

多结超导环在外磁场中的行为^{*}

刘新元¹⁾²⁾ 谢飞翔¹⁾ 王福仁¹⁾ 马 平¹⁾ 戴远东¹⁾

¹⁾ (北京大学物理系, 人工微结构和介观物理国家重点实验室, 北京 100871)

²⁾ (北京大学电子学系, 北京 100871)

(2002 年 4 月 25 日收到, 2002 年 9 月 3 日收到修改稿)

分析和计算了双结超导环在无偏置电流时的磁通、环流、自由能与外磁场的关系, 发现双结环与单结环在磁场中的行为有所不同. 当两个结的 I_c 相等时, 双结环在 $1 < \beta = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0} < 2$ 时, 若无偏置电流, 总磁通 Φ 、环流 I 与外磁通 Φ_e 的关系仍然是非回滞的曲线. 仅当 $\beta \geq 2$ 时, 曲线才出现回滞. 另外双结环有两支解, 并且每支解的周期为 $2\Phi_0$.

关键词: 双结环, 双支解, $2\Phi_0$ 周期, 回滞

PACC: 7400, 7430C, 7450, 7490

1. 引 言

超导态是宏观量子状态, 具有宏观量子相干效应. 超导环中磁通量子化是超导宏观量子相干现象的具体表现. 特别是在环中插入一个或几个超导 Josephson 结的超导环, 其行为随外加磁通周期变化. 由此人们制成了超导量子干涉仪, 即 SQUID (superconducting quantum interference devices).

SQUID 分为两种, 一种是超导环中插入两个 Josephson 结的 dc SQUID, 它用大于临界电流的直流电流作偏置. 此时结上的电压随外加磁通周期地变化, 其周期为磁通量子 Φ_0 ($2.07 \times 10^{-15} \text{T} \cdot \text{m}^2$)^[1]. 另一种是在超导环中插入一个结的 rf SQUID, 它与一个射频谐振回路相耦合, 当谐振回路中注入一个与谐振回路的谐振频率相近的射频电流时, 谐振回路上的射频电压随环中的外磁通 Φ_e 周期地变化, 其周期也是 Φ_0 ^[2]. 人们已经知道^[3], 对于包括一个 Josephson 结的超导环 (rf SQUID), 视其环路电感 L 和临界电流 I_c 的大小不同, 其行为可分为两种情形. 当电感参数 $\beta = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0} < 1$ 时, 环中的总磁通 $\Phi = \Phi_e + LI$ 是 Φ_e 的单值函数, Φ - Φ_e 曲线没有回滞, 此时 rf

SQUID 工作在非回滞模式 (又称电感模式). 当 $\beta \geq 1$ 时, Φ 是 Φ_e 的多值函数, Φ - Φ_e 曲线有回滞, rf SQUID 工作在回滞模式 (又称为耗散模式).

对于含有一个 Josephson 结的超导环, $\beta \geq 1$ 和 $\beta < 1$ 的行为明显不同. 而对于具有负的临界电流的 Josephson 结, 即所谓的 π 结, 人们也进行了研究. Sigrest 和 Rice^[4] 因此提出了判断高温超导体是 d 波配对的位相敏感实验的建议. 他们指出由于 d 波对称性, 在包含一个 π 结的超导环中, 如果此环的 $\beta = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0} > 1$, 则在外磁场为零时会发生自发磁化.

不久 Tsuei 等^[5] 指出对于多结超导环, 当存在奇数个 π 结时, 在 $\beta > 1$ 的情况下会发生自发磁化. 当 $\beta \gg 1$ 时, 自发磁化磁通为 $\Phi_0/2$. 他们在三晶衬底上制作了三晶环, 完成了令人信服的高温超导体序参数 d 波对称性的位相敏感实验. 他们^[6] 进一步的实验证明, 随着温度从低温上升到接近超导转变温度 T_c 的很宽温区, 自发磁化磁通都基本上等于 $\Phi_0/2$.

