

色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测*

李 月¹⁾ 杨宝俊²⁾ 石要武¹⁾

¹⁾ 吉林大学通信工程学院, 长春 130012)

²⁾ 吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026)

(2002 年 6 月 13 日收到, 2002 年 8 月 1 日收到修改稿)

提出一种利用混沌在特定状态下对参数的敏感性来实现微弱正弦信号检测的新方案. 该方案可以有效地将深陷在色噪声背景中的微弱正弦信号检测出来. 给出了混沌检测的方法, 分析了混沌检测中噪声对系统状态的影响. 仿真实验表明该混沌检测系统对小信号非常敏感, 对任何零均值色噪声均具有极强的抑制能力.

关键词: 微弱正弦信号, 混沌检测, 色噪声, 信噪比

PACC: 0545

1. 引 言

近 10 多年来, 混沌理论的应用研究已逐渐深入医学、生态学、保密通信、电子对抗等许多领域^[1-3]. 微弱信号检测历来是信号处理领域的核心问题和前沿课题之一. 将混沌理论应用于微弱信号检测也是混沌控制与混沌利用的一个内容^[4]. 1992 年 Birk 做了一定的工作^[5], 但只是显示了一些实验结果, 在原理上并未深入探讨; 1995 年 Haykin^[6]利用人工神经网络方法研究了混沌噪声背景下的目标小信号提取; 1996 年 Leung^[7]利用 MPSV 方法研究了混沌噪声中 AR 模型的参数估计; 1997 年 Short^[8]由混沌信号可短时间预测的特性, 研究了混沌通信系统中信号的提取, 均取得了良好结果. 类似的报道还有许多^[9,10]. 1999 年 Wang 等人^[11]利用混沌测量系统实现了白噪声背景下信噪比低至 -66dB 的正弦信号测量. 2001 年 Wang 等人^[12]依据混沌动力学理论, 在局部区域将混沌干扰投影到吸引子所在流形的局部切空间, 谐波信号保留在切空间的补空间中, 从而成功地提取谐波信号; 2002 年 Wang 等人^[13]提出并成功地实现混沌背景下信号的盲分离. 上述方法对背景噪声的类型都加以某种形式的限定. 当信号极其微弱(最小可达纳伏量级), 且背景噪声为任意分布色噪声时, 目前尚无有效的测量方法.

混沌系统对参量的极端敏感性是其主要特性之一^[14,15]. 本文所提出的混沌检测方法通过对特定状态下的混沌系统施加周期摄动力, 对混沌状态进行微扰, 使系统由混沌状态突变到大尺度周期状态, 从而根据系统相平面轨迹的变化进行微弱信号检测. 仿真实验结果表明, 在任意零均值色噪声背景下, 即使对于信噪比低达约 -111.46dB 的正弦信号, 该方法仍具有良好的检测性能. 本文方法对于一定畸变的正弦信号检测仍然适用.

2. 微弱正弦信号的混沌检测方法

选择一个对正弦信号敏感的混沌系统作为检测系统, 使该系统处于特定的混沌状态, 微弱正弦信号的出现可以使系统状态立刻发生相变. 根据系统从混沌状态到大尺度周期状态的相变将深陷在噪声中的微弱正弦信号检测出来.

考虑下述正弦信号的混沌检测模型:

$$\ddot{x} + \epsilon k \dot{x} - x^3 + x^5 = \epsilon f \cos(\omega t) + \epsilon(\text{input}), \quad (1)$$

k 为阻尼比 ($-x^3 + x^5$) 为非线性恢复力, $f \cos(\omega t)$ 为内置信号 (input) 为待测信号, 其等价系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3 - x^5 - \epsilon ky + \epsilon f \cos(\omega t) + \epsilon(\text{input}). \end{cases} \quad (2)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 方程 (1) 为哈密顿系统, 其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{6} x^6 = h. \quad (3)$$

* 国家自然科学基金(批准号 69872012)及吉林省科技发展计划(批准号 20020626)资助的课题.

当 $\varepsilon = 0$ 且

$$\begin{cases} \dot{x} = y = 0, \\ \dot{y} = x^3 - x^5 = 0 \end{cases}$$

时,解得三个不动点为 $(0, 0)$ $(1, 0)$ $(-1, 0)$.

