

状态反馈和参数调整控制离散非线性系统的倍周期分岔和混沌*

罗晓曙¹⁾²⁾ 陈关荣¹⁾ 汪秉宏²⁾ 方锦清⁴⁾ 邹艳丽³⁾ 全宏俊⁵⁾

¹⁾ 香港城市大学电子工程系, 香港 九龙)

²⁾ 中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

³⁾ 广西师范大学物理与电子科学系, 桂林 541004)

⁴⁾ 中国原子能科学研究院, 北京 102413)

⁵⁾ 华南理工大学应用物理系, 广州 510641)

(2002 年 8 月 12 日收到, 2002 年 9 月 18 日收到修改稿)

利用系统的状态反馈和参数调节的方法, 有效地实现了离散非线性动力系统的倍周期分岔的延迟控制和混沌吸引子中不稳定周期轨道的控制. 同时, 通过选择合适的调控参数, 可以将系统从一个 2^n 周期轨道控制到 2^m ($m < n$) 周期轨道.

关键词: 状态反馈, 参量调节, 混沌控制, 分岔控制

PACC: 0525, 4265

1. 引 言

20 世纪 90 年代以来, 由于混沌控制具有深刻的理论意义和广泛的应用前景而备受关注^[1-12]. 一方面混沌控制的研究加深了人们对混沌的本质认识和基本的物理理解; 另一方面混沌控制的研究成果在许多工程领域中得到应用或提供了解决问题的新思路、新途径. 如人体生物学中的心律不齐控制; 电路系统中因混沌运动导致反常大幅度噪声的消除, 避免机械运动中因混沌行为导致不规则运动, 而使零部件过早因疲劳磨损而损坏等. 在已提出的混沌控制理论与方法中, 有两种主要的控制策略: 一是通过参数调控达到对混沌行为的控制, 如 Ott-Grebo-gi-York(缩写为 OGY)控制法^[1], 参数共振法^[2]; 二是状态变量反馈法, 如偶然正比反馈技术^[3], 延迟反馈法^[4], 正比变量脉冲反馈法^[5], 线性反馈法^[6]等. 这两种策略各有优势与不足, 文献 [13-15] 对此进

行了详细的评述.

本文采用系统变量的状态反馈和参数调节的控制策略, 控制离散非线性动力系统的倍周期分岔和混沌吸引子中不稳定的周期轨道. 理论分析和数值研究表明, 这种控制策略有三个明显的优点: 一是能稳定嵌套在混沌吸引子中的不稳定周期轨道. 二是能控制发生在非线性离散系统中的倍周期分岔, 通过延迟和抑制分岔, 可以确保在较宽的参数范围内达到规则行为(如各种周期态). 对于很多由倍周期分岔通向混沌的非线性系统, 抑制分岔的发生, 即意味着消除或延迟出现混沌, 从而达到混沌控制的目的. 其三, 这种控制策略可以将系统从一个 2^n 周期轨道控制到 2^m ($m < n$) 周期轨道.

2. 控制方法

考虑如下的 n 维离散非线性动力系统

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad (1)$$

* 广西自然科学基金(批准号: 0135063), 国家重点基础研究发展规划项目“非线性科学中的前沿问题研究”, 香港 CERC(批准号: 9040579) 国家自然科学基金(批准号: 10247005, 19932020, 19974039, 19875080 和 70071047) 资助的课题.

式中 $x_k \in R^n$, $k \in z$, $\mu \in R$ 为分岔参数, 参数 μ 变化时, 系统 (1) 发生一系列倍周期分岔, 直至混沌. 我们的控制目标是: 设计控制规律, 控制给定周期轨道的稳定性, 使得在较大的参数范围内维持所需的周期轨道, 或者镇定混沌吸引子中的不稳定周期轨道. 为此, 我们对系统 (1) 采用如下的参数调节和状态反馈控制策略:

$$x_{k+m} = \alpha f^m(x_k, \mu) + (1 - \alpha)x_k, \quad (2)$$

式中 $0 < \alpha < 1$, m 为某个正整数, $f^m(\cdot)$ 是映射 $f(\cdot)$ 的 m 次复合函数, $\alpha = 1$ 时, 受控系统 (2) 退化为原系统 (1).

定理 1. 受控系统 (2) 与原系统 (1) 有相同的 m 周期轨道.

