

托卡马克极向场线圈的优化方法

查学军 朱思铮 虞清泉

(中国科学院等离子体物理研究所,合肥 1126 信箱 230031)

(2002 年 4 月 23 日收到 2002 年 6 月 8 日收到修改稿)

托卡马克等离子体的三角形变和拉长比对约束和磁流体稳定性有很强影响,因此在托卡马克装置极向场设计中,在基于物理和工程考虑所预先选定的等离子体平衡位形几何参数下,如何优化确定外部极向场线圈位置和电流,是一个具有重要实际意义的研究课题.为优化确定托卡马克极向场线圈,给出了一个有效的多变量平衡优化方法,能以事先规定的等离子体平衡位形的一些几何参数为目标函数,优化确定极向场线圈位置和电流,并应用它于 HT-7U 平衡位形计算,得到了所需的结果.

关键词:等离子体平衡,极向场线圈,优化

PACC:5255,5265

1. 引言

在非圆截面的托卡马克装置中,等离子体平衡位形参数,三角形变和拉长比对等离子体约束和磁流体稳定性有很大的影响^[1],大的三角形变和高的拉长比能使托卡马克的临界 β_c 大大提高,也是获得高约束等离子体的前提.理论和实验证明,对于 $n=0$ 垂直位移不稳定性,正的三角形变即 D 形截面,同椭圆和反 D 形截面的等离子体相比,其垂直位移不稳定性增长率是最小的.等离子体平衡位形参数还和偏滤器的结构设计紧密相关. X 点位置和偏滤器的深度(X 点到偏滤器外靶板的距离)有关,对于封闭偏滤器,增大偏滤器深度将有利于脱靶等离子体的形成^[2];同时等离子体分界面在偏滤器靶板上的轰击点位置,对靶板热负荷分布和杂质排除有很大影响^[2].但另一方面,等离子体位形参数受到物理和工程上的限制,垂直位移不稳定性限制了等离子体的拉长度,单个极向场线圈所能达到最大电流值也限制了三角形变,特别是对于具有低温超导的纵场磁体系统和极向场磁体系统的全超导托卡马克(未来建堆的首选装置),需要考虑到在工作状态下,如果超导线圈出现电流和磁场变化过大,或者其任一极向场线圈电流大于临界电流值,都会破坏超导磁体稳定性使超导磁体失超,导致托卡马克放电中止.该因素也严格限制了位形参数.因此在托卡马克装置极向场设计中,如何在满足物理和工程设计要

求的限制范围内,优化确定外部极向场线圈位置和电流,得到合适的等离子体位形参数,即限定关键的等离子体位形参数——等离子体大半径,小半径和偏滤器轰击点坐标,是一个具有重要实际意义的研究课题.针对这一问题本文发展了一个多变量的平衡优化程序 OPEQ.该程序对托卡马克极向场设计、以及偏滤器的结构设计有重要应用价值.

2. 托卡马克极向场线圈优化的方法描述

一般非线性优化问题的数学模型可表述为

$$\min f(x), x \in E^n,$$

满足约束条件

$$\begin{aligned} g_k(x) &\geq 0, k = 1, 2, \dots, m; \\ h_i(x) &= 0, i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (1)$$

(1) 式中, $x \in E^n$ 表示 x 为 N 维欧氏空间中的一个点(一个 N 维向量),这里指列向量,可表示为 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,其中 $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ 为向量 x 的分量. $f(x), g_k(x), h_i(x)$ 都是 x 的函数,即 n 元函数. $f(x)$ 是需极小化的目标函数, $g_k(x)$ 和 $h_i(x)$ 是满足约束条件的函数.托卡马克极向场线圈优化属于非线性优化问题,可把该问题的目标函数和约束条件表示为(1)式的形式.

