

# 柱环腔中的量子电动力学效应\*

蒋维洲 傅德基 王震遐 艾小白 朱志远

(中国科学院上海原子核研究所核物理室, 上海 201800)

(2002 年 6 月 21 日收到, 2002 年 7 月 28 日收到修改稿)

研究以同轴不同半径柱面围成的导体柱环腔体中电磁场真空零点振动模式所给出的宏观量子效应. 零点振动模式通过求解柱环空腔边界条件下无源的 Maxwell 方程组获得. 得到了双柱面同心柱环中单位长度和单位面积的且是有限的真空能量, 即 Casimir 能量. 这有限的 Casimir 能量可以分解为独立而且收敛的三部分, 它们分别来自内柱面、外柱面和柱环之中. 对多柱面同心柱环, Casimir 能量可分解为独立的  $(2n-1)$  部分 ( $n$  为柱面数). 柱环是类似于平行板的几何结构, 但柱环所给出的 Casimir 能量和 Casimir 势能系数是随着柱环间隔变化的, 不同于平行板是常数的情况. 这相对于平行板几何具非平凡性质的 Casimir 能量将产生一个平行板几何中所没有的附加的一项 Casimir 力.

关键词: Casimir 效应, 柱环腔体, 零点能, 量子电动力学

PACC: 1220D, 4250, 1110

## 1. 引 言

导体空腔存在宏观量子效应, 可用真空谐振子零点振动能解释<sup>[1,2]</sup>. 从原子、分子、凝聚态到晶体, 归根到底, 都是通过电磁力发生相互作用并由电磁相互作用造化成千差万别的介观物质结构. 即使不带电的原子, 也会因为自发极化而有瞬时电矩, 因之而有电场, 而引发相互作用. van der Waals 力是分子之间的相互作用力, 它禀源于电磁相互作用, 自发的电偶矩-电偶矩相互作用是其微观起源<sup>[3]</sup>. Casimir 等<sup>[4]</sup>发现长程 van der Waals 力与距离的七次方成反比而且这一结论跟原子结构无关. 这种跟原子结构无关的普遍性, 恰是合理设想跟量子世界中普遍存在的真空零点能有关的理论依据. 事实上, 从真空零点能的物理绘景出发, 确实能导出长程 van der Waals 力的形式. 导体空腔缘何存在发源于真空零点能的量子宏观效应呢? 因为有真空零点振动, 可以设想真空中充盈各种频率的零点振动能量. 理想导体里面是不存在电磁场的, 这为导体腔中的电磁

振动模式提供了决定其频率的边界条件, 并使振动频率量子化, 使系统有  $(\sum_m \hbar\omega_m)/2$  的零点能, 从而导致可观察的宏观量子效应.

Casimir 首先应用真空零点振动的物理绘景预言了不带电导体平行板存在负的真空能量——Casimir 能量, 从而平行板受到吸引力, 而它是一种被广泛引用的 Casimir 效应<sup>[4,5]</sup>. 为什么存在负的 Casimir 能量呢? 从量子原理知道, 导体平行板存在时, 相当于给电磁波零点振动提供了边界条件, 频率离散量子化, 但离散频率求和是发散的, 怎样重整化呢? 当不存在平行板时, 零点振动频率是连续的, 离散频率求和与连续频率积分之差竟然产生有限的负能量. Casimir 效应是由真空零点振动引起的宏观量子效应. Casimir 效应在原子、凝聚态、粒子和引力物理中有着很广泛的应用, 同时, 它也促进了数学物理的一些发展. 特别是在介观尺度如微电子制造, Casimir 效应的重要性日渐被认识<sup>[2]</sup>.

平行板是最简单的几何结构. 从发现 Casimir 效应以来, 科学家们研究了更为复杂但规则的几何结构中的 Casimir 效应, 如导体球面腔<sup>[2,6]</sup>、长方体腔<sup>[7]</sup>

\* 中国科学院知识创新重要工程项目(批准号: KJXC2-N11), 中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号: 26010031)和国家重点基础研究发展规划(批准号: G2000077400)资助的课题.

和柱面腔<sup>[8,9]</sup>.但它们都发生了需要特别处理的发散问题,即 Casimir 能量是发散的.需要通过重整化把发散部分减除掉,重整化之前要通过正规化把发散部分分离出来.对这些几何结构的研究发现<sup>[2,10,11]</sup>,边界内外的 Casimir 能量的发散部分将自相抵消而不需要对消项(适用于薄腔面).

导体柱环腔体中的 Casimir 效应还没有被研究过.本工作研究导体柱环腔体中的真空能量和相应的 Casimir 效应.而柱环腔体是纳米结构较为普遍的结构,这是本工作研究柱环腔体的意义所在.本文将给出有关形式体系,包括柱面边界条件的 Maxwell 方程组和 Zeta 函数正规化方法<sup>[11,12]</sup>,研究柱环腔体中的 Casimir 能量并给出解析表达式,并进行数值计算,给出有关数值结果.