为了说明 Tsuei 等^[6] 实验上观察到的自发磁化磁通与温度的关系, 我们^[7] 分析和研究了多结超导 π 环的自发磁化. 模型计算表明多结超导 π 环与单结 π 环不同, 当 $\beta < 1$ 时同样有自发磁化产生, 这不仅说明了 Tsuei 等观察到的自发磁化与温度的关系,

^{*} 国家重点基础研究项目 (批准号: G19990646-09) 资助的课题.

而且说明多结超导环的性质与单结环明显不同.

本文的目的是研究具有普通 Josephson 结的多结超导环无偏置电流时在外磁场中的行为,结果表明,它与单结环有明显差别.对于双结环,若两结的临界电流相等, $\beta = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0} < 2$ 时为非回滞模式, $\beta \geq 2$ 才进入回滞模式.而且双结环具有两支独立的解.每支解的周期为 $2\Phi_0$,而不是 Φ_0 .

2. 单结超导环和多结超导环

2.1. 含有一个普通 Josephson 结的单结超导环的行为^[3]

图 1 为单结环示意图.图中 I_c 为结的临界电流, L 为环电感, φ 为结两端超导波函数的相位差, Φ_e 为外磁通, Φ 为 SQUID 环内总磁通,它满足如下条件:

$$\varphi + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2n\pi. \quad (1)$$

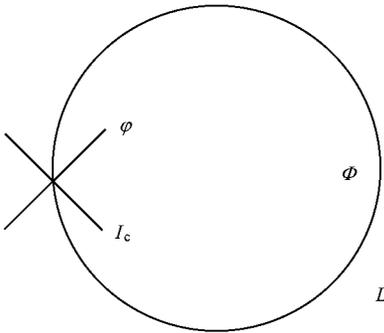


图 1 单结环示意图

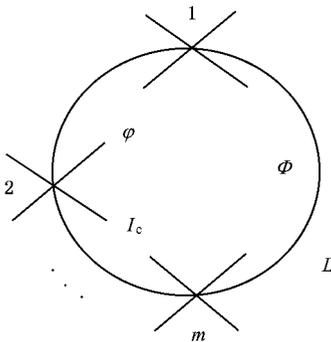


图 2 多结环示意图

总磁通 Φ 的方程为

$$\Phi = \Phi_e + LI = \Phi_e + LI_c \sin \varphi = \Phi_e - LI_c \sin \left(\frac{2\pi \Phi}{\Phi_0} \right).$$

对 Φ_e 偏微分

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_e} = \frac{1}{1 + \beta \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{2\pi LI_c}{\Phi_0}.$$

可见当 $\beta < 1$ 时, $\Phi - \Phi_e$ 曲线连续可微, Φ 是 Φ_0 的单值函数,单结环工作在非回滞模式.

当 $\beta \geq 1$ 时(2)式有奇点, $\Phi - \Phi_e$ 曲线是多值函数,单结环工作在回滞模式.

2.2. 多结超导环在外磁场中的行为

图 2 为多结环示意图.设超导环上有 m 个结,为了简单起见,假设各个结的临界电流 I_c 完全相同,则其超导波函数量子相位差满足方程

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_m + 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = 2n\pi. \quad (3)$$

因各结完全相同,则 $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m$ 得

$$\varphi_1 + \frac{2\pi \Phi}{m \Phi_0} = \frac{2n}{m} \pi. \quad (4)$$

同样总磁通

$$\Phi = \Phi_e + LI = \Phi_e - LI_c \sin \left(2\pi \frac{\Phi}{m \Phi_0} - \frac{2n}{m} \pi \right), \quad (5)$$

对 Φ_e 偏微分

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Phi_e} = \frac{1}{1 + \frac{\beta}{m} \cos \left(2\pi \frac{\Phi}{m \Phi_0} - \frac{2n}{m} \pi \right)}. \quad (6)$$

由上式可以看出如下几点与单结环不同的结果:

1) 当 $\frac{\beta}{m} < 1$ 或 $\beta < m$ 时, $\Phi - \Phi_e$ 曲线是连续可微函数(非回滞模式).

仅当 $\beta \geq m$ 时(6)式才有奇点, $\Phi - \Phi_e$ 曲线是多值函数(回滞模式).