证: 系统 (1) 式经过 m 次迭代后为

$$x_{k+m} = f^m(x_k, \mu). \quad (3)$$

当系统 (1) 有 m 周期轨道时, 则 $x_{k+m} = x_k$, 令 $x_{k+m} = x_k = x$ ($x \in R^n$) 则由 (3) 式可得原系统的 m 周期轨道满足的方程为

$$x = f^m(x, \mu). \quad (4)$$

同理, 当受控系统具有 m 周期轨道时, 由 (2) 式得其 m 周期轨道满足的方程为

$$y = \alpha f^m(y, \mu) + (1 - \alpha)y, \quad (5)$$

即

$$y = f^m(y, \mu). \quad (6)$$

由 (4) (6) 两式可知, 原系统 (1) 和受控系统 (2) 的 m 周期轨道满足相同的方程, 定理得证.

为了便于理解本文的理论分析和数值模拟结果, 有必要对 (2) 式所示的控制方式作进一步的分析: 当 $m = 1$ 时, 即控制不动点, 每步迭代都加入控制, 即控制是采用连续控制方式; 当 $m > 1$ 时, 由于 $f(\cdot)$ 每经过 m 次迭代才加入一次控制, 故控制是采用脉冲方式.

我们首先讨论 $m = 1$ (不动点) 的稳定性控制条件. $m > 1$ 的情形将结合数值研究进行具体讨论. 对于原系统 (1) 式, 不动点处的线性化矩阵为

$$J_1 = \left. \frac{\partial f(x_k, \mu)}{\partial x_k} \right|_{x_k = x^*}, \quad (7)$$

不动点 x^* 稳定的条件为: J_1 的所有特征值 $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 由此条件可得出不动点 x^* 稳定时参数 μ 的取值范围.

受控系统 (2) 式在不动点处的线性化矩阵为

$$J_2 = \alpha \left. \frac{\partial f(x_k, \mu)}{\partial x_k} \right|_{x_k = x^*} + (1 - \alpha). \quad (8)$$

由于 J_2 中引入了调节参数 α , 故只要选择适当的 α 值, 就可以确保即使在不动点 x^* 失稳的 μ 值范围内, 亦可满足 J_2 的所有特征值 $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 从而使不动点 x^* 在更大的参数范围内保持稳定, 延迟分岔的发生. 下面我们以 Logistic 映射和 Hénon 映射为例研究上述控制策略的有效性和 α 的取值范围.

3. 控制 Logistic 映象的分岔和混沌

在一维映射中, Logistic 映射是典型的由倍周期分岔到混沌的模型, 它的表述形式为

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2, \quad \mu \in (0, 2], \quad (9)$$

(9) 式有两个不动点, 分别为 $x^* = \frac{\sqrt{1+4\mu}-1}{2\mu}$, $\bar{x}^* = \frac{-(1+\sqrt{1+4\mu})}{2\mu}$, 可以证明 \bar{x}^* 是不稳定不动点.

根据有关文献的结果^[6]可知: 当 $0 < \mu < 3/4$ 时, 不动点 x^* 是稳定不动点, $\mu = \mu_{c1} = 3/4$ 时, 发生第一次倍周期分岔, 出现交替的 2 周期点 $x_1^* = \frac{1-\sqrt{4\mu-3}}{2\mu}$, $x_2^* = \frac{1+\sqrt{4\mu-3}}{2\mu}$; 当 $3/4 < \mu < 5/4$ 时, 2 周期点 x_1^* , x_2^* 轨道是稳定的; $\mu = \mu_{c2} = 5/4$ 时, 发生第二次倍周期分岔, 出现交替的 4 周期点. μ 继续增加, 出现稳定的 8, 16, ..., 2^n 周期点, 但周期轨道稳定时对应的参数 μ 的取值范围越来越小, 直到混沌. 下面讨论利用 (2) 式表达的控制方法, 研究 Logistic 映射的分岔、混沌控制.

3.1. Logistic 映射倍周期分岔延迟的控制

根据 (2) 式表达的控制策略, $m = 1$ 时, 受控后的 Logistic 映射为

$$x_{k+1} = \alpha(1 - \mu x_k^2) + (1 - \alpha)x_k. \quad (10)$$

受控系统不动点 x^* 的稳定性条件由 (8) 式决定, 即

$$|1 - 2\alpha\mu x^* + 1 - \alpha| < 1. \quad (11)$$

由定理 1 可知, 受控系统 (10) 与原系统 (9) 有相同的周期为 1 的解, 即不动点 x^* . 将 $x^* = \frac{\sqrt{1+4\mu}-1}{2\mu}$ 代入 (11) 式, 得 x^* 稳定时的参数条件为

$$0 < \mu < \mu_{c1} + \frac{1}{\alpha^2} - 1, \quad (12)$$

式中 $\mu_{c1} = 3/4$. 当 $\alpha = 1$ 时, $0 < \mu < 3/4$, 与原系统不动点 x^* 的稳定参数范围相同. 这是必然的结果, 因