## 2. 形式体系

在不带电的导体空腔里,要研究的是无源电磁场的真空涨落.无源电磁场的行为由无源的 Maxwell 方程组决定.存在导体空腔的边界,电磁场是要量子化的.20 世纪初,Planck 引进了量子概念解决了黑体辐射问题.从此,量子概念深入人心,和相对论一道引发了物理学的革命.Casimir 效应是宏观量子效应.研究它的出发点是 Maxwell 方程组及其解在一定导体边界条件下的量子化.从量子化的电磁振动模式求和可以得到 Casimir 能量.为了解决求和中遇到的发散问题,还要对 Casimir 能量进行正规化.我们将依次给出柱面边界条件下的 Maxwell 方程组的解、Zeta 函数正规化方法、柱环几何结构的零点能、零点振动模式求和的数学实现和各种情况下的边界条件表示等.为简明扼要,将用尽可能少的公式详尽地说明物理问题.

### 2.1. 柱面边界的 Maxwell 方程组的解和电磁波模式

取自然单位制,匀质而无源(不带电)的 Maxwell 方程组为下面对称的形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2)$$

在自然单位制中,Planck 常量  $\hbar$  和光速  $c$  分别令为 1.在柱坐标系中, $E_z$  和  $B_z$  取如下解的形式:

$$E_z, B_z = e^{i\omega t} e^{ik_z z} e^{im\varphi} R(r), \quad (3)$$

而其他分量可用  $E_z$  和  $B_z$  表示出来(这里从略).因

为  $\omega > k_z$ ,可选一坐标系使  $k_z = 0$ ,从而达到简化方程的目的<sup>[9]</sup>.在柱坐标( $r, \varphi, z$ )中(1)和(2)式可分别明显地写出来:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} = -i\omega\beta_r, \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega\beta_\varphi, \\ \frac{1}{r} \left( \alpha \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = -i\omega\beta_z; \end{cases} \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} = i\omega E_r, \\ \frac{\partial B_z}{\partial r} = -i\omega E_\varphi, \\ \frac{1}{r} \left( \alpha \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) = i\omega E_z. \end{cases} \quad (4b)$$

从(4)式还不能马上看出  $E_z$  和  $B_z$  的解.从(1)和(2)式,可以得到 d'Alembert 行波方程

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

在柱坐标中, $u = E_z, B_z$  满足 Helmholtz 方程  $\Delta u + k^2 u = 0$ .利用(3)式, $R$  满足下列方程:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{dR}{r dr} + \left( \omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (6)$$

这是在  $k_z = 0$  的参照系, $R$  的解是  $m$  阶 Bessel 函数.对于导体柱面,其边界条件为

$$E_\varphi = E_z = 0, B_r = 0. \quad (7)$$

那么,在柱面内的电磁波模式( $\omega$ )由什么决定呢?对于横磁波(TM), $B_z$  通过方程(4b)求解,而  $\omega$  由边界条件  $E_\varphi = 0 = -\partial B_z / \partial r$  决定,即

$$J'_m(\omega r_0) = 0 \quad \text{Neumann 条件}, \quad (8)$$

式中  $r_0$  为横截面半径.而对于横电波(TE), $E_z$  通过方程(4a)求解,而  $\omega$  由边界条件  $E_z = 0$  决定,即

$$J_m(\omega r_0) = 0 \quad \text{Dirichlet 条件}. \quad (9)$$

从(8)和(9)式可知,柱面内的所有可能的离散电磁波模式分别由  $m$  阶 Bessel 函数及其导数的零点决定.

柱面外的电磁波模式怎样决定?通过求解方程(6)知道,对于开放边界条件的情况,特解  $Y_m$  不为零.研究表明,柱面外的 TM 模式可由 Hankel 函数  $H_m^{(1)}(\chi = J_m + iY_m)$  或它的共轭函数的零点决定,TE 模式由 Hankel 函数导数的零点决定.

### 2.2. 求和的发散和 Zeta 函数正规化方法

首先给出零点能量的求和.对模式  $\omega_m$ ,谐振子

的零点能为  $\omega_m/2$ . 对所有模式求和, 有  $\epsilon = (\sum_{m,n} \omega_{m,n})/2$ . 但无穷多模式的求和, 其结果是发散的. 为了在形式上收敛, 进行 Zeta 函数正规化, 即在指数上引进参量  $s$ :

$$\begin{aligned} \epsilon(s) &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} (\omega_{m,n}^2)^{s-1/2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \omega_{m,n}^{1-2s}. \end{aligned} \quad (10)$$

这里  $n$  为  $m$  阶 Bessel 函数的零点序数, 计算的最后将取  $s \rightarrow 0$ . 计算(10)式, 要求将和转化成积分. 将求和转化为积分后, 利用特殊函数的渐进(趋向  $\infty$ )表达式和级数展开等数学分析方法, 将发散的分离出来. 这就是 Zeta 函数正规化方法<sup>[12]</sup>. 对于发散的积分而言, Zeta 函数方法的作用是将发散部分分离出来, 使被积函数得到解析延拓. 发散部分分离出来后, 需要进行重整化. 很有意思的是, 对于简单的平行板边界条件, 经过 Zeta 函数方法正规化后, 竟然不要重整化就可得到物理结果<sup>[2]</sup>.