2) $\Phi - \Phi_e$ 曲线有多支解. n 取不同的值得到不同的解,共有 m 支独立的不同的解.

3) 每支解的周期是 $m\Phi_0$.

3. 双结环 ($m = 2$) 的数值计算结果

3.1. 双结环的 $\Phi - \Phi_e$ 特性曲线

在双结超导环中,我们假设两个结具有相同的

临界电流值 I_c , 即 $I_{c1} = I_{c2} = I_c$ 此时的磁通方程(5)变为

$$\Phi = \Phi_e - LI_c \sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - n\pi\right). \quad (7)$$

方程(7)可变换为

$$\frac{\Phi_e}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{\beta}{2\pi} \sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - n\pi\right). \quad (8)$$

按方程(8), 当 $\beta = 1.5$ 时的图形如图3所示, 很容易看出, 对应于 $n = 0$ 和 $n = 1$ 两种情况, 曲线有双支解, 周期均为 $2\Phi_0$. 与单结环最为明显的不同是曲线无回滞, 即在 $\beta < 2$ 但 $\beta > 1$ 时, 每一支解仍然是处处连续可微和无回滞的.

当 $\beta \geq 2$ 时, 图形如图4所示. $\Phi - \Phi_e$ 曲线出现回滞. 它仍然是双支解, 每一支解的周期为 $2\Phi_0$.

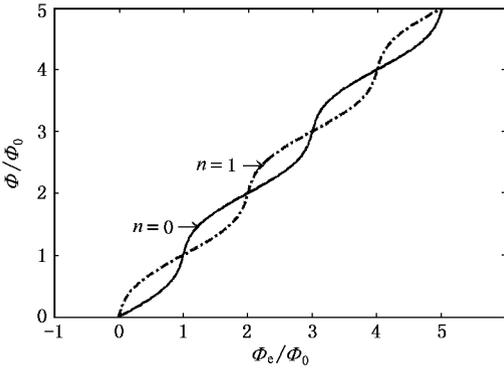


图3 $\beta = 1.5$ 时 $\Phi - \Phi_e$ 曲线

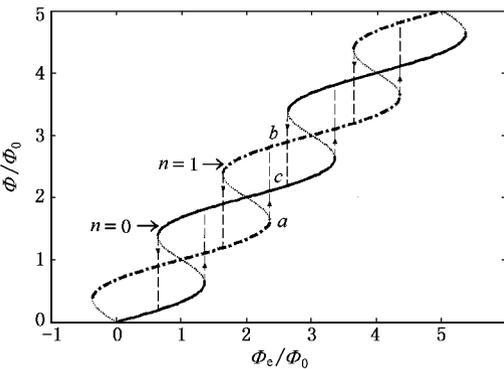


图4 $\beta = 5$ 时 $\Phi - \Phi_e$ 曲线

3.2. 双结环的 $I - \Phi_e$ 特性曲线

已知环流 I 满足方程

$$I = \frac{\Phi - \Phi_e}{L}. \quad (9)$$

将(8)式代入(9)式, 则可推出

$$\frac{I}{I_c} = \frac{\Phi - \Phi_e}{LI_c} = -\sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - n\pi\right), \quad (10)$$

其中 Φ 和 Φ_e 的关系由(8)式给出.(9)和(10)式的计算结果见图5和图6.