假设系统的特征根为 λ , 则系统的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 3x^2 - 5x^4 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 = 3x^2 - 5x^4.$$

当不动点为 $(\pm 1, 0)$ 时, $\lambda = \pm\sqrt{2}i$, 所以 $(\pm 1, 0)$ 为中心. 当不动点为 $(0, 0)$ 时, $\lambda = 0$, 讨论 $(0, 0)$ 属于何种奇点. 作 Briot-Bouquet 变换, $y = \eta x$, 将 (x, y) 平面上的复杂奇点分解成 (x, η) 平面上的较简单奇点. 当 $\varepsilon = 0$ 时, 方程组 (2) 可化成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3 - x^5. \end{cases} \quad (4)$$

因为表达式 $(x^3 - x^5)$ 中不包含因子 y , 所以 $(0, 0)$ 为孤立奇点, (4) 式可以写成

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = a_n x^3 (1 - x^2). \end{cases} \quad (5)$$

假定 $a_n = 1$, $h(x) = -x^2$, $n = 3$, 则 $(0, 0)$ 的性质由 n 决定. 因为 $n = 3 = 2 \times 1 + 1$, 根据 Briot-Bouquet 引理^[16]可知, 当 $a_{2 \times 1 + 1} > 0$ 时, 奇点 $(0, 0)$ 为鞍点.

由上述分析可知, 当 $h = 0$ 时, 存在两条连结鞍点的同宿轨道, 其表达式为

$$\begin{cases} x_0(t) = \pm \sqrt{\frac{6}{3t^2 + 4}}, \\ y_0(t) = \mp \frac{3\sqrt{6}t}{(3t^2 + 4)^{3/2}}. \end{cases} \quad (6)$$

计算 Melnikov 函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(q_0(t)) \wedge g(q_0(t), t + t_0) dt,$$

由方程 (2)

$$\mathcal{F}(x) = \begin{bmatrix} y \\ -x^3 + x^5 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -ky + f \cos(\omega t) \end{bmatrix},$$

所以

$$M(t_0) = -\frac{3\sqrt{3}\pi k}{32} \pm f \frac{12\sqrt{6}\omega\pi^2}{(3\pi^2 + 16\omega^2)^{3/2}} \sin(\omega t_0). \quad (7)$$

令 $M(t_0) = 0$ 得

$$\frac{3\sqrt{3}\pi k}{32} = f \frac{12\sqrt{6}\omega\pi^2}{(3\pi^2 + 16\omega^2)^{3/2}} \sin(\omega t_0),$$

解得

$$\sin(\omega t_0) = \frac{\sqrt{2}\pi k (3\pi^2 + 16\omega^2)^{3/2}}{256\omega\pi f}.$$

由于 $|\sin(\omega t_0)| \leq 1$, 所以

$$\left| \frac{\sqrt{2}k (3\pi^2 + 16\omega^2)^{3/2}}{256\omega\pi f} \right| \leq 1. \quad (8)$$

又因为

$$\frac{dM(t_0)}{dt_0} = f \frac{12\sqrt{6}\omega^2\pi^2}{(3\pi^2 + 16\omega^2)^{3/2}} \cos(\omega t_0),$$

若使 $\frac{dM(t_0)}{dt_0} \neq 0$, 则必须 $\cos(\omega t_0) \neq 0$, 所以

$$\sin(\omega t_0) \neq 1. \quad (9)$$

由 (8) 和 (9) 式得

$$\left| \frac{\sqrt{2}k (3\pi^2 + 16\omega^2)^{3/2}}{256\omega\pi f} \right| < 1. \quad (10)$$

由 Melnikov 方法^[17], 对于充分小的 ε , 系统 (1) 相应的 Poincaré 映射中, 稳定不变流形与不稳定不变流形二者必然相交, 即此时必然出现横截同宿点, 系统出现混沌解. 阈值为

$$R(\omega) = \frac{f}{k} = \left| \frac{\sqrt{2} (3\pi^2 + 16\omega^2)^{3/2}}{256\omega\pi} \right|. \quad (11)$$

可见, 无论 k 取何值, 由 (11) 式总存在一个阈值 f_c , 当 f 超过 f_c 时, 系统进入混沌状态, 这一过程随 f 的变化非常迅速. f 在很大范围内, 系统都处于混沌状态. 直到大于另一阈值 f_d 时, 系统进入大尺度周期运动. 可通过实验由计算机预先确定 f_d 和 k 的关系. f_d/k 的解析解为一常数^[18], 实验结果证实 k 的取值范围为 0.2—0.5, f_d/k 近似为一常数 1.45. 选定 k , 调整参数 f 到临界信号幅值 f_d , 当信号幅度值 f 小于 f_d 时, 系统处于混沌态; 当信号幅度值 f 大于 f_d 时, 系统变为大尺度周期状态. 利用系统相平面轨迹由混沌运动状态到大尺度周期运动状态的相变将被测正弦信号检测出来, 同时由系统的临界幅值 f_d 确定出待测信号的幅值.