为 $\alpha = 1$ 时,受控系统退化为原系统.由于 $0 < \alpha < 1$, 有 $\alpha^{-2} - 1 > 0$,故受控制系统的不动点 x^* 的稳定参数范围大于原系统不动点 x^* 的稳定参数范围.例如 $\alpha = 0.9$ 时,受控系统发生第一次倍周期分岔的临界值为 $\mu_c = \mu_{c1} + \alpha^{-2} - 1 = 0.98 > 0.75$,如图 1(a) 的所示.考虑到 $0 < \mu \leq 2$ 结合(12)式可得,当 $0 < \alpha \leq 2/3$ 时,不动点 x^* 在 $\mu \in (0, 2]$ 的整个取值范围内均稳定,如图 1(b)所示.由图 1(a)和 1(b)可知,受控 Logistic 映射的分岔被推迟或完全消除,从而能推迟或阻止混沌运动的出现.

同理,可得当受控系统(2)式中 $m = 2$ 时,2 周期点 x_1^*, x_2^* 稳定的参数条件为

$$\frac{3}{4} < \mu < \mu_{c2} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}, \quad (13)$$

式中 $\mu_{c2} = 5/4$.当 $\alpha = 1$ 时,受控系统退化为原系统,2 周期点 x_1^*, x_2^* 稳定的参数范围为 $3/4 < \mu < 5/4$,与原系统的 2 周期点的参数稳定范围相同.

由于 $0 < \alpha < 1$,有 $\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} > 0$,故受控 Logistic 映射的 2 周期点 x_1^*, x_2^* 稳定参数范围被扩大,如图 2(a)所示.考虑到 $\mu \leq 2$,可得调节参数 α 满足 $0 < \alpha \leq 0.4$ 时,2 周期点 x_1^*, x_2^* 在 $\mu \in (3/4, 2]$ 的整个取值范围内稳定.如图 2(b)所示.对于 4 周期点,8 周期点...等亦可采用类似方法得到其稳定参数范围的取值区间.

3.2 混沌吸引子中不稳周期轨道的控制和不同周期轨道的转变控制

控制嵌入在混沌吸引子中的不稳定周期轨道是混沌控制的一个主要目标.对于 Logistic 映像, $\mu = 1.9$ 时为混沌运动,不稳不动点为 $x^* = 0.50857$,由其稳定性条件(12)式得 $0 < \alpha < 0.68199$ 时, x^* 能变成稳定,控制结果如图 3(a)所示.同理,当 $0 < \alpha < 0.43478$ 时,能实现混沌吸引子中不稳的 2 周期轨道的稳定控制,其控制结果如图 3(b)所示.仿真表明:当 Logistic 映像的参数 μ 取值使其工作于 2^n 周期轨道区,采用(2)式的控制策略,可使系统被控制到 2^{n-k} ($k = 1, 2, \dots, n$) 周期轨道.例如 $\mu = 1.3$ 时, Logistic 映像有稳定的 4 周期轨道,当 $0 < \alpha < 0.8032$ 和 $0 < \alpha < 0.909$ 时,可使系统分别由稳定的 4 周期轨道转变到稳定的 1 周期和 2 周期轨道,其控制结果

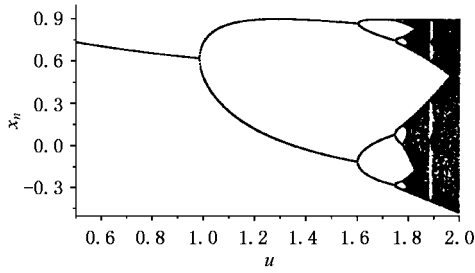
如图 4(a)和(b)所示.

我们用上述控制方法研究了 Hénon 映像的分岔和混沌控制.理论分析和数值研究结果表明:本文的控制方法对二维离散非线性系统的分岔和混沌控制也是有效的.限于篇幅,分析和控制结果略.

