

# MKdV 方程的拟小波解\*

唐驾时<sup>1)</sup> 刘铸永<sup>1)†</sup> 李学平<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 湖南大学工程力学系, 长沙 410082)

<sup>2)</sup> 中南大学土建学院, 长沙 410075)

(2002 年 6 月 20 日收到, 2002 年 8 月 9 日收到修改稿)

用拟小波方法求 MKdV 方程的数值解. 先用拟小波离散格式离散空间导数, 然后用四阶 Runge-Kutta 方法离散时间导数, 对一个有精确解的实例  $u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$  进行了数值计算. 拟小波解与解析解完全重合,  $t = 10000s$  时, 二者也没有偏差.

关键词: MKdV 方程, 拟小波方法, 孤子解

PACC: 0540, 0340

## 1. 引 言

求非线性偏微分方程的解析解和数值解在非线性和物理学中占有重要地位. 近年来, 用格子 Boltzmann 方法模拟 MKdV 方程<sup>[1]</sup>, 用 Jacobi 椭圆函数展开法求解非线性波动方程<sup>[2]</sup>, 用双曲函数法求一些非线性方程的孤波解<sup>[3]</sup> 均获得了成功.

小波函数是一个有限能量函数, 可以通过伸缩和平移技术来构造<sup>[4,5]</sup>. 由正则化的正交尺度函数生成的小波称为拟小波, 它比原始小波有更好的局域特性. 文献[6]用拟小波方法获得了 Burgers 方程的数值解.

本文用拟小波方法求 MKdV 方程的数值解. 先用拟小波离散格式离散空间导数, 然后用四阶 Runge-Kutta 方法离散时间导数, 对一个有精确解的实例进行了具体计算. 拟小波解与解析解曲线完全重合.

## 2. MKdV 方程

考虑 MKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + au^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

其初始条件和初始条件分别为

$$u(x, 0) = \bar{u}(x), \quad (2)$$

$$u(a, t) = \bar{u}_1(t), \quad (3)$$

$$u(b, t) = \bar{u}_2(t). \quad (4)$$

将空间坐标  $x$  均匀等分, 单元网格大小记为  $\Delta x = (b - a)/N$ ,  $N$  为划分区间  $[a, b]$  所采用的单元网格总数. 网格点坐标记为  $x_j = a + (j - 1)\Delta x$  ( $j = 1, 2, \dots, N + 1$ ), 于是有  $x_j - x_{j+k} = -k\Delta x$ . 在网格点  $x_j$  的  $u$  的值记为  $u_j$ , (1) 式可以写成

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -au_j^2 \frac{\partial u_j}{\partial x} - \beta \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} \quad (j = 1, 2, \dots, N + 1). \quad (5)$$

令

$$f_j = -au_j^2 \frac{\partial u_j}{\partial x} - \beta \frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3} \quad (j = 1, 2, \dots, N + 1), \quad (6)$$

显然, 方程(5)可以写成一个半离散的形式

$$\frac{du_j}{dt} = f_j \quad (j = 1, 2, \dots, N + 1). \quad (7)$$

这是一个常微分方程组.

## 3. 离散空间导数的拟小波格式

求解方程(7)的关键是离散空间导数. 取(6)式, 下面用拟小波格式进行离散. 根据 Shannon 定理, 对

\* 湖南省自然科学基金(批准号 01JJY2007)资助的课题.

† 通讯联系人.

有限频段函数  $f(x)$  可由它的“型值”  $f(k)$  完全确定. 对于任意的  $\Omega$ , 假定  $\text{supp} \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$ ,  $f(x)$  可以写成

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left[\Omega\left(x - \frac{\pi k}{\Omega}\right)\right]}{\Omega\left(x - \frac{\pi k}{\Omega}\right)} f\left(k \frac{\pi}{\Omega}\right), \quad (8)$$

其中  $\Omega/\pi$  为取样密度. 利用样本尺度函数

$$\delta_{\Omega, k} = \frac{\sin[\Omega(x - x_k)]}{\Omega(x - x_k)} \quad (9)$$

来重构  $f(x)$ , 有

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\Omega(x - x_k)]}{\Omega(x - x_k)} f(x_k), \quad (10)$$

其中  $\{x_k\}$  为定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的一组离散坐标.