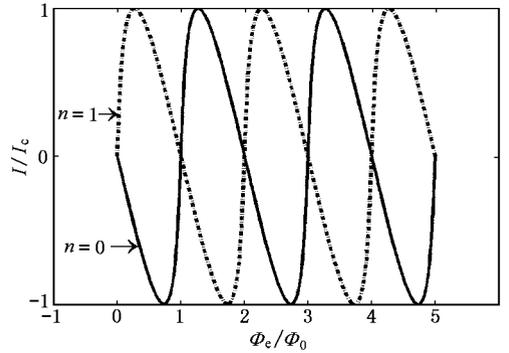


图5 $\beta = 1.5$ 时 $I/I_c - \Phi_e$ 曲线

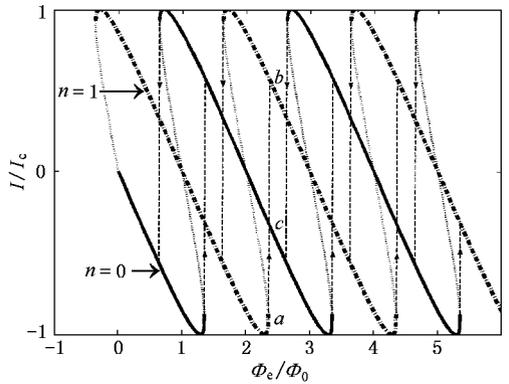


图6 $\beta = 5$ 时 $I/I_c - \Phi_e$ 曲线

从图中可见, $I/I_c - \Phi_e$ 曲线有双支解, 每支解的周期为 $2\Phi_0$, 当 $\beta \geq 2$ 时曲线有回滞.

3.3. 双结环的自由能特性曲线

设双结环的自由能为 F , 它包括环流的磁能和两个 Josephson 结的耦合能

$$F = \frac{1}{2} LI^2 - 2 \times E_J \cos(\varphi) \\ = \frac{1}{2L} \Phi_0^2 \times \left[\left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \right)^2 - \frac{\beta}{\pi^2} \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - n\pi\right) \right]. \quad (11)$$

$$\text{令 } F_0 = \frac{1}{2L} \Phi_0^2,$$

定义归一化自由能为

$$\frac{F}{F_0} = \left(\frac{\Phi}{\Phi_0} - \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \right)^2 - \frac{\beta}{\pi^2} \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} - n\pi\right). \quad (12)$$

在 (12) 式中, 归一化自由能与外磁通 Φ_e 和 β 有关. 它在 $\beta < 2$ 和 $\beta \geq 2$ 的关系曲线如图 7 和图 8 所示. 另外无论 β 取何值, 都有双支解. 当 $\beta < 2$ 时, 每一支解都是外磁通的单值函数.

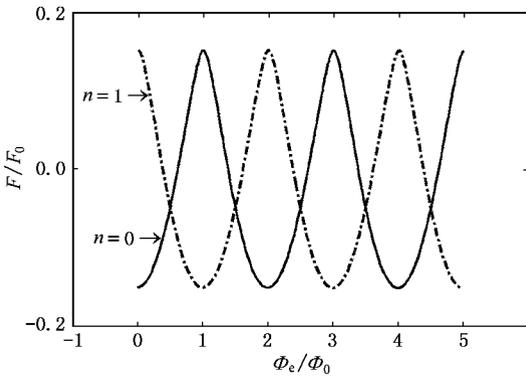


图 7 $\beta = 1.5$ 时 $F/F_0 - \Phi_e$ 曲线

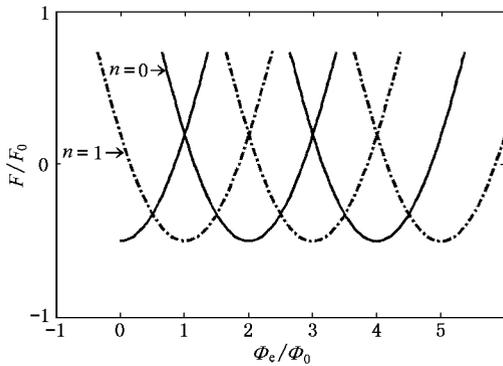


图 8 $\beta = 5$ 时 $F/F_0 - \Phi_e$ 曲线

4. 讨 论

由以上的计算可以看出, 即使在 $\beta < 2$ 时的非回滞情况下, 在无偏置电流时总磁通 Φ 、环流 I 和自由能 F 都是外磁通的双值函数, 只是两个解分别属于 n 取奇数或 n 取偶数的不同支. 每一支解的周期是 $2\Phi_0$. 但如果将两支解合在一起看, 仍表现为周期是 Φ_0 , 如图 3 到图 8 所示. 人们会问, 实验上可能观察到的周期是 Φ_0 还是 $2\Phi_0$? 为此让我们观察 Josephson 结上的位相差 φ_1 和 φ_2 对外磁通的依赖关系曲线. 对于双结环 (4) 式变为

$$\varphi_1 = \varphi_2 = n\pi - \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (13)$$

