第 52 卷 第 2 期 2003 年 2 月
1000-3290/2003/52(02)/0383-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.2,February,2003

任意坐标系下非圆正规光波导的一般解及应用*

吴重庆[1)] 董 晖[2)] 傅松年[2)] 刘海涛[1)]

[1)](北方交通大学理学院,北京 100044)

[2)](北方交通大学电信学院,北京 100044)

(2001 年 7 月 6 日收到;2002 年 6 月 26 日收到修改稿)

给出了任意坐标系下非圆正规光纤随传输距离 z 指数变化的一般解,它具有 $\exp\{(\bar{\beta}+\Delta\beta V)z\}E_0(x,y)$ 的形式,而 V 是由主轴偏角 θ 惟一确定的矩阵,称为主轴矩阵.还给出了相应的亥姆霍兹方程,并应用于研究有微小变形的二层弱导非圆光纤,和解释光纤纵向不均匀性对双折射的抑制效应.

关键词:非圆正规光纤,偏振主轴,偏振模色散(PMD)

PACC:4280M,4280L

1. 引 言

在折射率沿纵向均匀分布的正规波导中,除了圆光纤和平面(包括矩形)光波导而外,其余光波导基本上都属于非圆光波导的范畴,比如椭圆光纤、熊猫光纤、领结光纤及 D 形光纤等.因此,非圆光纤是一大类有广泛应用价值的光纤.实际的圆光纤,由于制造工艺和使用的原因(比如侧应力),也不能获得理想的正圆的折射率分布,因此,研究非圆光纤有重要的学术意义.

同时,光纤的偏振模色散被认为是光纤的传输速率的最终限制因素,而偏振模色散正是由于光纤的非圆性而导致的双折射现象所引起的.近两年来,关于偏振模色散的理论和补偿技术成为光纤通信的热点问题,学术论文呈爆炸式增长.这表明研究非圆光纤的双折射具有极重要的实际意义.

关于非圆光纤的双折射问题,前人已经积累了丰富的研究成果,理论上也臻于完善.但是,这些研究成果都是建立在两个独立的线偏振模的基础上的.由于非圆光纤的折射率分布 $n^2(x,y)$ 不具有圆对称性,所以它的具体函数形式是随坐标系的选取而变化的,即对坐标系的选取敏感.同时,不是任何两个相互垂直的线偏振光都可以看作模式而写成 $e(x,y)\exp(\mathrm{i}\beta z)$ 的形式,只有那些平行于光纤的对称轴(比如椭圆光纤的长轴或短轴)的线偏振光,才可写成上述的形式.而对于一个任意折射率分布的非圆光纤,要么很难找出这个对称轴,要么根本就不存在这个对称轴.这就为我们利用线偏振模的概念去处理实际问题埋下了一个隐含的障碍.此外,在实际问题中,这个线偏振模的方向(被称为主轴)有可能随机变化.因此,以线偏振模的方向作为坐标系的坐标轴的分析方法也是不可取的.总之,我们需要一个新的、便于在任意坐标系下使用的概念和理论,并由此引出与它相关的其他概念(比如偏振模色散)的对应关系.这就是本文的任务.

2. 理 论

2.1. 非圆光波导的一般解

前已证明[1],无论是正规的还是非正规的光波导,只要其损耗可以忽略,就必然存在一对正交的偏振主轴.具体含义是,在光波导的输入端与输出端分别存在一对正交的偏振方向,在这个方向上,当输入光是线偏振态时,输出光也是线偏振态.我们称这对

* 北京自然科学基金(批准号:4002009)资助的课题.

正交方向为偏振主轴(注意偏振主轴不一定要求光波导具有对称轴). 同时,大家也知道[2],对于正规光波导,无论其折射率分布如何,总存在一对正交的线偏振模. 因此,线偏振模的方向必然与主轴方向一致,但不一定与坐标系的坐标轴一致,于是有

$$\begin{cases} E_\xi(x,y,z) = \exp\{\beta_\xi z\} e_\xi(x,y), \\ E_\eta(x,y,z) = \exp\{\beta_\eta z\} e_\eta(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

它们的方向分别为 $o\xi$ 与 $o\eta$,记为 LP_μ^ξ 与 LP_μ^η,μ 是模式的阶数,比如 LP_{01}^ξ 与 LP_{01}^η 等.