通常可用两种不同的方法确定极向场线圈的位置和电流,一个是基于自由边界平衡方法,另一个是基于固定边界平衡方法.无论采用哪种方法确定外

部极向场线圈,都要求解托卡马克等离子体平衡方程——Grad-Shafranov 方程

$$\Delta^* \psi = -2\pi\mu R J_\varphi, \quad (2)$$

$$J_\varphi = 2\pi R \frac{dP(\psi)}{d\psi} + \frac{\mu}{4\pi R} \frac{dI^2(\psi)}{d\psi}, \quad (3)$$

其中 Δ^* 算符记为

$$\Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}.$$

该方程是关于磁通函数 ψ 的椭圆型偏微分方程,角向磁通 ψ 的定义为 $\psi(R, Z) = \int_0^R B_z d(\pi R^2) = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, S 是平行于赤道面,高为 Z 而半径为 R 的圆面.这里 μ 取真空磁导率, ψ 与角向磁场 B_φ 的关系为 $B_\varphi = \frac{1}{2\pi} \nabla \psi \times \nabla \varphi$. 其中 $I(\psi)$ 是角向电流函数, $P(\psi)$ 是等离子体压强,它们都是角向磁通 ψ 的函数.在两种平衡解法中,都需要给定符合实际情况的等离子体电流剖面(或安全因子 q)分布,即 $I(\psi)$ 和 $P(\psi)$ 的具体形式.

采用自由边界平衡确定极向场线圈,需要初始给定一组试探的极向场线圈的位置和电流,求解平衡方程得到相应的等离子体位形参数,把它们同事先给定的等离子体平衡位形参数作比较,通过一定的优化算法反复调整线圈的位置和电流,求关于位形参数的目标函数的极小值,直到满足一定的收敛条件,以此来确定外部线圈. Strickler 等^[3,4]和 Kessel 等^[5]均采用了自由边界平衡的方法优化确定极向场线圈.

采用固定边界平衡确定极向场线圈,不需要首先给定外部极向场线圈位置和电流,但等离子体边界必须给定.其边界可由下式给定:

$$\begin{aligned} R &= R_0 + a \cos(\theta + \delta \sin\theta), \\ Z &= \kappa \sin\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 R_0 是等离子体大半径, a 是小半径, δ 是三角形变, κ 是拉长比.在等离子体区求解平衡方程,导出等离子体区的内部解,该磁通解能被认为由等离子体电流和虚拟的等离子体边界上的导体壳电流产生.如果用外部线圈的电流保持等离子体平衡,则这些线圈电流和虚壳电流将产生相同的磁场,同时要对外部线圈的位置和电流施加限制,求关于外磁场的目标函数的极小值,可确定外部极向场^[6].文献[7]采用的撒网法就是采取类似上述方法来确定外部线圈的.

从上面的方法描述可看到,求解自由边界平衡,

虽然其解是适定的,但改变外部线圈时,会得到不同的解,求解固定边界平衡,其外部线圈解是不适定的.因此不论用哪种方法确定外部极向场线圈,都需要在多个解中根据物理和工程设计限制条件,确定一组合适的极向场线圈,这正是需要用优化算法来解决的问题.本文采用的是满足目标函数的多变量自由边界平衡优化方法.使用的优化算法是一个无约束最优化的直接方法——改进的 POWELL 方法^[8]. POWELL 方法是一种有效的直接搜索方法,直接法的好处是不需要计算目标函数的导数,迭代比较简单.由于托卡马克平衡方程必须数值求解,不能给出目标函数和优化变量的表达式,故只有采用直接法.本文中的目标函数是等离子体 X 点的位置和内外半径点的位置的变化量,优化变量是基于物理和工程考虑的在一定的范围内变化的极向场线圈位置和电流,通过 POWELL 优化算法程序反复调用自由边界等离子体平衡程序 EQ^[9],对极向场线圈位置和电流进行优化计算,使目标函数值最小.针对这一问题本文发展了一个自由边界平衡优化程序 OPEQ—— N 维极值的直接法的优化计算托卡马克平衡方程的程序.该优化方法同文献[7]中使用的多次撒网的设计方法相比,由于前者使用了 POWELL 优化算法,优化变量可连续变化,并自动调整步长,减少了计算的盲目性,而且可同时对更多的变量进行优化,因此该优化方法具有更多的优越性.