MKdV 方程采用均匀离散网格, 它只有惟一的积分核. 采用 Nyquist 频率, 取  $\Omega = \pi/\Delta$ ,  $\Delta$  为取样间隔,

(10) 式变为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\pi(x - x_k)/\Delta]}{\pi(x - x_k)/\Delta} f(x_k). \quad (11)$$

为了改善样本尺度函数的局域特性, 引进 Gauss

正则因子  $R_\sigma(x)$  对其进行正则化处理

$$R_\sigma(x) = \exp[-x^2/(2\sigma^2)], \quad (12)$$

其中  $\sigma$  为宽度参数,  $\sigma > 0$ . 在实际计算中取  $\sigma = r\Delta$ ,  $r$  为任意参数 ( $r \geq \sqrt{2}/\pi$ ). 正则化后的样本尺度函数为

$$\delta_{\Delta, \sigma}(x) = \frac{\sin(\pi x/\Delta)}{\pi x/\Delta} \exp[-x^2/(2\sigma^2)]. \quad (13)$$

该函数称为拟尺度函数, 由此生成的小波称为拟小波. 利用 (13) 式,  $f(x)$  可进一步重构为

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_{\Delta, \sigma}(x - x_k) f(x_k). \quad (14)$$

由于拟小波具有良好的局域特性, 实际计算只需要在网格点  $x_k$  附近取  $2W$  个计算点即可达到计算精度. (14) 式对空间坐标  $x$  的  $n$  阶导数为

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(x - x_k) f(x_k) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

在 (6) 式中需要空间的一阶和三阶导数, 故要计算  $\delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(x)$ ,  $\delta_{\Delta, \sigma}^{(3)}(x)$ , 其表达式为

$$\delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(x) = \begin{cases} E\left(\frac{C}{x} - \frac{S\Delta}{\pi x^2} - \frac{S\Delta}{\pi\sigma^2}\right) & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases} \quad (16)$$

$$\delta_{\Delta, \sigma}^{(3)}(x) = \begin{cases} E\left[C\left(\frac{6}{x^3} - \frac{\pi^2}{x\Delta^2} + \frac{3x}{\sigma^4} + \frac{3}{x\sigma^2}\right)\right] \\ + E\left[S\left(\frac{3\pi}{x^2\Delta} - \frac{6\Delta}{\pi x^4} - \frac{x^2\Delta}{\pi\sigma^2} + \frac{3\pi}{\Delta\sigma^2} - \frac{3\Delta}{\pi x^2\sigma^2}\right)\right] & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases} \quad (17)$$

其中  $E = \exp[-x^2/(2\sigma^2)]$ ,  $S = \sin(\pi x/\Delta)$ ,  $C = \cos(\pi x/\Delta)$ .

### 4. 离散时间导数的四阶 Runge-Kutta 格式

求解半离散的常微分方程组 (7), 可采用四阶 Runge-Kutta 方法, 其离散格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{6} (K_{j,1} + 2K_{j,2} + 2K_{j,3} + K_{j,4}) \quad (j = 1, 2, \dots, N+1), \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{j,1} &= f_{j,1}^n, \quad K_{j,2} = f_{j,2}^n, \quad K_{j,3} = f_{j,3}^n, \\ K_{j,4} &= f_{j,4}^n \quad (j = 1, 2, \dots, N+1), \end{aligned} \quad (19)$$

上标  $n$  为时间层,  $\Delta t$  为时步长,  $t = n\Delta t$ . 利用拟小波离散格式, 可求得

$$\begin{aligned} K_{j,1} &= f_{j,1}^n = -\alpha (u_j^n)^2 \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(-k\Delta x) u_{j+k}^n \\ &\quad - \beta \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(3)}(-k\Delta x) u_{j+k}^n, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} K_{j,2} &= f_{j,2}^n = -\alpha \left(u_j^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,1}\right)^2 \\ &\quad \times \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(-k\Delta x) \left(u_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,1}\right) \\ &\quad - \beta \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(3)}(-k\Delta x) \left(u_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k,1}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$K_{j,3} = f_{j,3}^n = -\alpha \left(u_j^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j,2}\right)^2$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(-k\Delta x) \left( u_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k, 2} \right) \\ & - \beta \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(3)}(-k\Delta x) \left( u_{j+k}^n + \frac{\Delta t}{2} K_{j+k, 2} \right), \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{j, A} = f_{j, A}^n = & -\alpha (u_j^n + \Delta t K_{j, 3})^2 \\ & \times \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(-k\Delta x) \left( u_{j+k}^n + \Delta t K_{j+k, 3} \right) \\ & - \beta \sum_{k=-W}^{+W} \delta_{\Delta, \sigma}^{(3)}(-k\Delta x) \left( u_{j+k}^n + \Delta t K_{j+k, 3} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

当  $t=0$  时, 由初始条件(2)式, 可以得到离散的  $u_j^n$  ( $n=0$ ) 的值

$$u_j^0 = \bar{u}(x_j) \quad (j=1, 2, \dots, m+1). \quad (24)$$

计算过程如下: 1) 利用给定的初值  $u_j^0$  ( $j=1, 2, \dots, m+1$ ) 或上一个时间层  $u_j^{n-1}$  ( $j=1, 2, \dots, m+1$ ), 对计算域外的点进行延拓. 2) 利用(21)–(23)式, 可求