一般而言,光波导中的光场应表现为各阶模式的线性组合

$$E(x,y,z) = \sum_\mu \{c_{\xi\mu}\exp(\mathrm{i}\beta_{\xi\mu}z)e_{\xi\mu}(x,y) + c_{\eta\mu}\exp(\mathrm{i}\beta_{\eta\mu}z)e_{\eta\mu}(x,y)\}, \tag{2}$$

当光波导为正规光波导时,$c_{\xi\mu}$,$c_{\eta\mu}$,$\beta_{\xi\mu}$,$\beta_{\eta\mu}$ 均为常数.

这里,仅考虑单模光波导(忽略空间过渡态),从而略去下标 μ,于是有

$$E(x,y,z) = c_\xi\exp(\mathrm{i}\beta_\xi z)e_\xi(x,y) + c_\eta\exp(\mathrm{i}\beta_\eta z)e_\eta(x,y)\}. \tag{3}$$

由于 LP^ξ 模与 LP^η 模是一对正交的线偏振模,于是 $e_\xi\cdot e_\eta = 0$,由此可得出二者应取如下形式:

$$e_\xi(x,y) = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} e_\xi(x,y)$$

和

$$e_\eta(x,y) = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} e_\eta(x,y), \tag{4}$$

其中 θ 是一个主轴 $o\xi$ 与坐标轴 ox 的夹角.

于是

$$E(x,y,z) = c_\xi\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_\xi z}e_\xi(x,y) + c_\eta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_\eta z}e_\eta(x,y), \tag{5}$$

同时

$$E_0(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} E(x,y,0) = c_\xi\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}e_\xi(x,y) + c_\eta\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}e_\eta(x,y). \tag{6}$$

前已证明[3,4],联系无损光波导的输入与输出光的关系可描述为

$$E(x,y,z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar\beta z}UE(x,y,0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar\beta z}\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ -u_2^* & u_1^*\end{pmatrix}E_0(x,y). \tag{7}$$

将方程(5)与(6)联立转化为方程(7),令 $\bar\beta = (\beta_\xi + \beta_\eta)/2$,和 $\Delta\beta = (\beta_\xi - \beta_\eta)/2$,经过复杂的运算后得出

$$U = \begin{bmatrix}\cos^2\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z} + \sin^2\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z} & 2\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta\sin\Delta\beta z\\ 2\mathrm{i}\sin\theta\cos\theta\sin\Delta\beta z & \sin^2\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z} + cos^2\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}\end{bmatrix}. \tag{8}$$

进一步,可将矩阵 U 分解为

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\beta z} & \\ & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\beta z}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ &= \exp\left\{\mathrm{i}\Delta\beta z\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

或

$$U = \exp\{\Delta\beta Vz\}, \tag{9}$$

V 称为主轴矩阵,它为

$$V = \begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}, \tag{10}$$

于是

$$E(x,y,z) = \exp(\mathrm{i}(\bar\beta + \Delta\beta V)z)E_0(x,y). \tag{11}$$

这就是任意坐标系下非圆正规光波导的一般解. (注:一个矩阵与一个数相加或相等,理解为这个数乘以单位矩阵再相加或相等,例如 $x + V = xI + V$,其中 I 为单位矩阵.) 可以看出,坐标系的变化主要引起主轴矩阵 $V(\theta)$ 变化,而不会引起平均传输常数 $\bar\beta$ 和双折射 $\Delta\beta$ 变化.