其中总磁通 Φ 与外磁通 Φ_e 的关系由 (7) 式给出. 在

非回滞模式下 ($\beta < 2$), 对于每一支解, 环流 $I = I_c \sin \varphi_1$ 是外磁通 Φ_e 的单值连续函数, 不发生跃变 (见图 5) 因而对于每一支解, Josephson 结上的位相差 φ 也应为外磁通的连续函数, 如果不发生 $2n\pi$ 的位相跃变, 它也应当是单值函数. 图 9 给出了 $\beta = 1.5$ 时的 $\varphi - \Phi_e$ 关系曲线. 容易看出, 两支解都是 Φ_e 的单值函数, 周期是 $2\Phi_0$, 而且彼此不相交. 在 $\Phi - \Phi_e$ (图 3) 和 $I - \Phi_e$ (图 5) 关系中, 当外磁通为 Φ_0 的整数倍时, 总磁通 Φ 和环流 I 的两支解交汇, 总磁通都等于外磁通, 环流 I 都等于零. 但由图 9 可知, 此时两支解中 Josephson 结上的位相差并不相等, 而是相差 π . 在外磁通连续变化时, 结上的位相差也应当连续变化, 因而不会发生从一支到另一支的过渡. 由此可知, 对于 $\beta < 2$ 的非回滞情形, 实验上观察到的总磁通 Φ 和环流 I 随外磁通 Φ_e 变化的周期应当是 $2\Phi_0$.

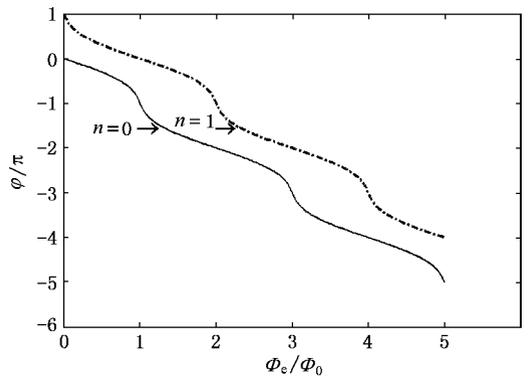


图 9 $\beta = 1.5$ 时 $\varphi/\pi - \Phi_e$ 曲线

对于 $\beta > 2$ 的回滞双结超导环, 情况有所不同. 在外磁通使 $\frac{d\Phi}{d\Phi_e}$ 为无穷大的特殊点, 超导环将发生磁通跳跃, 在磁通跳跃瞬间, Josephson 结上的相位差也将发生跃变, 此时环的状态很容易从一支解跳跃到另一支解. 例如在图 4 和图 6 中, 当外磁通 Φ_e 达到 a 点时发生磁通跳跃, 系统可能跳到 b 点 (与 a 点同一支解) 或 c 点 (另一支解), 但 c 点的环流 I 和 Josephson 结上的量子相位差 φ_1 与 a 点的值更接近, 因而跳跃的终态更可能是 c 点, 而不是 b 点. 由于发生两支解之间的磁通跳跃, 此时实验上观察到的 $\Phi - \Phi_e$ 的周期应当仍是 Φ_0 而不是 $2\Phi_0$. 对上述问题进行深入的实验研究是有兴趣的课题.

双结超导环在 $\beta \geq 2$ 时才进入回滞模式, 这在实际应用中是有意义的. 人们已经知道^[8], 工作在非回滞模式的 rf SQUID, 当 $k^2 Q\beta > 1$ 时 (Q 是射频谐振

器的品质因素, k 是 SQUID 与谐振器之间的耦合系统) 具有较大的传输函数, 因而可以得到低的噪声和高的灵敏度. 现在高性能的 HT_c rf SQUID 都是工作在非回滞模式^[9]. 按照 Chesca^[10] 的 HT_c rf SQUID 噪声理论, 非回滞模式的 rf SQUID 的电感 L 有最佳值区间, 大约在 100pH 到 300pH. 在此区间内器件的磁通噪声最小, 在此区间之外, 噪声迅速增大. 对于单结 rf SQUID, 为了使 $\beta < 1$, Josephson 结的 I_c 必须很小, 约为 1 到 $3\mu\text{A}$. 制作这样小临界电流的结, 工艺上是较困难的, 因而器件的成品率较低. 双结环 rf SQUID 在 $\beta < 2$ 时都工作在非回滞模式, 这样可使高

T_c Josephson 结的临界电流的允许值扩大一倍. 因而在工艺上较易实现.