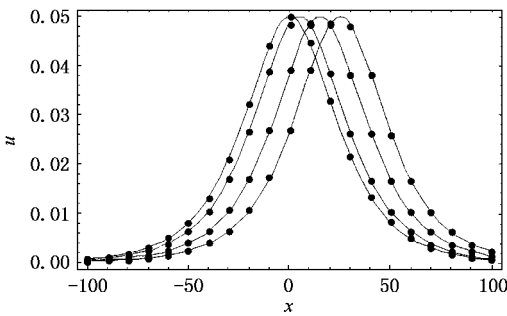


图1 MKdV 方程孤子解 ——为解析解, ●为拟小波解. 从左到右依次为  $t=100, 2000, 6000$  和  $10000$ s 的结果

得  $f_{j, 1}^n, f_{j, 2}^n, f_{j, 3}^n, f_{j, A}^n$  的值. 3) 利用(18)式计算  $u_j^{n+1}$  ( $j=1, 2, \dots, m+1$ ). 4) 重复上面过程, 把时间推进到下一个时间层  $t=t+\Delta t$ , 直到达到所需要的时间层为止.

## 5. 算例与结论

作为例子, 考虑特定的初始条件和边界条件下的 MKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in [a, b] \quad (25)$$

$$u(x, 0) = h \operatorname{sech}[h(x - x_0)], \quad (26)$$

$$u(a, t) = h \operatorname{sech}[h(a - h^2 t - x_0)], \quad (27)$$

$$u(b, t) = h \operatorname{sech}[h(b - h^2 t - x_0)]. \quad (28)$$

它的解析解为

$$u(x, t) = h \operatorname{sech}[h(x - h^2 t - x_0)], \quad (29)$$

其中  $h$  为孤子高度,  $x_0$  为孤子的初始位置.

给定数据如下: 孤子高度  $h=0.05$ , 孤子的初始位置  $x_0=0$ , 计算带宽  $W=15$ , 正则宽度参数  $\sigma=3.2\Delta$ , 计算域  $a, b = [-100, 100]$ , 单元网格  $N=400$ , 计算步长  $\Delta t=0.02$ s. 用拟小波方法分别计算了  $t=100, 2000, 6000$  和  $10000$ s 时的值, 并与解析解比较, 如图1所示.

从图1可以看出, 拟小波解与解析解完全重合. 当  $t=10000$ s 时, 二者也没有偏差. 说明拟小波方法比格子 Boltzmann 方法<sup>[1]</sup> ( $t > 6000$ s 时有偏差) 求 MKdV 方程<sup>[7]</sup> 有更高的精度.

- [1] Li H B, Huang P H, Liu M R and Kong L J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 837 (in Chinese) 李华兵, 黄兵花, 刘慕仁, 孔令江 2001 物理学报 **50** 837
- [2] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) 刘式适, 付遵涛, 刘适达, 赵强 2002 物理学报 **51** 10
- [3] Zhang G X et al 2000 *Sci. China A* **30** 1103 (in Chinese) 张桂成

等 2000 中国科学 A **30** 1103

- [4] Wan D C and Wei G W 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 1099
- [5] Prosser R and Cant R S 1998 *J. Comput. Phys.* **147** 337
- [6] Wei W G 1999 *J. Chem. Phys.* **110** 8930
- [7] Zhao Y M and Yan J R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1976 (in Chinese) [赵永明, 颜家壬 1999 物理学报 **48** 1976]

# The quasi-wavelet solutions of MKdV equations \*

Tang Jia-Shi<sup>1)</sup> Liu Zhu-Yong<sup>1)</sup> Li Xue-Ping<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *Department of Engineering Mechanics , Hunan University , Changsha 410082 , China )*

<sup>2)</sup> *Institute of Civil and Architectural Engineering ,Zhongnan University ,Changsha 410075 ,China )*

( Received 20 June 2002 ; revised manuscript received 9 August 2002 )

## Abstract

The quasi-wavelet method is used for obtaining the numerical solution of the MKdV equation. The quasi-wavelet discrete scheme is adopted to make the spatial derivatives discrete , while the fourth-order Runge-Kutta method is adopted to make the temporal derivative discrete. One of the MKdV equation  $u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$  , which has an analytical solution , is solved numerically. The numerical results are well consistent with the analytical solutions , even at  $t = 10000s$ .

**Keywords :** MKdV equation , quasi-wavelet method , soliton solution

**PACC :** 0540 , 0340

---

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province ,China ( Grant No.01JJY2007 ).