2.2. 亥姆霍兹方程

将形如(11)式的一般解代入光波导的一般方程

$$\nabla^2E + k^2n^2(x,y)E + \nabla\left(E\cdot\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\right) = 0, \tag{12}$$

其中 $\varepsilon = n^2(x,y)$,k 为真空中的波数,并令$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$,$\nabla = \nabla_t + \hat z\frac{\partial}{\partial z}$,然后两边乘以 $\exp\{(\bar\beta + \Delta\beta V)z\}$ 的逆矩阵,再取横向分量与纵向分量各自相等,注意到 $V^2 = 1$,得

$$\nabla_t^2E_0(x,y) + \{k^2n^2(x,y) - [\bar\beta^2 + (\Delta\beta)^2] - 2\bar\beta\Delta\beta V\}E_0 = -\nabla_t\left(E_0\cdot\frac{\nabla_t\varepsilon}{\varepsilon}\right). \tag{13}$$

3. 在二层非圆光纤中的应用

理想的通信光纤,应该是正圆光纤. 由于实际生

产和使用过程中会引入一些非圆性,从而成为非圆光纤.但这种光纤的非圆性是比较小的.而二层非圆光纤又是一种广泛使用的非圆光纤,它的折射率分布可表示为

$$n^2(x,y)=\begin{cases}n_1^2 & (x,y)\in\Omega,\\ n_2^2 & (x,y)\in\bar{\Omega},\end{cases}\tag{14}$$

Ω 是由闭合非圆曲线 c 所围成的平面域,目前使用的光纤通常都是弱导光纤,也就是说,芯层与包层的折射率相差不大.

为解二层非圆光纤对应的方程(13),一般应先求出本征函数 $E_0(x,y)$,但这是很困难的.而对于实际问题,$\bar{\beta}$,$\Delta\beta$,$V(\theta)$三个量是最重要的,因此本文将绕过求本征函数 $E_0(x,y)$,而直接去求 $\bar{\beta}$,$\Delta\beta$ 与 $V(\theta)$.

3.1. $\bar{\beta}$ 的得出

我们注意到,$\bar{\beta}=(\beta_x+\beta_y)/2$ 是两个线偏振模传输常数的平均值,它既与坐标系的选取无关,也与双折射无关,显然,只有圆光纤才具有这样的性质.另一方面,$\bar{\beta}$ 应是使方程(13)中令 $\Delta\beta\to 0$ 的一种折射率分布 $n_0^2(r)$ 的解.除了在闭合曲线 c 上以外的各点,方程(13)化为

$$\nabla_t^2E_0(x,y)+\{k^2n^2(x,y)-[\bar{\beta}^2+(\Delta\beta)^2]-2\bar{\beta}\Delta\beta V\}E_0=0,\tag{15}$$

对应的使 $\Delta\beta\to 0$ 的圆波导满足的方程为

$$\nabla_t^2e_0(x,y)+\{k^2n_0^2(r)-\bar{\beta}^2\}e_0(x,y)=0,\tag{16}$$

其中 $e_0(x,y)$是对应的圆光纤的模式场.

将(15)式点乘 e_0^* 并与(16)式点乘 E_0 的标量积相减,并在无穷模截面上积分,考虑到

$$\iint_\infty(e_0^*\cdot\nabla_t^2E_0-E_0\cdot\nabla_t^2e_0)\mathrm{d}A$$
$$=\oint_\infty\{e_0^*(\nabla_tE_0-E_0(\nabla_t\cdot e_0^*)\}\mathrm{d}A=0,$$

再令 $\Delta\beta\to 0$,于是有

$$\iint_\infty(n^2-n_0^2)E_0\cdot e_0^*\,\mathrm{d}A=0.\tag{17}$$

这表明,只要所对应的圆光纤的 $n_0^2(r)$满足(17)式,则它的传输常数就是非圆光纤的 $\bar{\beta}$.由于非圆性较小,可以认为在由方程(17)中 $n^2-n_0^2$ 不为零的部分,E_0 与 e_0 相差很小.不难看出,只要圆光波导的折射率剖面面积与非圆的相等,则(17)式就近似成立.于是,我们可先求出非圆光波导的折射率剖面面积,再令一个圆光波导的面积与之相同,可求出 $\bar{\beta}$.