2.1. 优化程序 OPEQ 程序的目标函数的选取

对于关于赤道面上下对称的磁偏滤等离子体平衡位形,当等离子体的电流、压力剖面分布确定后,固定 X 点或偏滤器靶板撞击点的位置和等离子体的内外半径点的位置,等离子体形就基本被确定^[3,4].如图 1 所示,图中, R 是大半径, a 是小半径,分离面上的 X -point(X 点),是极向磁场为零的点.在 OPEQ 程序中,目标函数取为

$$\begin{aligned} f &= w_1 \left| \frac{R_{x0} - R_x}{R_{x0}} \right| + w_2 \left| \frac{Z_{x0} - Z_x}{Z_{x0}} \right| \\ &+ w_3 \left| \frac{R_{10} - R_1}{R_{10}} \right| + w_4 \left| \frac{R_{20} - R_2}{R_{20}} \right|, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $R_{x0}, Z_{x0}, R_{10}, R_{20}$ 是事先所给定的等离子体位形的 X 点、内外半径点的坐标; R_x, Z_x, R_1, R_2 是优化平衡程序 OPEQ 计算过程中所得到的等离子体平衡位形的 X 点、内、外半径点的坐标. w_1, w_2, w_3, w_4 分别对应目标函数里的各个量的权重因子.权重因

子的取值很重要,因为它涉及到对目标函数中各分量的均衡.此外,在目标函数里,还可加入极向场线圈储能和价值花费等来自工程的限制.

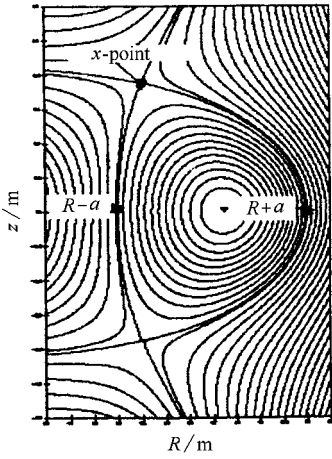


图1 X点和等离子体的内外半径点的位置可基本确定等离子体位形

2.2. 优化程序 OPEQ 程序中的优化变量的约束条件的实现

等离子体的平衡优化问题实质上是有约束条件的非线性优化问题,当把无约束最优化的计算方法推广到有约束条件的问题时,会碰到很多困难.特别是对于非线性约束,困难更大.但是,如果问题中只有一些很简单的约束,可以把问题经过适当变换后,变成无约束问题,这样就能使用无约束最优化的许多有效算法.在本文中的优化问题中,显然不能给出目标函数与优化变量的直接关系(函数表达式),因此只能通过变量代换变约束问题为无约束问题.对于简单的变量约束条件,如变量满足 $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, m$.可作如下的变换:

$$x_i = a'_i + (b_i - a'_i) \cdot \frac{2}{\pi} \arctan(gx'_i),$$

其中 $a'_i = \frac{a_i + b_i}{2}$.

当 $x'_i = -\infty$ 时,

$$\arctan gx'_i = -\frac{\pi}{2}, \text{ 则 } x_i = a_i;$$

当 $x'_i = +\infty$ 时,

$$\arctan gx'_i = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } x_i = b_i.$$

经过变量变换后变量仍满足约束条件,即把有约束条件的变量 x_i ($a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$) 变为无约

束条件的变量 x'_i ($-\infty \leq x'_i \leq +\infty$, $i = 1, 2, \dots, m$).本文中平衡优化问题中的优化变量是极向场线圈的位置和极向场电流,基于物理和工程的考虑它们的取值范围都局限于在某一区间内,如实验诊断窗口、抽气口、真空室的位置、形状等因素,都限制了极向场线圈的位置,极向场电源系统、超导线圈等因素也对线圈电流的取值范围有一定限制.这些限制条件可用矩形区域表示,即线圈位置和电流都能表示为 $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$,因此可用上述的变量变换方法.这样,就能在平衡优化问题中应用 POWELL 方法——目前是最有效的无约束极值的直接搜索法.