3. 噪声对混沌检测方法的影响

系统由混沌状态跃迁到稳定的周期运动状态, 在没有噪声的情况下, 周期轨道应该是一理想的环, 但由于噪声的影响, 该环的边界显得有些粗糙. 我们应用随机微分方程理论, 分析噪声对混沌检测的影响.

用 $\Delta x(t)$ 表示噪声对 $x(t)$ 的小扰动, 从而得出在噪声存在的条件下系统的微分方程为

$$\begin{aligned} (\ddot{x} + \Delta\ddot{x}) + k(x + \Delta x) - (x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x)^5 \\ = f \cos(\omega t) + n(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $n(t)$ 为噪声, $E\{n(t)\} = 0$ (12) 式减去 (1) 式, 由于 Δx 很小, 可以略去 Δx 的高阶项, 得

$$\Delta \ddot{x} + k\Delta \dot{x} + 3x^2\Delta x - 5x^4\Delta x = n(t),$$

并令 $c(t) = 5x^4 - 3x^2$, 得

$$\Delta \ddot{x} + k\Delta \dot{x} - c(t)\Delta x = n(t). \quad (13)$$

将 (13) 式写成矢量微分方程的形式

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + N(t), \quad (14)$$

其中

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & -k \end{bmatrix},$$

$$N(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ n(t) \end{bmatrix}.$$

它的解为

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, u)N(u)du,$$

其中 Φ 为系统的状态转移矩阵. 由于第一项为暂态解, 将很快衰减为零, 故只须考虑第二项, 因此得

$$X(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, u)N(u)du, \quad (15)$$

$$E\{X(t)\} = \int_{t_0}^t \Phi(t, u)E\{N(u)\}du = 0. \quad (16)$$

可见, 在统计的意义下, 任何零均值色噪声都不会改变系统原有运行轨迹, 仅仅会使系统的运行轨迹变得粗糙些, 在理想轨迹附近摆动. 注意到上述推导没有涉及到噪声分布性质, 因此该方法对任意分布的零均值噪声同样适用.

4. 仿真实验

考虑如下混沌检测系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega \cdot y, \\ \dot{y} = \left(-ky + x^3 - x^5 + f\cos(\omega t) + \mu_A A\cos(\omega t) \right. \\ \quad \left. + \mu_B B_s(\omega t) \right) \frac{1}{\omega} + z_s, \end{cases}$$

其中 k 为阻尼比, $f\cos(\omega t)$ 为系统内置信号, $A\cos(\omega t)$ 为待测周期正弦信号, $B_s(\omega t)$ 为待测方波信号 (作为畸变的正弦信号), μ_A, μ_B 为放大器增益, z_s 为噪声. 首先调整 $f = f_d$, 系统处于混沌临界状态 (由混沌态变至周期态的边界). 待测正弦信号输入该混沌检测系统, 根据系统相轨迹的变化, 判断输入的信号是纯粹的噪声还是带有微弱的正弦信号.

实验 1 正弦信号 $A\cos(\omega t)$ 混有 Gauss 白噪声 z_s

令正弦信号放大器增益 $\mu_A = 0$, 方波信号放大器增益 $\mu_B = 0$, 调整系统内置信号幅值为 $f_d = 0.72561712V$ 时, 系统进入混沌临界状态, 如图 1 所示. 此时不加任何外部信号, 只将 z_s 作为 Gauss 白噪声并入系统, 不断调大 z_s 的功率, 系统仍然处于混沌状态不变 (此时 Gauss 白噪声 z_s 的功率为 $7 \times 10^{-8} W$). 可见噪声虽然强烈, 但是奇怪吸引子仍能相点束缚在轨道内, 说明混沌系统对噪声有一定免疫力. 令 $f = 0$, 调整正弦信号放大器增益 μ_A , 使 $\mu_A A_\Delta = f_d$, 则待测正弦信号幅值 $A_\Delta = \frac{f_d}{\mu_A} \approx 10^{-9} V$.