3.2. 偏振主轴的确定

对于折射率分布如(14)式所示的二层非圆光纤,它的主轴偏角 θ 完全由周线上的$\nabla_t(E_0\cdot\nabla_t\varepsilon/\varepsilon)$所引起,为此,考虑一个椭圆光纤,设它的 $\bar{\beta}$ 和 $\Delta\beta$ 与所研究的非圆光纤的 $\bar{\beta}$ 与 $\Delta\beta$ 相同,但它的长轴与短轴分别与 ox 与 oy 轴重合,即 $\theta=0$,于是,它满足方程

$$\nabla_t^2e_e(x,y)+\{k^2n_e^2(x,y)-(\bar{\beta}^2+\Delta\beta^2)-2\bar{\beta}\Delta\beta\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}e_e(x,y)\}$$
$$=-\nabla_t\left(e_e\cdot\frac{\nabla_t\varepsilon_e}{\varepsilon_e}\right),\tag{18}$$

其中 $\varepsilon_e=n_e^2(x,y)$是椭圆光纤的折射率分布,$e_e(x,y)$是它的模式场,但只有两个方向

$$e_{ex}(x,y)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e_x(x,y)$$

和

$$e_{ey}(x,y)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e_y(x,y).\tag{19}$$

将 e_e^* 乘(13)式减 E_0 乘(18)式并在无穷截面上积分有

$$\iint_\infty[e_0^*\cdot(\nabla_t^2E_0)-E_0\cdot(\nabla_t^2e_e^*)]\mathrm{d}A$$
$$+k\iint_\infty(n^2-n_e^2)e_e^*\cdot E_0\mathrm{d}A$$
$$-2\bar{\beta}\Delta\beta\iint_\infty[e_e^*\cdot VE_0-E_0\cdot\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}e_e^*]\mathrm{d}A$$
$$=-\iint_\infty\Big[e_e^*\cdot\nabla_t\left(E_0\cdot\frac{\nabla_t\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$
$$-E_0\cdot\nabla_t\left(e_e^*\cdot\frac{\nabla_t\varepsilon_e}{\varepsilon_e}\right)\Big]\mathrm{d}A,\tag{20}$$

其中 $\beta^2+\Delta\beta^2$ 项已经抵消,注意到上式左边的第一项为零,而第二项为

$$k^2\iint_\infty(n^2-n_e^2)e_e^*\cdot E_0\mathrm{d}A$$
$$=k^2\iint_\infty(n^2-n_0^2)e_e^*\cdot E_0\mathrm{d}A$$
$$-k^2\iint_\infty(n_e^2-n_0^2)e_e^*\cdot E_0\mathrm{d}A.\tag{21}$$

由前面求解 $\bar{\beta}$ 的等容原理知,在 $n^2-n_0^2$ 和 $n_e^2-n_0^2$ 不为零的区域内,e_e,E_0,e_0 相差甚小,故根据(17)式,近似认为上式为零.

(20)式的右边,利用等式$\nabla\cdot(\Psi A)=A\Delta\Psi+\Psi\Delta A$ 可得

$$\iint_{\infty}\Big[e_e^* \cdot \nabla_t\left(E_0 \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon}{\varepsilon}\right) - E_0 \cdot \nabla_t\left(e_e^* \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon_e}{\varepsilon_e}\right)\Big]\mathrm{d}A$$

$$= \iint_{\infty}\Big\{\nabla_t \cdot \left[e_e^*\left(E_0 \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon}{\varepsilon}\right)\right] - \nabla_t \cdot \left[E_e\left(e_0^* \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon}{\varepsilon}\right)\right]\Big\}\mathrm{d}A$$

$$- \iint_{\infty}\Big[\left(E_0 \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon}{\varepsilon}\right)(\nabla_t \cdot e_e^*) - \left(e_0^* \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon_e}{\varepsilon_e}\right)(\nabla_t \cdot E_0)\Big]\mathrm{d}A, \tag{22}$$