### 2.3. 柱环几何结构的零点能

为了得到(4)式, 用了特殊的参照系( $k_z = 0$ ), 得到了相当于二维圆面几何的零点能(见(10)式). 为了得到柱环的零点能, 需要对各种  $k_z$  模式求和. 现在要通过 Lorentz 变换, 将  $k_z$  变回实验室参考系. 在该参考系中  $k_z$  的取值是没有限制的, 即在柱环中  $z$  方向的电磁波模式是连续的. 将  $k_z$  模式求和转化为积分, 利用对应关系  $\sum_{k_z} \rightarrow \int dk_z / (2\pi L)$ , 得到的是单位长度的能量, 即单位长度的 Casimir 能量

$$\begin{aligned} \epsilon_L(s) &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{2\pi} (\omega_{m,n}^2 + k_z^2)^{s-1/2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} \omega_{m,n}^{1-2s} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{-1/2}}{(1+t)^{s-1/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} B\left(\frac{1}{2}, s-1\right) \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $L$  为归一化长度,  $B(1/2, s-1) = \Gamma(1/2)\Gamma(s-1)/\Gamma(s-1/2)$ . 为了做进一步的计算, 要对上式作展开. 对  $\Gamma(s-1)$  在  $s=0$  的领域进行 Laurent 级数展开,

$$\Gamma(s-1) = \frac{\Gamma(s+1)}{(s-1)s}$$

$$= -\Gamma(s+1) \left( \frac{1}{s} + 1 + s + \dots \right),$$

从而有

$$\begin{aligned} \epsilon_L(s) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon(-1/2)}{s} + \epsilon\left(-\frac{1}{2}\right) + \epsilon'\left(-\frac{1}{2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\pi} \left( \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-1/2)} \right)' \epsilon\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}(s) \right]. \end{aligned}$$

研究表明<sup>[2,9,11]</sup>, 对于奇数维空间, 考虑薄边界的两边, 发散项会相消. 这意味着, 边界两边的  $\epsilon(-1/2)$  的符号是相反的,  $\epsilon_L$  只决定于  $\epsilon'(-1/2)$ . 因为  $\epsilon(s)$  的收敛区间是  $0 < s < 1/2$ ,  $\epsilon(s=1/2)$  是发散的. 为了在  $s = -1/2$  处  $\epsilon(s)$  收敛, 需要对其中的被积函数进行解析延拓, 具体方法是利用 Zeta 函数方法将发散部分分离出来, 并利用重整化将它减除. 对于单层柱面边界, 其两侧的发散部分是相消的<sup>[9]</sup>, 所以在正规化后可将发散部分简单的去掉就行. 对于柱环边界, 我们发现  $\epsilon(s = -1/2)$  可以分成几部分, 而发散的合并到单层柱面结构中后相互抵消, 其余部分则为零. 下面将具体研究这一问题.  $\epsilon_L$  也将决定于  $\epsilon'(-1/2)$ , 其中求导在解析延拓完成后进行. 最后有

$$\epsilon_L(s=0) = \frac{1}{4\pi} \epsilon'(-1/2). \quad (12)$$

为了具体求  $\epsilon'(-1/2)$ , 首先要计算由(10)式定义的  $\epsilon(s)$ . 虽然  $\epsilon(s)$  事实上是二维圆边界决定的 Casimir 能量, 但下面我们不提二维圆边界, 而说柱环或柱面边界, 因为  $\epsilon(s)$  的求解只是一个中间过程而已.

### 2.4. 零点振动模式求和

离散的求和需要变为连续的积分, 以使具体的数学计算得以实现. 利用下列复变函数公式可将求和变为积分

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint dz \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \\ = \sum_k n_k \varphi(a_k) - \sum_l p_l \varphi(b_l), \end{aligned} \quad (13)$$

式中  $\varphi$  为围道中的任意解析函数,  $f$  在围道上解析且在围道内除了由  $k$  个  $n_k$  阶零点和  $l$  个  $p_l$  阶极点外是解析的.