令正弦信号放大器增益 $\mu_A = 1$, 使 $A = f_d + A_\Delta = 0.72561712 + 10^{-9} V$, 发现系统相轨迹立刻发生变化, 由混沌状态跃迁到大尺度周期状态 (图 2). 可见对正弦信号的检测下限为 $A_\Delta = 10^{-9} V$, 此时噪声功

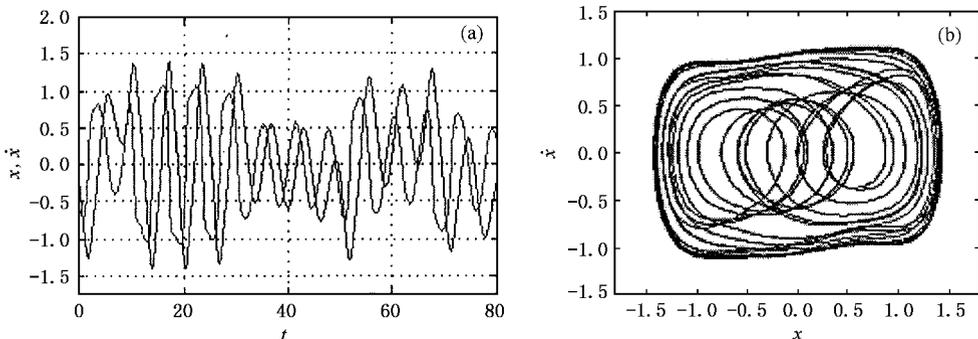


图 1 混沌临界状态的时域曲线及与之对应的相平面轨迹

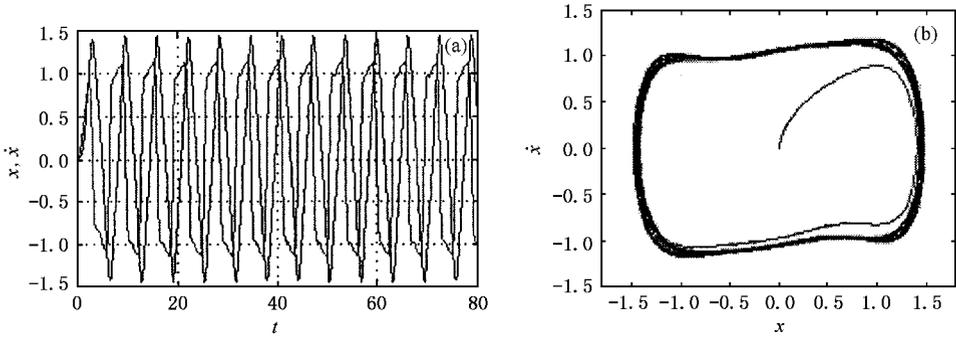


图2 大尺度周期状态的时域曲线及与之对应的相平面轨迹

率为 $7 \times 10^{-8} \text{ W}$. 所以该混沌检测系统最低检测下限为

$$20 \lg(10^{-9}) = -180 \text{ dB},$$

检测信噪比下限为

$$\text{SNR} = 10 \lg\left(\frac{\text{周期信号功率}}{\text{噪声功率}}\right) \approx -111.46 \text{ dB}.$$

实验2 正弦信号 $A \cos(\omega t)$ 中混有 Gauss 色噪声 z_s

我们用方差为 1 的 Gauss 白噪声通过一个四阶带通滤波器产生 Gauss 色噪声. 该滤波器的传递函数为

$$H(z) =$$

$$\frac{0.0201(1 - 2z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}},$$

滤波器的上限截止频率为 0.2Hz, 下限截止频率为 0.15Hz(均为归一化频率).

首先令正弦信号放大器增益 $\mu_A = 0$, 周期方波信号放大器增益 $\mu_B = 0$, 不加入任何外部信号, 调整系统内置信号幅度 $f = f_d$, 计算机判断系统处于混沌临界状态. 然后将 Gauss 色噪声并入系统, 发现系统相轨迹仍处于混沌状态(此时噪声功率为 $7 \times 10^{-8} \text{ W}$). 令系统内置信号 $f = 0$, 调整待测正弦信号放大器增益 μ_A , 使 $\mu_A A_\Delta = f_d$, 则待测正弦信号幅值 $A_\Delta = \frac{f_d}{\mu_A} \approx 10^{-9} \text{ V}$. 可见该混沌系统在背景噪声为 Gauss 色噪声时, 检测下限也可以达到 1nV, 且信噪比基本不变(与加白噪声相比).