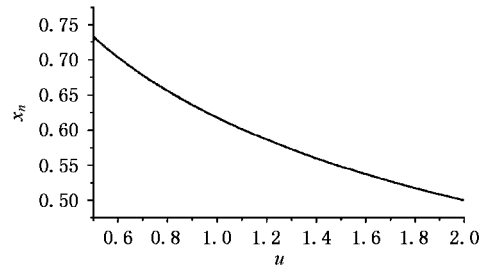
4. 结论与讨论

本文采用参数调节和状态反馈的控制策略,有效地实现了离散非线性系统的倍周期分岔控制和混沌控制.它的控制性能优于基于参数微调的 OGY 方法,因为 OGY 方法主要稳定嵌套在混沌吸引子中的不稳定周期轨道,一般也只能稳定低周期轨道,而且要求系统必须具有鞍型不动点.而本文方法则没有这些限制.用这种控制策略不仅可以稳定混沌吸引子中的失稳不动点,也能稳定较高的周期轨道,而且可以稳定通向混沌道路上周期加倍分岔中参数值所对应的系统失稳的 2^n 周期轨道,还可以将系统从 2^n 周期轨道控制到 2^{n-k} ($k = 1, 2, \dots, n$) 周期轨道上去.文献[17]利用动力学状态反馈方法,可以达到消除或推迟倍周期分岔的目的,但这种仅用状态反馈的策略只能实现系统低周期轨道的控制,系统的瞬态混沌和高周期轨道将被改变,因为他们在反馈中应用了“淘汰滤波器”.在本文方法中,定理 1 保证了所有达到稳定控制的周期轨道(不论是低周期还是高周期),都是原系统内的不稳定周期轨道,即这种控制策略不改变系统的瞬态混沌和高周期轨道.

对于 Logistic 映像的不动点和 2 周期轨道的控制,文中(12)和(13)式给出的参数取值范围存在公共区间.例如对于不动点的控制,当 $0 < \alpha \leq 2/3$ 时,不动点 x^* 在 $\mu \in (0, 2]$ 的整个取值区间内都稳定,而对于 2 周期点的控制,当 $0 < \alpha \leq 2/5$ 时,2 周期轨道在 $\mu \in (0, 2]$ 的整个取值区间内都稳定,这似乎会导致控制结果出现不确定性,即出现多重稳态解.然而,由于对不动点的控制和对 m ($m > 1$) 周期轨道的控制,其控制方式是不同相的,如前所述,对不动点的控制是连续控制方式,而对 m ($m > 1$) 周期轨道的控制是脉冲控制方式,因此, α 的取值若在两者稳定的公共区间内,由于控制方式不同,仍会得到预期的控制结果,而不会导致多重稳态解.