在柱面内, 对 Dirichlet 条件,  $f = J_m(\omega r_0)$ ; 对 Neumann 条件,  $f = J'_m(\omega r_0)$ . 取  $\varphi = \omega^{1-2s} = (z/r_0)^{1-2s}$ , 有

$$\epsilon_D(s) = \frac{r_0^{2s-1}}{4\pi i} \sum_m \oint dz z^{1-2s} \frac{J'_m(z)}{J_m(z)}$$

$$= \frac{r_0^{2s-1}}{4\pi i} \sum_m \oint dz \cdot z^{1-2s} \frac{\partial}{\partial z} \ln J_m(z), \quad (14)$$

$$\epsilon_{\text{IN}}(s) = \frac{r_0^{2s-1}}{4\pi i} \sum_m \oint dz \cdot z^{1-2s} \frac{\partial}{\partial z} \ln J'_m(z), \quad (15)$$

式中下标 D 和 N 分别代表 Dirichlet 和 Neumann 条件. 在物理上, 总可以认为在足够大的空间外面场量为零. 这样, 将(14)和(15)式的积分变量转到虚轴, 有

$$\epsilon_{\text{IN}}(s) = -\frac{r_0^{2s-1}}{2\pi} \cos(\pi s) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz \cdot z^{1-2s} \times \frac{\partial}{\partial z} \ln f_m^{\text{IN}}(iz), \quad (16)$$

得到(16)式, 在形式上已完成了求和.

### 2.5. 边界条件表式

现在具体给出  $f(iz)$  在不同几何边界下的表达式. 对于单层柱面区分内外空间的情况, 不同的模式分列如下<sup>[2]</sup>:

$$f_m^{\text{D}i}(iz) = z^{-m} I_m(z), \quad f_m^{\text{D}e}(iz) = z^m K_m(z), \quad (17)$$

$$f_m^{\text{N}i}(iz) = z^{-m+1} I'_m(z), \quad f_m^{\text{N}e}(iz) = z^{m+1} K'_m(z), \quad (18)$$

$$f_m^{\text{D}i}(iz) = f_m^{\text{D}i} f_m^{\text{D}e}, \quad f_m^{\text{N}i}(iz) = f_m^{\text{N}i} f_m^{\text{N}e}, \quad (19)$$

式中  $i, e$  分别代表柱面内外. 因为  $0 < z < \infty$ , 为了避免在积分变量转到虚轴时在原点出现奇点, 这些函数分别乘了  $z$  的幂次函数. 在积分围道中, 它们是解析的, 积分为零, 它们的作用仅仅是避免奇点. 注意, 当  $m=0$  时, 由于这些函数在原点的特殊性, 要另作处理(这里从略).

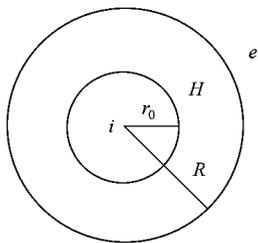


图 1 柱环横截面

对于两层柱面管子, 空间被分割为内( $i$ )、外( $e$ )和柱环( $H$ )三部分(见图 1). 对于柱环区域, 由于  $Y_m \neq 0$ , 波函数将是线性独立的 Bessel 函数  $J_m, Y_m$  (或者  $H_m^{(1)}$ ) 的线性组合. 对于 Dirichlet 和 Neumann 条件分别有

$$\begin{cases} AJ_m(\omega r_0) + BY_m(\omega r_0) = 0, \\ AJ_m(\omega R) + BY_m(\omega R) = 0; \end{cases} \quad \text{Dirichlet (20)}$$

$$\begin{cases} CJ'_m(\omega r_0) + DY'_m(\omega r_0) = 0, \\ CJ'_m(\omega R) + BY'_m(\omega R) = 0. \end{cases} \quad \text{Neumann (21)}$$

要使方程组有非零解, 必须

$$f_m^{\text{D}H}(z) = J_m(z) Y_m(\lambda z) - J_m(\lambda z) Y_m(z) = 0, \quad (22)$$

$$f_m^{\text{N}H}(z) = J'_m(z) Y'_m(\lambda z) - J'_m(\lambda z) Y'_m(z) = 0, \quad (23)$$

式中  $\lambda = R/r_0$ , 因上式中的  $Y_m$  可换为  $H_m^{(1)}$ , 再为消去原点的奇异性, 有

$$f_m^{\text{D}H}(iz) = I_m(z) K_m(\lambda z) - I_m(\lambda z) K_m(z), \quad (24)$$

$$f_m^{\text{N}H}(iz) = (I'_m(z) K'_m(\lambda z) - I'_m(\lambda z) K'_m(z)). \quad (25)$$

可以将这些条件综合如下:

$$\begin{aligned} f_m^{\text{D}i}(iz) &= f_m^{\text{D}i} f_m^{\text{D}H} f_m^{\text{D}e}, \\ f_m^{\text{D}e}(iz) &= f_m^{\text{N}i} f_m^{\text{N}H} f_m^{\text{N}e}. \end{aligned} \quad (26)$$

最后有必要提到  $r_0, R \rightarrow \infty$  而  $d = R - r_0 = (\lambda - 1)r_0 \ll r_0$  的极限情况. 这时,

$$J_m(z) |_{z \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_m(z) |_{z \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

参照(22)和(23)式, 得到  $f_m^{\text{D}H}(z) = -f_m^{\text{N}H}(z) = \sin((\lambda - 1)z)$ . 可以清楚地看到,  $\omega_m d = (\lambda - 1)z = n\pi$  ( $n$  为整数), 这是与平行板几何一样的<sup>[2,3]</sup>. 在该极限条件下, 柱环几何将等同于平行板几何. 这将为数值计算提供很好的极限检验.