在该问题中,为使 POWELL 算法更好地实现自动调整变量步长进行搜索,可对反正切函数图像(变换曲线)适当展宽,即通过某一常数因子对反正切函数作适当拉伸,方法如下:

$$x_i = a'_i + (b_i - a'_i) \cdot \frac{2}{\pi} \arctan(gx'_i), \quad (6)$$

g 为某一常数.

图2给出了函数 $y_i = \frac{2}{\pi} \arctan(gx'_i)$ 在 $g = 1, 0.1, 0.05$ 时图像比较,当 g 值取较小的正数时,该函数图像在坐标原点附近变得平坦了,这种处理正是程序中所需要的.

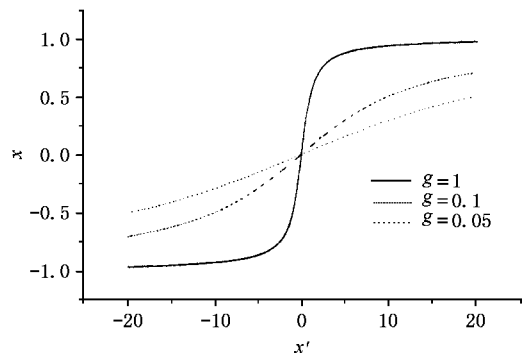


图2 $x = \frac{2}{\pi} \arctan(gx')$ 分别在 $g = 1, 0.1, 0.05$ 时的图像

3. OPEQ 程序应用于线圈优化的结果

HT-7U 是中科院等离子体所正在建造的下一代非圆截面超导托卡马克装置,真空室形状是 D 形,由于装置的真空室空间较大,为充分利用真空室空间,在满足 HT-7U 的物理设计提出的等离子体参数的前提下,希望将来实验中可运行两种典型的偏滤

器位形的等离子体位形,即大体积(胖 D)和大拉长比(瘦 D)双零磁偏滤等离子体平衡位形.胖 D 是为了充分利用真空室空间而获得大体积的等离子体平衡位形,瘦 D 是为了获得大拉长比参数的等离子体平衡位形.

3.1. HT-7U 瘦 D 平衡位形所对应的极向场线圈电流的确定

为了实现瘦 D 位形,需要以瘦 D 等离子体平衡位形参数为目标函数,用优化方法来确定极向场线圈.瘦 D 平衡位形参数见表 1. R 是等离子体大半径, a 是等离子体小半径, k 是拉长比, δ 分别是等离子体的三角形变, R_x, Z_x 分别是 X 点 R 方向、 Z 方向位置坐标.从工程和装置的可接近性出发,预先确定了极向场线圈位置,线圈位置和尺寸如图 3,其具体参数见表 2.由于给定的极向场线圈关于赤道面上上下对称,表 2 只给出了上半平面的数据,其中 R, Z 分别是每个极向场线圈的中心位置, dR, dZ 分别是每个极向场线圈截面尺寸, CICC 是每个极向场线圈在大环向上的长度.使用 OPEQ 程序时,不改变线圈位置,仅把所有线圈电流值作为优化变量,同时对各线圈电流值施加一定的限制范围(约束条件).并任意输入一组极向场线圈电流值作为初始优化变量,表 3 给出了这组初始电流值大小,其中极向场线圈电流单位是安培(A),由该组初始电流值确定的等离子体平衡位形参数见表 4.虽然初始平衡位形(表 4)与瘦 D(表 1)的参数相差甚远,但通过 OPEQ 程序进行优化计算,得到了以瘦 D 等离子体参数(表 1)为目标函数的极向场线圈电流值,见表 5.计算结果也表明初始优化变量的选择对最终结果的获得没有大的影响.