右边的第一项,由

$$\iint_{\infty} \nabla_t \cdot M\mathrm{d}A = \oint_{\infty} M \cdot dl = 0,$$

于是有

$$-2\bar{\beta}\Delta\beta\iint_{\infty}\left[e_e^* \cdot VE_0 - E_0\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}e_e^*\right]\mathrm{d}A$$

$$= \iint_{\infty}\Big[\left(E_0 \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon}{\varepsilon}\right)(\nabla_t \cdot e_e^*) - \left(e_e^* \cdot \frac{\nabla_t \varepsilon_e}{\varepsilon_e}\right)(\nabla_t \cdot E_0)\Big]\mathrm{d}A. \tag{23}$$

(23)式是联系 $\Delta\beta$,V 与模式场的一个重要关系式.

在(23)式中,考虑

$$E_0 = e_\xi = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}e_\xi(x,y),$$

$$e_e = \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}e_x(x,y),$$

并令

$$\begin{cases}\varepsilon = n^2(x,y) = n_2^2(1+\Delta f(x,y)), \\ \varepsilon_e = n_e^2(x,y) = n_2^2(1+\Delta f_e(x,y)),\end{cases} \tag{24}$$

于是

$$\frac{\nabla_t \varepsilon}{\varepsilon} = \nabla_t(\ln\varepsilon) \approx \Delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}\right)$$

和

$$\frac{\nabla_t \varepsilon_e}{\varepsilon_e} = \nabla_t(\ln\varepsilon_e) \approx \Delta\left(\frac{\partial f_e}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f_e}{\partial y}\hat{y}\right), \tag{25}$$

可知,(23)式的左边在此时为零,有

$$a\cos\theta + b\sin\theta = 0, \tag{26}$$

其中

$$a = \iint_{\infty}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial e_x^*}{\partial x}\right)e_\xi - \left(\frac{\partial f_e}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial e_\xi}{\partial x}\right)e_x^*\right]\mathrm{d}A,$$

$$b = \iint_{\infty}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial e_x^*}{\partial x}\right)e_\xi - \left(\frac{\partial f_e}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial e_\xi}{\partial y}\right)e_x^*\right]\mathrm{d}A. \tag{27}$$

这样,θ 就惟一地被 a_x 所确定.

3.3. $\Delta\beta$ 的确定

在(23)式中,考虑

$$E_0 = e_\eta(x,y) = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}e_\eta(x,y)$$

和

$$e_e^* = \hat{x}e_x(x,y)$$

可得

$$4\bar{\beta}\Delta\beta\sin\theta\iint_{\infty}e_x^* e_\eta\mathrm{d}A = \Delta(c\cos\theta - d\sin\theta), \tag{28}$$

其中

$$c = \iint_{\infty}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial e_x^*}{\partial x}\right)e_\eta - \left(\frac{\partial f_e}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial e_\eta}{\partial y}\right)e_x^*\right]\mathrm{d}A,$$

$$d = \iint_{\infty}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial e_x^*}{\partial x}\right)e_\eta - \left(\frac{\partial f_e}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial e_\eta}{\partial x}\right)e_x^*\right]\mathrm{d}A. \tag{29}$$

由此,只要知道了 e_η,f_e,f,e_x 便可求出 $\Delta\beta$.但是,上述公式均是在假定椭圆光纤与所研究的非圆光纤的 β,$\Delta\beta$ 一致的前提下得到的.因此,只能借助于微扰理论、经过反复迭代得到最终的结果,具体步骤如下:

1)利用等容原理求出非圆光纤的折射率剖面的面积,从而可以确定 $\bar{\beta}$、圆波导的模式场 e_0,以及椭圆光纤长轴 a_x 与短轴 a_y 之积.