### 3. 柱环几何结构的 Casimir 能量

上节在形式上完成了各种柱面几何下  $\epsilon(s)$  的求解, 得到了表示式(16). 但是还不清楚表示式(16)给出柱环的结果是收敛还是发散. 本节通过进一步的解析处理, 研究柱环几何结构中  $\epsilon(s)$  的特有性质, 以得到在数学上可简明实现的表示式计算单位长度的 Casimir 能量.

对于单层柱面的结构,  $\epsilon(s)$  已由(16)–(19)等式给出. 为给出柱环结构的  $\epsilon(s)$ , 先考虑  $H$  区域(见图 1). 对于 Dirichlet 条件, 有

$$\begin{aligned} \ln f_m^{\text{D}H}(iz) &= \ln [z^m K_m(z)] \\ &+ \ln [( \lambda z )^m I_m(\lambda z)] + \ln \lambda^m \\ &+ \ln \left( 1 - \frac{I_m(z) K_m(\lambda z)}{K_m(z) I_m(\lambda z)} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

上式等号右边第一项归并到  $i$  区 (见图 1), 与  $\ln f_m^{D,i}(iz)$  一道归成了截面半径为  $r_0$  的单层柱面几何的问题; 第二项归并到  $e$  区, 与  $\ln f_m^{D,e}(iz)$  一道归成了截面半径为  $R$  的单柱面几何的问题. 需要提到的是, 对第一、二项直接积分得到的结果是发散的, 归并为单层柱面问题之后, 薄柱面两侧的发散部分将相互抵消, 而这是单层柱面问题的一个重要结果<sup>[9,11]</sup>. 第三项是平庸的, 给出零贡献; 第四项的贡献是需要计算的, 记为  $\ln f_m^{D,h}(iz)$ . 对于 Neumann 条件类似的, 有

$$\begin{aligned} \ln f_m^{N,h}(iz) = & \ln [z^{m+1} K'_m(z)] \\ & + \ln [(\lambda z)^{m+1} Y'_m(\lambda z)] + \ln \lambda^{m+1} \\ & + \ln \left( 1 - \frac{Y'_m(z) K'_m(\lambda z)}{K'_m(z) Y'_m(\lambda z)} \right), \quad (28) \end{aligned}$$

与 (27) 式进行同样的归并, 第三项同样给出零贡献, 第四项记为  $\ln f_m^{N,h}(iz)$ .

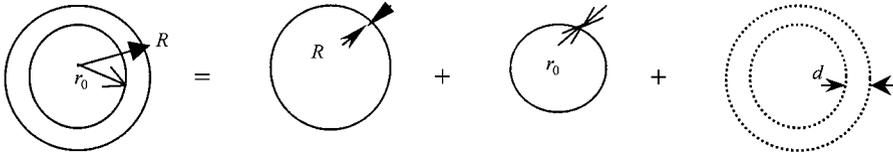


图 2 同心柱环的 Casimir 能量分解为 3 部分 第三部分贡献仅来自柱环之中

上述结果从两层柱面的柱环推广到多层同心柱面的柱环几何, 得到

$$\begin{aligned} \epsilon_L = & \epsilon_L^1(s) + \epsilon_L^{K1,2}(s) + \epsilon_L^2(s) \\ & + \epsilon_L^{K2,3}(s) + \epsilon_L^3(s) + \dots, \quad (s=0) \quad (32) \end{aligned}$$

式是 1, 2, 3, ... 代表截面半径为  $r_1, r_2, r_3, \dots$  的单层柱面结构,  $h(1, 2)$  等代表  $r_1, r_2$  等之间的贡献 (见 (30) 式).

作数值计算之前, 需要证明  $\epsilon_{N,D}^h$  中积分的有限性. 为简明起见,  $\epsilon_{N,D}^h$  中积分的有限性将在附录 A 中给出. (30) 式等号右边的  $\cos(\pi s)$  保证了  $\epsilon_{N,D}^h(-1/2) = 0$ . 需要强调的是重整化问题. 对于柱环结构, 将所有的项进行上述巧妙的归并, 发散项竟然相互抵消了. 如同平行板几何, 经过 Zeta 函数方法正规化后, 柱环几何也不要重整化手续就可得到物理结果.