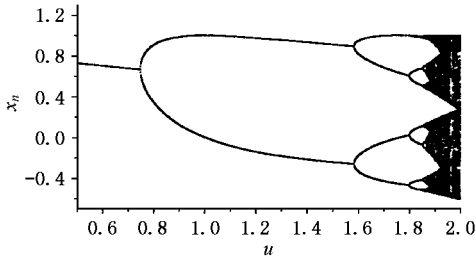


(a)为 $\alpha = 0.9$

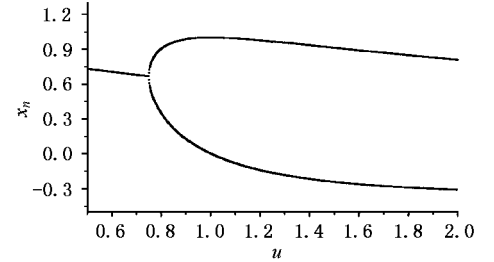


(b)为 $\alpha = 2/3$

图 1 Logistic 映射第一次倍周期分岔延迟控制的结果

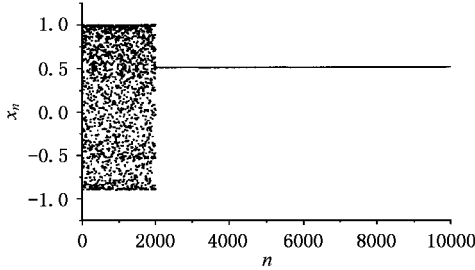


(a)为 $\alpha = 0.6$

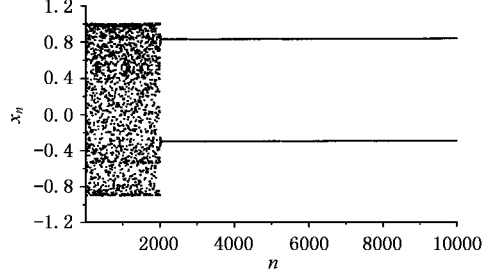


(b)为 $\alpha = 0.4$

图 2 Logistic 映射第二次倍周期分岔延迟控制的结果

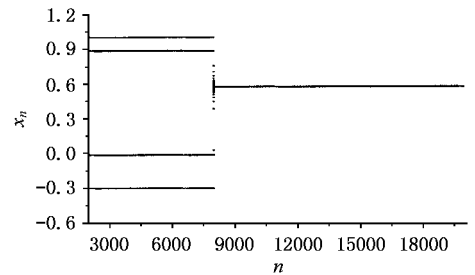


(a)为 $\alpha = 0.5$

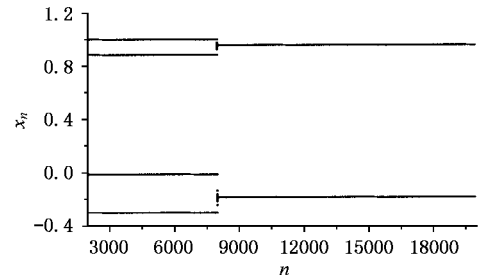


(b)为 $\alpha = 0.4$

图 3 Logistic 映射混沌吸引子中失稳不动点和 2 周期轨道的稳定控制结果($\mu = 1.9$)



(a)为 $\alpha = 0.75$



(b)为 $\alpha = 0.8$

图 4 Logistic 映射 4 周期轨道的转变控制结果($\mu = 1.3$)

- [1] Ott E , Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Lima B and Pettini M 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2545
- [3] Hunt E R 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 1953
- [4] Chen G and Yu X H 1999 *IEEE Trans. Circuit and System* **46** 767
- [5] Matias M A and Gumez J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1145
- [6] Liu Y , Barbosa L C and Rios Leite J R 1994 *Phys. Lett. A* **193** 259
- [7] Li W and Chen S G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1434 (in Chinese) [李伟、陈式刚 2001 物理学报 **50** 1434]
- [8] Luo X S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 402 (in Chinese) [罗晓曙 1999 物理学报 **48** 402]
- [9] Wang R and Shen K 2001 *Chin. Phys.* **10** 711
- [10] Chen Y Y and Peng J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1434 (in Chinese) [陈艳艳、彭建华 2001 物理学报 **50** 1434]
- [11] Li W and Chen S G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1682 (in Chinese) [李伟、陈式刚 2001 物理学报 **50** 1682]
- [12] Chen G R , Fang J Q and Hong Y G 1999 *Chin. Phys.* **8** 416
- [13] Wang G R , Yu X L and Chen S G 2001 *Control and Synchronization of Chaos and Its Application* (Beijing : Press of Defense industry) p172 (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与应用 (北京 : 国防工业出版社) 第 172 页]
- [14] Hu G 2000 *Controlling Chaos* (Shanghai : Press of Shanghai Education of Science and Technology) p54 (in Chinese) [胡岗 2000 混沌控制 (上海 : 上海科技教育出版社) 第 54 页]
- [15] Fang J Q. 1996 *Progr. Phys.* **16** 21 (in Chinese) [方锦清 1996 物理学进展 **16** 21]
- [16] Wang G R and Chen G Z 1995 *Chaotic Motion in Nonlinear Constant Differential Equation* (Guilin : Press of Guangxi Science and Technology) p89 (in Chinese) [王光瑞、陈光旨 1995 非线性常微分方程的混沌运动 (桂林 : 广西科学技术出版社) 第 89 页]
- [17] Abed F H , Wang H O and Chen R C 1994 *Physica . D* **70** 154

Control of period-doubling bifurcation and chaos in a discrete nonlinear system by the feedback of states and parameter adjustment^{*}

Luo Xiao-Shu^{1,2,3)} Chen Guan-Rong¹⁾ Wang Bing-Hong²⁾
Fang Jin-Qing⁴⁾ Zou Yan-Li³⁾ Quan Hong-Jun⁵⁾

¹⁾ Department of Electronic Engineering , City University of Hong Kong , Kowloon , Hong Kong , China)

²⁾ Department of Modern Physics , University of Science and Technology of China , Hefei 230026 , China)

³⁾ Department of Physics and Electronic Science , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China)

⁴⁾ China Institute of Atomic Energy , Beijing 102413 , China)

⁵⁾ Department of Applied Physics , South China University of Technology , Guangzhou 510641 , China)

(Received 12 August 2002 ; revised manuscript received 18 September 2002)

Abstract

In this paper , the control of delaying period-doubling bifurcations and unstable periodic orbits embedded in a chaotic attractor of a discrete nonlinear dynamical system is effectively realized by using the state variables feedback and parameter variation. Moreover , the 2^n periodic orbits of the system can be controlled into the 2^m ($m < n$) periodic orbits by the methods proposed.

Keywords : feedback control , parameter variation , chaos control , bifurcation control

PACC : 0525 , 4265

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Guangxi Province of China (Grant No. 0135063) , by the state Key Development Program for Basic Research of China " The Frontier Problems of Nonlinear Science " , the Hong Kong CERCA (Grant No. 9040579) , by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10247005 , 19932020 , 19974039 , 19875080 and 70071047) .