5. 结 论

从以上计算和分析可以看出: 具有两个 Josephson 结的超导环与单结环在磁场中的行为有所不同. 对两结相同的双结环, 若无偏置电流, 在 $1 < \beta < 2$ 时, 总磁通 Φ 、环流 I 、自由能 F 仍是外磁通 Φ_e 的单值函数, 不存在回滞. 仅当 $\beta \geq 2$ 时, 曲线才出现回滞. 双结环对应于 $n = 0, 1$ 时各有一支解, 共有两支解, 并且每支解的周期为 $2\Phi_0$.

- [1] Han B, Chen G H, Xu F Z, Zhao S P and Yang Q S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2051 [in Chinese] 韩冰、陈赓华、徐凤枝、赵士平、杨乾声 2000 物理学报 **49** 2051]
- [2] Du S W, Dai Y D and Wang S G 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2364 [in Chinese] 杜胜望、戴远东、王世光 1999 物理学报 **48** 2364]
- [3] Barone A and Paterno G 1982 *Physics and Applications of the Josephson Effect* John Wiley & Sons, Inc. [崔广霖、孟小凡 译 1998 约瑟夫森效应原理和应用 (北京: 中国计量出版社) 第 279—281 页]
- [4] Sigrist M and Rice T M 1992 *J. Phys. Soc. Japan* **61** 4283
- [5] Tsuei C C, Kirtley J R, Chi C C, Lock See, Yu-Johnes, Gupta A, Shaw T, Sun J Z and Ketchon M B 1994 *Phys. Rev. L* **73** 593

Tsuei C C, Kirtley J R, Ren Z F, Wang J H and Bhushan M 1996 *Science* **271** 329

- [6] Kirtley J R, Tsuei C C and Moler K A 1999 *Science* **285** 1373
- [7] Deng P, Meng S C, Wang F R, Xie F X, Ma P, Dai Y D 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2217 [in Chinese] 邓鹏、孟树超、王福仁、谢飞翔、马平、戴远东 2001 物理学报 **50** 2217]
- [8] Dmitrenko I M, Tsoi G M, Shnyrkov V I and Kartsounik V V 1982 *J. Low. Temp. Phys.* **49** 413
- [9] Zhang Y, Mueck M, Bragibski A I and Toepfer H 1994 *Supercond. Sci. Technol.* **7** 269
- [10] Chesca B 1998 *J. Low. Temp. Phys.* **110** 963

Behaviors of multi-node superconducting rings in external magnetic field *

Liu Xin-Yuan^{1,2)} Xie Fei-Xiang¹⁾ Wang Fu-Ren¹⁾ Ma Ping¹⁾ Dai Yuan-Dong¹⁾
¹⁾(Mesoscopic Physics National Laboratory and Department of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)
²⁾(Department of Electronic Science, Peking University, Beijing 100871, China)
 (Received 25 April 2002; revised manuscript received 3 September 2002)

Abstract

Numerical simulations and analyses have been applied to find the relationships between magnetic flux, ring current, free energy of superconducting rings and external magnetic field. It is found that a double-junction superconducting ring has a different behavior from a single-junction ring. When the I_c values are identical, a double-junction ring has a non-hysteresis behavior when $\beta < 2$. The hysteresis exists only when $\beta \geq 2$. And a double-junction ring has a double-branch solution with $2\Phi_0$ period.

Keywords: double-junction ring, double-branch solution, $2\Phi_0$ period, hysteresis

PACC: 7400, 7430C, 7450, 7490