## 4. 数值结果与分析

本节将给出单位长度的 Casimir 能量的数值结果, 并且讨论柱面边界由于存在 Casimir 能量所提供

的综合分析, 写出总的真空能量如下:

$$\epsilon(s) = \sum_{M=i,e,h} \epsilon_N^M(s) + \epsilon_D^M(s). \quad (29)$$

单层的柱面几何给出的 Casimir 能量已被广泛研究<sup>[8,9]</sup>, 这里需要计算的是 (27) 和 (28) 式等号右边第四项对 Casimir 能量的贡献  $\epsilon_{N,D}^h(s)$ , 记为

$$\begin{aligned} \epsilon_{N,D}^h(s) = & -\frac{r_0^{2s-1}}{2\pi} \cos(\pi s) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz \cdot z^{1-2s} \\ & \times \frac{\partial}{\partial z} \ln f_m^{(N,D),h}(iz). \quad (30) \end{aligned}$$

算得  $\epsilon_{N,D}^M(s)$  等量后, 单位长度的 Casimir 能量  $\epsilon_L^M(s)$  通过 (12) 式算得. 如图 1 所示的双层柱环, 其单位长度的总 Casimir 能量为

$$\epsilon_L = \sum_{M=i,e,h} [\epsilon_{L,N}^M(s=0) + \epsilon_{L,D}^M(s=0)], \quad (31)$$

式中  $\epsilon_L = \epsilon_L(s=0)$ . 这结果可以用图示的办法表示出来 (见图 2).

的势场而受到的张力.

### 4.1. 单位长度的 Casimir 能量

单位长度总的 Casimir 能量由 (31) 式计算. 因为  $\epsilon_{L,N,D}^{(e)}(s=0)$  等量是已知的<sup>[9]</sup>, 所以下面只要计算  $\epsilon_{L,N,D}^h(s=0)$ . 为了得到它, 首先要计算 (30) 式的  $\epsilon_{N,D}^h(s)$ . (30) 式的积分是有限的且只依赖于  $\lambda$ . 在附录 A 中证明了  $\epsilon_{N,D}^h(s)$  中积分的有限性和 (30) 中对  $m$  求和级数的收敛性. 附录 B 给出了数值计算中用到的 Bessel 函数递推公式. 有关数值计算是直截了当的, 从 (12) 式知,

$$\begin{aligned} \epsilon_L^h = & \epsilon_{L,N}^h(s=0) + \epsilon_{L,D}^h(s=0) \\ = & \frac{1}{4\pi} \left( \epsilon_N^h\left(-\frac{1}{2}\right) + \epsilon_D^h\left(-\frac{1}{2}\right) \right). \quad (33) \end{aligned}$$

因为  $\epsilon_{N,D}^h(s)$  中的积分是有限的而且由于因子  $\cos(\pi s)$  的存在,  $\epsilon_{N,D}^h(s=-1/2)$  的导数实际上只需对  $\cos(\pi s)$  求导. 数值计算需注意两点: (1) 由于对  $m$  是正整数和负整数的情况是简并的, 因此对  $m$  求和的范围是从 0 到  $\infty$ ,  $m \neq 0$  的情况, 考虑简并度 2; (2) 因为自然单位制算得的能量量纲为 [长度]<sup>-1</sup>, 若要

折算为 MeV 须乘以  $\hbar c = 197.33\text{MeV}\cdot\text{fm}$ .

柱环间单位长度的 Casimir 能量可写为如下形式：

$$\begin{aligned} \epsilon_{L}^h &= \epsilon_{L,N}^h(s=0) + \epsilon_{L,D}^h(s=0) \\ &\equiv \frac{a_N(\lambda_d)}{r_0^2} + \frac{a_D(\lambda_d)}{r_0^2} \\ &\equiv \frac{\alpha(\lambda_d)}{r_0^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

在此定义了参量  $\lambda_d = \lambda - 1$ ,  $\epsilon_{L,N}^h, \epsilon_{L,D}^h, \epsilon_L^h$  与柱面半径平方成反比, 系数分别为  $a_N(\lambda_d), a_D(\lambda_d), \alpha(\lambda_d)$ . 在这以后, 为了方便, 不再写出  $\epsilon_{L,N}^h, \epsilon_{L,D}^h$  中的自变量. 表 1 给出在一些  $\lambda_d$  值时的系数. 不同于平行板和单层柱面的情况, 这些系数不是常数, 而是随  $\lambda_d$  变化的. 从表 1 可知,  $\epsilon_{L,N}^h, \epsilon_{L,D}^h, \epsilon_L^h$  都是负的, 它们提供对内、外柱面相互吸引的势. 在表 1 中也列出了计算中所用的最大的 Bessel 函数的阶数. 可以发现, 当  $\lambda_d$  很小时, 要计算到很大的阶数才能达到要求的精度(要求精确到第三位). 当  $\lambda_d$  更小时, 由于计算能力所限, 就不能对更高阶的 Bessel 函数进行计算了.

