控制到非稳定平衡点, 我们称这种方法为错位控制方法. 类似定理 1 的证明, 可以得到:

定理 2 设受控统一混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y - kx, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z. \end{cases} \quad (3)$$

当 $k > 27 - 6\alpha$ 时, 系统(3)渐近收敛到 $S_0(0, 0, 0)$.

定理 3 考虑受控统一混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y \\ \quad - k(x - \sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}), \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z. \end{cases} \quad (4)$$

当 $k > \frac{(8 + \alpha)(1165\alpha^2 + 5313\alpha + 32)}{(11 - 4\alpha)(25\alpha + 10)}$ 时, 系统(4)渐近收敛到 $S_+(\sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, \sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, 27 - 6\alpha)$ 如图 1.

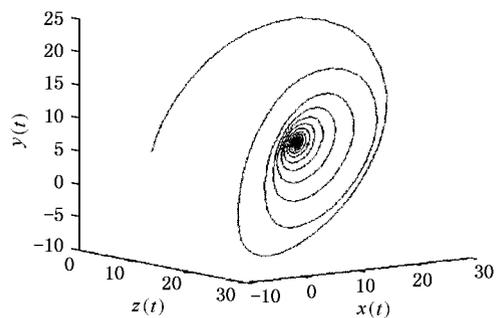


图 1 $\alpha = 1$ 时系统(4)错位反馈控制到 S_+

4. 自适应控制

引理(Barbalat 引理)^[5]: 如果 $f(t) \in L_2 \cap L_\infty$, 且 $f(t) \in L_\infty$, 则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

定理 4 设受控统一混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y - \hat{k}y, \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z, \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\dot{\hat{k}} = \beta y^2, \alpha \in [0, 1], \beta > 0$. 则系统(5)渐近稳定趋于 $S_0(0, 0, 0)$.

证明 构造如下 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2\beta}(\hat{k} - k^*)^2,$$

其中

$$k^* = \frac{750\alpha^2 + 751\alpha + 361}{25\alpha + 9},$$

对 V 求导得

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} + (\hat{k} - k^*)\dot{\hat{k}}$$

$$= -\frac{1}{25\alpha + 9} [(25\alpha + 9)x - (19 - 5\alpha)y]^2 - x^2 - y^2 - \frac{8 + \alpha}{3} z^2 \leq -x^2 - y^2 - \frac{8 + \alpha}{3} z^2 \leq 0,$$

故 \dot{V} 负定. 所以 $x, y, z, \hat{k} - k^* \in L_\infty$, 由 $\dot{V} = -x^2 - y^2 - \frac{8 + \alpha}{3} z^2 \leq -(x^2 + y^2 + z^2)$ 得

$$\int_0^t (x^2 + y^2 + z^2) dt \leq V(0) - V(t) \leq V(0).$$

所以 $x, y, z \in L_2$. 又由受控系统(5)可知 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} \in L_\infty$, 所以由引理可知系统(5)一致渐近趋于 $S_0(0, 0, 0)$.

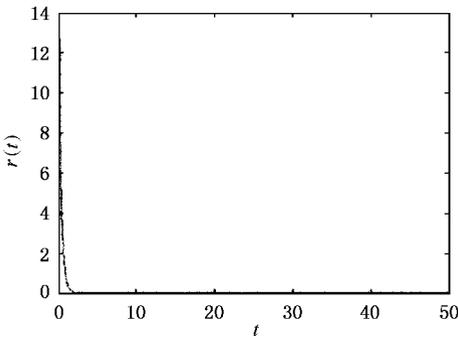


图2 $\alpha = 0.8$ 时自适应控制到 S_0 的误差图 (其中取 $\beta = 5$)

0), 如图 2.

类似定理 4 的证明, 可以得到:

定理 5 考虑受控统一混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y - k(x - \sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}), \\ \dot{z} = xy - \frac{8 + \alpha}{3}z, \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\dot{k} = \gamma(y - \sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)})^2, \gamma > 0$, 则受控系统(6)渐近稳定趋于 $S_+(\sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, \sqrt{(8 + \alpha)(9 - 2\alpha)}, 27 - 6\alpha)$, 如图 3.

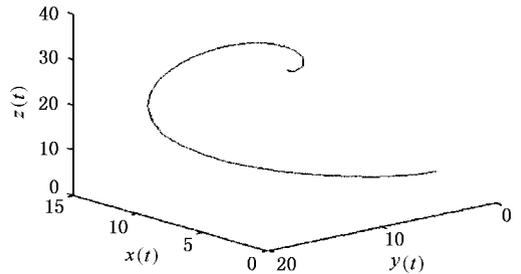


图3 $\alpha = 0$ 时自适应反馈控制到 $S_+(\gamma = 2)$

[1] Chen G and Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465

[2] Lu J A, Lü J H and Chen S H 2002 *Control Theory and Applications* **19** 308 [in Chinese] 陆君安、吕金虎、陈士华 2002 控制理论与应用 **19** 308]

[3] Van ěček & Āelikovsk ŷ 1996 *Control Systems :From Linear Analysis to Synthesis of Chaos* (London :Pretice-Hall)

[4] Lü J H ,Chen G and Zhang S 2002 *Int. J. of Bifurcation and Chaos* . **12**(12)

[5] Hubler A 1989 *Helv. Phys. Acta* **62** 343

[6] Ott E ,Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196

[7] Hu G ,Xiao J H Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai :Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) [in Chinese] 胡 刚、萧建华、郑志刚 2000 混沌控制(上海 :上海科技教育出版社)]

[8] Wang G R ,Yu X L and Chen S G 2001 *Chaos Control ,Synchronization and Its Application* (National Defense Industry Publishing House) [in Chinese] 王光瑞、于晓岭、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(国防工业出版社)]

[9] Lü J H ,Lu J A and Chen S H 2002 *Chaos Time Series Analysis and Its Application*(Wuhan University Publishing House) [in Chinese] [吕金虎、陆君安、陈士华 2002 混沌时间序列分析及其应用 (武汉大学出版社)]

[10] Guan X P ,Fan Z P ,Peng H P and Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 [in Chinese] 关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 2108]

[11] Tao C H ,Lu J A and Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 [in Chinese] 陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]

[12] Lu J A ,Tao C H ,Lü J H and Liu M 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 632

[13] Chen S H ,Xie J ,Lu J A and Liu J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 [in Chinese] 陈士华、谢 进、陆君安、刘 杰 2002 物理学报 **51** 749]

[14] Tang G N ,Luo X S and Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30 [in Chinese] 唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 30]

[15] Gopalsamy K 1992 *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics* , Kluwer Academic Publishers , Dordrecht

Control of a unified chaotic system

Tao Chao-Hai Lu Jun-An

(*School of Mathematics and Statistics ,Wuhan University , Wuhan 430072 ,China*)

(Received 19 March 2002 ; revised manuscript received 4 July 2002)

Abstract

The paper addressed the self-feedback control ,dislocation feedback control and adaptive control strategies for a unified chaotic system. The strict theoretical proof was put forward ,numerical simulations were provided to show the effectiveness of these methods. The deficiency of Ref.[10] was also corrected.

Keywords : unified chaotic system , feedback , adaptive control , Routh-Hurwitz theorem

PACC : 0545