表 1 瘦 D 位形的双零磁偏滤等离子体参数

R/m	a/m	k	δ	R_x/m	Z_x/m
1.78	0.39	1.9	0.57	1.56	0.75

表 2 极向场线圈的中心位置、尺寸

No.	R/cm	Z/cm	dR/cm	dZ/cm	CICC 长度/m
PF1	63.816	22.033	14.339	41.170	0.561×10^3
PF3	63.816	66.099	14.339	41.170	0.561×10^3
PF5	63.816	110.165	14.339	41.170	0.561×10^3
PF7	105.886	186.081	27.677	41.170	0.186×10^4
PF9	290.716	179.038	14.339	21.085	0.128×10^4
PF11	316.858	87.030	8.622	17.068	0.637×10^3

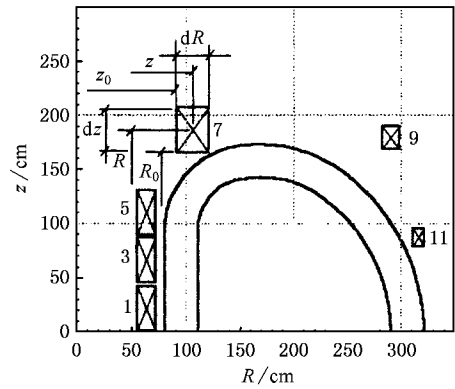


图 3 极向场线圈位置和尺寸(半平面)

表 3 一组初始极向场线圈电流值

PF1/A	PF3/A	PF5/A	PF7/A	PF9/A	PF11/A
-203000	273000	539000	2030000	-574000	-21120

表 4 表 3 所对应的胖 D 位形的双零磁偏滤等离子体参数

R/m	a/m	k	δ	R_x/m	Z_x/m
1.95	0.56	1.64	0.72	1.54	0.92

表 5 瘦 D 位形所对应的极向场线圈电流值

PF1/A	PF3/A	PF5/A	PF7/A	PF9/A	PF11/A
-175000	259000	826000	3724000	-714000	-351360

3.2. 胖 D 平衡位形所对应的极向场线圈的确定

在托卡马克装置设计中,增大偏滤器深度(X -point 到外靶板间的距离)有利于脱靶等离子体的形成.在胖 D 位形和相应的偏滤器结构中,要求偏滤器深度约为 30 cm.此外要考虑到真空室内必须留有充分的空间放置靶板的支撑部件等因素.基于这些考虑,需要以一合适的胖 D 等离子体平衡位形参数为目标函数,用优化方法来确定极向场线圈.胖 D 平衡位形参数见表 6.

表 6 胖 D 位形的双零磁偏滤等离子体参数

R/m	a/m	k	δ	R_x/m	Z_x/m
1.97	0.54	1.53	0.78	1.54	0.82

我们用 OPEQ 程序对该问题进行了优化计算.计算时首先采用的方法是保持图 3(表 2)中的极向场线圈位置不变的条件下,仅对所有极向场线圈电流进行优化.计算结果表明,不改变极向场线圈位置,仅优化极向场线圈电流,不能得到所需等离子体位形.因此需要把部分线圈位置放开,也作为优化变量.即同时把 7,9,11 号极向场线圈位置和所有线圈

电流都作为变量进行优化计算. 在该条件下我们得到了符合要求的胖 D 等离子体平衡位形. 下面给出优化得到的线圈位置、电流解.

表 7 OPEQ 计算得到的 PF7, PF9, PF11 极向场线圈中心位置

No.	R/cm	Z/cm
7	90.345	186.085
9	259.526	178.961
11	316.366	87.036

表 8 OPEQ 计算得到的极向场线圈电流

PF1/A	PF3/A	PF5/A	PF7/A	PF9/A	PF11/A
-25258.9	233242.3	373837.5	3760458.8	-686244.2	-336500.3

表 6、表 7、表 8 中的数据表明, 通过在一定范围内优化极向场线圈位置和极向场线圈电流, 可以得到所需的等离子体位形. 从工程和装置的可接近性出发, 部分极向场线圈的位置是可以进行适当改变的. 因此根据优化结果可调整部分线圈的位置. 同时, 我们在新得到的极向场线圈位置下, 通过 OPEQ 程序优化计算极向场线圈电流值, 很容易能再次得到瘦 D 等离子体参数(表 1). 图 4 给出表 2、表 7 两组极向场线圈位置的平面坐标图, 从图中可看出 PF7, PF9 线圈和 HT-7U 原极向场线圈位置相差较大. 但正是这些线圈位置的改变和电流的变化, 才得到了符合要求的等离子体位形.