为了比较 (31) 式各项的相对大小, 写出单层柱面的单位长度的 Casimir 能量<sup>[8,9]</sup>

$$\epsilon_{L^e}^i = -\frac{0.01356}{r_{i^e}^2} \quad (r_i = r_0, r_e = R). \quad (35)$$

与表 1 的结果相比较, 可知在  $\lambda_d$  较小时,  $\epsilon_L^h$  是主要的. (34) 和 (35) 式的结果相加为双层柱环结构总的单位长度的 Casimir 能量.

### 4.2. 柱面边界的 Casimir 张力分析

Casimir 效应主要是一种表面效应, 系统给出的 Casimir 能量相当于为系统提供了作用于边界的势场. 双层柱环结构的内外柱面在单位长度内所受势场是有所不同的, 并定义它们分别为单位长度的 Casimir 势能  $V_{L^e}^i$  :

$$V_L^i = -\epsilon_L^h + \epsilon_L^i, V_L^e = \epsilon_L^h + \epsilon_L^e, \quad (36)$$

其中以柱面外法向为正, 内外柱面所受的单位长度的 Casimir 张力则分别为

$$F_L^i = -\partial V_L^i / \partial r_0 |_{R}, F_L^e = -\partial V_L^e / \partial R |_{r_0}.$$

这里不计算 Casimir 张力的数值结果, 从 (34) 和 (35) 式给出的结果进行具体的计算是不难的. 但要指出的是, 因为双层柱环结构的 Casimir 能量中的系数  $a_N(\lambda_d), a_D(\lambda_d), \alpha(\lambda_d)$  是随  $r_0$  或  $R$  变化的, 这

是与单层柱面结构所不同的.

表 1 单位长度的 Casimir 能量系数  $a_N(\lambda_d), a_D(\lambda_d)$  和  $\alpha(\lambda_d)$

$\lambda_d$	$n$ (阶数)	$-a_D(\lambda_d)$	$-a_N(\lambda_d)$	$-\alpha(\lambda_d)$
0.0300	92	1593.7	1594.7	3188.4
0.0500	79	351.5	352.0	703.5
0.1000	69	44.72	44.87	89.59
0.1500	69	13.41	13.48	26.89
0.2000	59	5.694	5.723	11.42
0.3000	59	1.705	1.709	3.414
0.4000	59	0.7235	0.7208	1.444
0.5000	59	0.3709	0.3663	0.7371
0.6000	59	0.2146	0.2095	0.4241
0.8000	59	0.09004	0.08560	0.1756
1.0000	59	0.04621	0.04255	0.08876
1.2000	59	0.02675	0.02381	0.05056
1.5000	59	0.01381	0.01163	0.02544
2.0000	59	0.005924	0.004531	0.01045
3.0000	59	0.001875	0.001174	0.003049
4.0000	59	0.000842	0.000435	0.001282
5.0000	64	0.000465	0.000200	0.000666
6.0000	64	0.000289	0.000105	0.000394

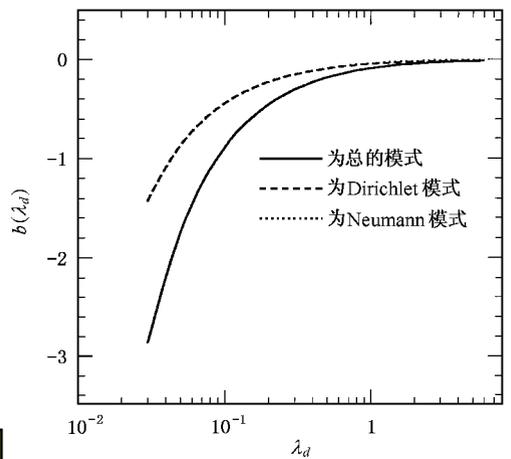


图 3 系数  $b_N(\lambda_d), b_D(\lambda_d)$  和  $b(\lambda_d)$  随  $\lambda_d$  的变化

在 (26) 式下面, 讨论了双层柱环结构极限情况与平行板的关系. 鉴于柱环结构与平行板的拓扑性质类似性, 讨论 Casimir 能量与柱环间距  $d$  的关系将是很有意思的. 为了更清楚地看出  $\epsilon_{L,N}^h, \epsilon_{L,D}^h, \epsilon_L^h$  与柱环间距  $d$  的关系, 作下面的变换:

$$\epsilon_L^h = \frac{\alpha(\lambda_d)\lambda_d^2}{r_0^2\lambda_d^2} \equiv \frac{b(\lambda_d)}{d^2}, \quad (37)$$

式中  $d = r_0\lambda_d = R - r_0$ ,  $b_N(\lambda_d)$  和  $b_D(\lambda_d)$  也如法定

义.图 3 给出了  $b_N(\lambda_d)$ ,  $b_D(\lambda_d)$  和  $b(\lambda_d)$  随  $\lambda_d$  的变化.  $b_N(\lambda_d)$  和  $b_D(\lambda_d)$  基本上是重合的,这说明在柱环结构中 Dirichlet 和 Neumann 模式对总的真空能量贡献是差不多的.从图 3 看出,单位长度的 Casimir 能量(绝对值)随柱环间距增大而减小.当柱环间距足够大时(37)式所表示的单位长度的 Casimir 能量趋向于零.这时(35)式给出的单层柱面给出的 Casimir 能量在总 Casimir 能量中的比例将增大.在下面的分析中,将如(36)式一样考虑柱环结构中所有项的贡献.