2)以 $e_0(x,y)$ 作为非圆光纤模式场 e_ξ 与 e_η 的零级近似,利用(26)—(29)式,分别求出一次近似的椭圆光纤的主轴角 θ_1 和 $\Delta\beta_1$,由于 $\Delta\beta = \Delta^2 e^2 f(V)$($e$ 是椭圆的偏心率,V 是归一化频率),可知在给定 V 值时,$\Delta\beta$ 与偏心率 e 一一对应,从而可求出这个椭圆光纤的模式场 $e_{\xi1}$ 和 $e_{\eta1}$(注意 $e_{\xi1}$ 与 $e_{\eta1}$ 是椭圆光纤主轴方向的模式场,不是 e_x 和 e_y).

3)以一次近似为椭圆光纤的主轴方向作为新坐标系的 ox' 和 oy' 的方向进行坐标变换.相应的,非圆光纤的折射率分布 $n^2(x,y)$ 也变换为 $n^2(x',y')$,$e_{\xi1}(x,y)$ 和 $e_{\eta1}(x,y)$ 也变化为 $e_{x'}$ 和 $e_{y'}$.

4)再利用(26)—(29)式,求出二次近似的椭圆光纤的主轴方向 θ_2 和 $\Delta\beta_2$ 及新的模式场 $e_{\xi2}$ 和 $e_{\eta2}$,…,依此类推,直到 $\theta_n \to 0$.上述工作已经成功应用于计算光纤的偏振模色散.

4. 光纤纵向不均匀性对双折射的抑制

光纤纵向不均匀的一个最简单情况是将一根光

纤断开,然后旋转一个角度后再融合.在分析时,认为光纤旋转时 $\bar{\beta}$ 和 $\Delta\beta$ 不变.对它的性能分析,可以用琼斯矩阵或密勒矩阵的联乘,运算相对复杂.采用本文的表达式(11)后,变得比较简便.设两段光纤在所给定的坐标系下,分别为

$$E_1(x,y,z_1) = \exp\{[\bar{\beta} + \Delta\beta V_1(\theta_1)]z_1\}E_0(x,y), \tag{30}$$

$$E_2(x,y,z_2) = \exp\{[\bar{\beta} + \Delta\beta V_2(\theta_2)]z_2\}E_1(x,y), \tag{31}$$

有

$$\begin{aligned} &E_2(x,y,z_1+z_2) \\ &= \exp[\mathrm{i}\bar{\beta}(z_1+z_2)]\exp[\mathrm{i}\Delta\beta V_2(\theta_2)z_2] \\ &\quad \times \exp[\mathrm{i}\Delta\beta V_1(\theta_1)z_1]E_0(x,y). \end{aligned} \tag{32}$$

将(32)式的乘积形式写成指数相加形式(见附录),得

$$\begin{aligned} &E_2(x,y,z_1+z_2) \\ &= E_0(x,y)\exp\{\bar{\beta}(z_1+z_2) \\ &\quad + \mathrm{i}\Delta\beta[V_2(\theta_2)z_2 + V_1(\theta_1)z_1 + \mathrm{i}tc_1 C \\ &\quad + 2\Delta\beta z_1 tc_2 D]\}, \end{aligned} \tag{33}$$

其中

$$c_1 = \{1 - \cos(2\Delta\beta z_1)\}/(4\Delta\beta^2 z_1^2),$$

$$c_2 = \{2\Delta\beta z_1 - \sin(2\Delta\beta z_1)\}/(8\Delta\beta^3 z_1^3),$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & \cos2\theta_1 \\ \cos2\theta_1 & \sin2\theta_1 \end{bmatrix}.$$

不难证明,它可改写为标准的一般解形式

$$\begin{aligned} &E_2(x,y,z_1+z_2) \\ &= \exp\{[\bar{\beta} + (\Delta\tilde{\beta})\tilde{V}](z_1+z_2)\} \\ &\quad \times E_0(x,y), \end{aligned} \tag{34}$$