为充分利用真空室空间, 在满足 HT-7U 的物理设计提出的等离子体参数和超导磁体不失超的前提下, 应用 OPEQ 程序还可以得到多个典型的等离子体位形, 圆截面、双零、单零位形, 增加将来放电实验的灵活性.

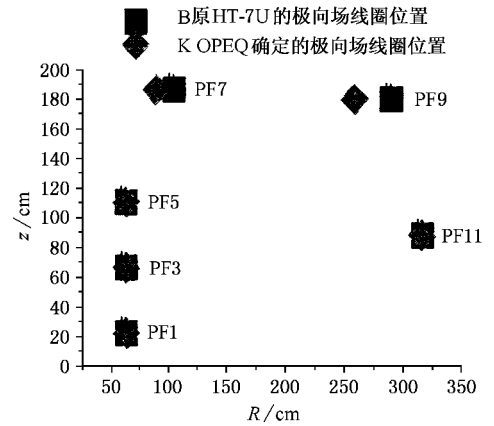


图 4 原 HT-7U 极向场线圈位置和优化极向场线圈位置的比较

4. 结 论

通过 POWELL 优化算法耦合自由边界平衡计算的方法, 在事先所规定的等离子体几何位形参数为目标函数下, 能有效地优化确定等离子体平衡时外部极向场线圈位置和电流. 由此, 我们发展了一个基于自由边界平衡计算的多变量优化程序 OPEQ, 该程序对托卡马克极向场设计、以及偏滤器的结构设计有重要应用价值. 把它应用于 HT-7U 平衡位形计算中, 得到了满足所需等离子体位形参数的外部线圈解. 今后, 我们准备在已有的工作基础上用遗传算法(基因算法)来做托卡马克极向场线圈的优化问题. 遗传算法通常被认为能解决全局优化问题.

[1] Kessel C E, Mau T K, Jardin S C and Najmabadi F 2001 *Plasma Profile and Shape Optimization for the Advanced Tokamak Power Plant*, ARIES-AT PPPL-3573

[2] Bosch H S et al 1999 *Plasma Phys. Control. Fusion* **41** A401

[3] Strickler D J, Peng Y K M and Jardin S C 1987 *Princeton Plasma Physics Laboratory* October

[4] Strickler D J, Peng Y K M, Pomphrey N and Jardin S C 1990 *Princeton Plasma Physics Laboratory* January

[5] Kessel C E et al 1996 *Fusion Technology* **30** 186

[6] Tatsuoki Takeda and Shinji Tokuda 1991 *Review Article Journal of Computational Physics* **93** 1—107

[7] Yu G Y, Chen J B and Hou Y P 1979 *Acta Phys. Sin.* **28** 712 [in Chinese] 俞国扬、陈俊本、霍裕平 1979 *物理学报* **28** 712]

[8] Press William H, Flannery Brian P, Teukolsky Saul A and Vetterling William T 1986 *Numerical Recipes* (Cambridge University Press)

[9] Zha X J, Zhu S Z, Yu Q Q 2002 *Chinese Journal of Computational Physics* **19** (5) [in Chinese] 查学军、朱思铮、虞清泉 2002 *计算物理* **19** (5)]

Equilibrium optimization code opeq and results of applying it to HT-7U

Zha Xue-Jun Zhu Si-Zheng Yu Qing-Quan

(*Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, P. O. Box 1126, Hefei 230031, China*)

(Received 23 April 2002 ; revised manuscript received 8 June 2002)

Abstract

The plasma equilibrium configuration has a strong impact on the confinement and MHD stability in tokamaks. For designing a tokamak device, it is an important issue to determine the sites and currents of poloidal coils which have some constraint conditions from physics and engineering with a prescribed equilibrium shape of the plasma. In this paper, an effective method based on multi-variables equilibrium optimization is given. The method can optimize poloidal coils when the previously prescribed plasma parameters are treated as an object function. We apply it to HT-7U equilibrium calculation, and obtain good results.

Keywords : plasma equilibrium, poloidal coils, optimization

PACC : 5255, 5265