实验3 畸变的正弦信号中混有 non-Gauss 色噪声

我们用方差为 1 的 non-Gauss 白噪声通过一个

四阶带通滤波器产生 non-Gauss 色噪声. 该滤波器的传递函数为

$$H(z) =$$

$$\frac{0.0201(1 + 2z^{-2} - 1.23z^{-4})}{1 - 2.981z^{-1} + 2.037z^{-2} - 3.192z^{-3} + 0.0145z^{-4}},$$

滤波器的上限截止频率为 0.21Hz, 下限截止频率为 0.23Hz(均为归一化频率).

这里将方波信号作为畸变的正弦信号进行检测. 首先令正弦信号放大器增益 $\mu_A = 0$, 周期方波信号放大器增益 $\mu_B = 0$, 调整系统内置正弦信号幅度 $f = f_d$, 使系统的相轨迹为混沌临界状态. 然后将 $z_s = 7 \times 10^{-8} \text{ W}$ 作为 non-Gauss 色噪声并入系统, 发现系统相轨迹仍处于混沌状态. 调整方波信号放大器增益 μ_B , 使 $\mu_B B_\Delta = f_d$, 则待测方波信号幅值 $B_\Delta = \frac{f_d}{\mu_B} \approx 10^{-8} \text{ V}$. 检测信噪比下限约为 -88.45 dB , 可见对于畸变的正弦信号, 在 non-Gauss 色噪声背景下检测效果也令人满意.

5. 结 论

本文提出了用于零均值色噪声背景下检测微弱谐波信号的特定混沌检测系统, 并应用 Melnikov 函数分析了依据混沌系统相轨迹变化进行微弱信号检测的原理及方法, 论证了该系统对噪声具有较为广泛的适应性. 仿真实验结果表明, 上述混沌检测方法可行.

- [1] Leung H and Lo T 1993 *IEEE J. Oceanic Engin.* **18** 287
- [2] Leung H *et al* 1987 *IEEE Trans. Neural Networks* **12** 1133
- [3] Short K M 1994 *Int. J. Bif. Chaos* **4** 959
- [4] Wang G R *et al* 2001 *Control, Synchronization and Application for Chaos* (Beijing :Publishing House of National Defence Industry) p190—198 in Chinese] 王光瑞等 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第 190—198 页]
- [5] Birx D I 1992 *IEEE Int. Joint Conf. Neural Networks* **22** 881
- [6] Haykin S and Li X B 1995 *Proc. IEEE* **83** 94
- [7] Leung H and Phuang X 1996 *IEEE Trans. Sig. Pig. Proc.* **44** 2456
- [8] Short K M 1997 *Int. J. Bif. Chaos* **7** 1579
- [9] Kennedy M P 2000 *Sig. Proc.* **80** 1307
- [10] Gay F 2000 *PhD Thesis* Metiers Paris France p36—38
- [11] Wang G Y *et al* 1999 *IEEE Trans. Indus. Electron.* **46** 440
- [12] Wang F P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1019 in Chinese] 汪芙蓉等 2001 物理学报 **50** 1019]
- [13] Wang F P *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 474 in Chinese] 汪芙蓉等 2002 物理学报 **51** 474]
- [14] Li G H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 736 in Chinese] 李国辉等 2002 物理学报 **51** 736]
- [15] Guan X P *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 753 in Chinese] 关新平等 2002 物理学报 **51** 753]
- [16] Sansone G and Conti R 1964 *Nonlinear Differential Equations* (Florence :Pergamon)
- [17] Nayfeh A H and Mook D T 1979 *Nonlinear Oscillations* (New York : Wiley) p67—69
- [18] Liu Z R 1994 *Peerturbation Criteria for Chaos* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p44 in Chinese] 刘曾荣 1994 混沌的微扰判据(上海:上海科技教育出版社)第 44 页]

Chaos-based weak sinusoidal signal detection approach under colored noise background^{*}

Li Yue¹⁾ Yang Bao-Jun²⁾ Shi Yao-Wu¹⁾

¹⁾ College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130012, China)

²⁾ College of Geo-Exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China)

(Received 13 June 2002 ; revised manuscript received 1 August 2002)

Abstract

In this paper we consider a new weak signal detection scheme which uses the sensitivity of chaos to the parameters under a certain status to realize weak signal detection. This scheme can effectively extract the weak sinusoidal signal from the strong colored noise background. We present a chaos-based signal detection approach, analyze the influence of noise to the system status in the chaos detection process. Simulation experiments show that the chaos detection system is very sensitive to weak signal and have strong constraint to any colored noise with zero mean value.

Keywords : weak sinusoidal signal, chaos detection, colored noise, signal-to-noise ratio

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No.69872012), and the Foundation for Development of Science and Technology, Jilin Province, China(Grant No.20020626).