其中 $\tilde{V}$ 是(10)式的标准形式的系数矩阵.联立(33)式、(34)式可有两边取模可解出

$$\Delta\tilde{\beta} = \frac{\| V_2(\theta_2)z_2 + V_1(\theta_1)z_1 + \mathrm{i}tc_1 C + 2\Delta\beta z_1 tc_2 D \|}{z_1 + z_2}\Delta\beta, \tag{35}$$

其中 $\| V \|$ 表示取模,不妨设 $\theta_i = 0$.从而有

$$\Delta\tilde{\beta} = \frac{\left\| \begin{matrix} z_1 + z_2\cos2\Delta\theta & z_2\sin2\Delta\theta + 2\Delta\beta z_1 tc_2 + \mathrm{i}tc_1 \\ z_2\sin2\Delta\theta + 2\Delta\beta z_1 tc_2 - \mathrm{i}tc_1 & -(z_1 + z_2\cos2\Delta\theta) \end{matrix} \right\|}{z_1 + z_2} \times \Delta\beta,$$

即

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\beta} &= (z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2\cos2\Delta\theta \\ &\quad + 4\Delta\beta^2 z_1^2 z_2^2(4\Delta\beta^2 z_1^2 c_2^2 - 2c_2 + c_1^2)\sin^2 2\Delta\theta)^{1/2} \\ &\quad \times (z_1 + z_2)^{-1}\Delta\beta, \end{aligned} \tag{36}$$

其中 $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ 为当两段光纤偏振主轴的夹角.

如果 $z_1 = z_2$,当 $\Delta\theta = 0$ 时,此时 $\Delta\tilde{\beta} = \Delta\beta$,没有双折射抑制作用.当 $\Delta\theta = \pi/2$,$\Delta\tilde{\beta} = 0$,双折射被完全抑制.这一结论可以推广到 $z_1 \neq z_2$ 的情形.当 $\Delta\theta = 0$ 时,没有双折射抑制作用,当 $\Delta\theta = \pi/2$ 时,双折射抑制作用最强,此时

$$\Delta\tilde{\beta} = \frac{|z_1 - z_2|}{z_1 + z_2}\Delta\beta. \tag{37}$$

为了消除光纤的偏振模色散,常采用在拉丝的过程中对光纤进行扭绞的方法,实际上是将光纤围绕纵轴连续旋转.这种光纤称为扭绞光纤.本文的方法可以用来分析扭绞光纤.限于篇幅,将另行文叙述.

5. 结　　论

本文首次给出了在任意坐标系下,非圆正规光波导的一般解,它随传输距离 z 的变化,可以写成指数(矩阵)的形式,并给出了基于这种形式的解的亥姆霍兹方程.这样,可以克服非圆光波导的模式必须假定坐标系与主轴重合的困难.作为一个应用,研究了有微小变形的二层弱导非圆光纤.对于求解主轴随 z 变化的光波导,可以将复杂的琼斯矩阵的连乘,化为指数的相加.这对于研究偏振模色散等热点问题,有重要的意义.

附录　(33)式推导

由于两段光纤的主轴矩阵不是对易矩阵,因此不能简单的将二者相加.已经证明,指数矩阵的乘法满足下述公式:

$$\begin{aligned} &\exp(A)\exp(B) \\ &= \exp\Big(A + B - \frac{[B,A]}{2!} + \cdots \\ &\quad + \frac{(-1)^n[B,[\cdots,[B,A]\cdots]]}{(n+1)!} + \cdots\Big), \end{aligned} \tag{A1}$$

式中

$$[B,A] = BA - AB.$$

令

$$A = \mathrm{i}\Delta\beta V_2(\theta_2)z_2, B = \mathrm{i}\Delta\beta V_1(\theta_1)z_1,$$

记

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1,$$

得

$$[B,A] = -2\Delta\beta^2 z_1 z_2 \sin 2\Delta\theta C = t\Delta\beta C,$$

$$t = -2\Delta\beta z_1 z_2 \sin 2\Delta\theta, \quad (\mathrm{A2})$$

$$[B,[B,A]] = 2\mathrm{i}\Delta\beta^2 z_1 tD, \quad (\mathrm{A3})$$

$$[B,[B,[B,A]]] = -4\Delta\beta^3 z_1^2 tC = -4\Delta\beta^2 z_1^2 [B,A], \quad (\mathrm{A4})$$

$$[B,[B,[B,[B,A]]]] = -4\Delta\beta^3 z_1^2 tD = -4\Delta\beta^2 z_1^2 [B,[B,A]]. \quad (\mathrm{A5})$$

由此可看出,各分量之间满足一定的关系,于是有

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B - c_1[B,A] + c_2[B,[B,A]]), \quad (\mathrm{A6})$$

式中

$$c_1 = \frac{1}{2!} + \frac{(-4\Delta\beta^2 z_1^2)}{4!} + \cdots + \frac{(\mathrm{i}2\Delta\beta z_1)^{2n-2}}{(2n)!} + \cdots \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$c_2 = \frac{1}{3!} + \frac{(-4\Delta\beta^2 z_1^2)}{5!} + \cdots + \frac{(\mathrm{i}2\Delta\beta z_1)^{2n-2}}{(2n+1)!} + \cdots \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

很容易证明,c_1,c_2 都是收敛的,而且

$$1 + x + x^2 c_1 + x^3 c_2 = e^x,$$

可得

$$1 - 4\Delta\beta^2 z_1^2 c_1 = \cos(2\Delta\beta z_1),$$

$$2\Delta\beta z_1 - 8\Delta\beta^3 z_1^3 c_2 = \sin(2\Delta\beta z_1).$$

即得

$$c_1 = \{1 - \cos(2\Delta\beta z_1)\}/(4\Delta\beta^2 z_1^2),$$

$$c_2 = \{2\Delta\beta z_1 - \sin(2\Delta\beta z_1)\}/(8\Delta\beta^3 z_1^3).$$

于是

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B - t\Delta\beta c_1 C + 2\mathrm{i}t\Delta\beta^2 z_1 c_2 D). \quad (\mathrm{A7})$$

[1] Wu C Q, Wang Z *et al* 1998 *Journal of China Railway Society* **20** (6) 55 (in Chinese)[吴重庆、王 智等 1998 铁道学报 **20** (6) 55]

[2] Wu C Q 2000 *The Optical Waveguide Theory* (Beijing:Tsinghua Press)(in Chinese)[吴重庆 2000 光波导理论(北京 清华大学出版社)]

[3] Pool C D, Wanger R E 1986 *Electron Letters*, **24** 1029

[4] Wu C Q, Fu S N, Dong H and Liu H T 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2542 (in Chinese)[吴重庆、傅松年、董 晖、刘海涛 2002 物理学报 **51** 2542]

The general solution of noncircular uniform optical waveguides in an arbitrary coordinate system and applications *

Wu Chong-Qing[1)] Dong Hui[2)] Fu Song-Nian[2)] Liu Hai-Tao[1)]

[1)] (*School of Science, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

[1)] (*School of Electronies and Information Engineering, Northern Jiaotong University, Beijing* 100044, *China*)

(Received 6 July 2001; revised manuscript received 26 June 2002)

Abstract

This paper presents the general solution of noncircular uniform waveguides in an arbitrary coordinate system. It can be expressed as exp $\{(\bar{\beta}+\Delta\beta V)z\}E_0(x, y)$, where V is a matrix depending uniquely on the angle θ between polarization principal axis (PPA) and coordinate axis. As a kind of application, we give the method to find $\bar{\beta}$, $\Delta\beta$ and $V(\theta)$ in the weak-guided fiber, whose distortion is smaller. It is easier to use it for analyzing the effect of birefringence decreasing due to the lognitudinal asymmetry in a fiber, compared with Jones matrix.

Keywords: noncircular uniform optical waveguide, polarization principal axis, polarization mode dispersion

PACC: 4280M, 4280L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 4002009).