研究平行板的 Casimir 效应,通常给出的是单位面积的 Casimir 能量<sup>[2,3]</sup>,记为  $\epsilon_s^{\parallel} = -\pi^2(720d^3) = -0.0137/d^3$ .为了跟平行板时的情况比较,分别给出内外柱面所感受到的单位面积的 Casimir 势能  $V_s^{i,e}$

$$\begin{aligned} V_s^i &= \frac{V_L^i}{2\pi r_0} \equiv \frac{c^i(\lambda_d)}{d^3}, \\ V_s^e &= \frac{V_L^e}{2\pi R} \equiv \frac{c^e(\lambda_d)}{d^3}, \end{aligned} \quad (38)$$

式中分别定义了内外柱面受作用的单位面积势能系数  $c^i(\lambda_d)$  和  $c^e(\lambda_d)$ .在不同的  $\lambda_d$  处,  $c^i(\lambda_d)$  和  $c^e(\lambda_d)$  的数值结果列在表 2 中.表 2 的结果有 3 个特征.第一,这些系数随  $\lambda_d$  变化.对于外柱面,单调下降;对于内柱面,有极大值.第二,因为对于内柱面而言,  $\epsilon_L^i$  和  $\epsilon_L^e$  总是相消的,随  $\lambda_d$  增大  $c^i(\lambda_d)$  将变号,内柱面受的力将从外法向指向内法向,而外柱面受的力始终指向内法向.第三,当  $\lambda_d$  很小时,  $c^i(\lambda_d)$  和  $c^e(\lambda_d)$  分别都趋向平行板时的情况(系数为 0.0137),这是与(26)式下面的分析一致的,说明数值计算是可靠的.从表 2 中看出,当  $\lambda_d \leq 0.03$  时,双层柱环结构已可以简单的视作平行板几何问题了.

Casimir 能量和 Casimir 势能系数随  $\lambda_d$  而变化的特征,与平行板的情况相比较而言,这是非平凡的性质.这非平凡的性质,将导致一项新的 Casimir 张力.实际上,内外柱面单位面积所受的张力分别为

$$\begin{aligned} F_s^{i,e} &= -\frac{\partial V_s^{i,e}}{\partial d} \\ &= -\frac{\partial c^{i,e}(\lambda_d)}{\partial d} \frac{1}{d^3} + \frac{3c^{i,e}(\lambda_d)}{d^4}. \end{aligned} \quad (39)$$

上式等号右端第一项即为柱环结构所特有的张力,对外柱面是增强吸引的,对内柱面则要具体分析.对于已知尺寸的柱环结构,根据(31)(34)和(35)等式算出的 Casimir 能量,利用(38)和(39)等式可分析其

受力情况.

表 2 内外柱面的 Casimir 势能系数  $c^i(\lambda_d)$  和  $c^e(\lambda_d)$

$\lambda_d$	$c^i(\lambda_d)$	$-c^e(\lambda_d)$
0.0300	0.01370	0.01330
0.0500	0.01400	0.01333
0.1000	0.01426	0.01296
0.1500	0.01444	0.01256
0.2000	0.01452	0.01212
0.3000	0.01461	0.01131
0.4000	0.01457	0.01056
0.5000	0.01493	0.00986
0.6000	0.01411	0.00923
0.8000	0.01321	0.00814
1.0000	0.01197	0.00733
1.2000	0.01017	0.00667
1.5000	0.00638	0.00593
2.0000	-0.00395	0.00508
3.0000	-0.04517	0.00419
4.0000	-0.12506	0.00372
5.0000	-0.25652	0.00346
6.0000	-0.45261	0.00329

## 5. 结 论

Casimir 效应在许多物理领域有着很广泛的应用.在介观尺度上,Casimir 效应的重要性日渐被认识.从发现 Casimir 效应以来,科学家们研究了简单但规则的几何结构如导体长方体腔、球面腔、柱面腔中有限的真空能量及其相应的 Casimir 效应.在介观尺度上,越来越多的新的复杂结构日渐发现,这要求人们探索在新的复杂结构中是否也有简单几何结构中普遍存在的效应.本工作研究了柱环腔体中的 Casimir 效应.

从 Maxwell 方程组出发,应用真空谐振子零点振动的物理图景,本工作研究了导体柱环腔体中零点振动模式所给出的宏观量子效应.通过电磁场零点振动模式求和与 Zeta 函数正规化方法,不需要重整化就得到了在柱环结构中单位长度的 Casimir 能量和单位面积的 Casimir 势能.它们是有限的.主要的结果总结如下:

1. 双层的柱环结构的 Casimir 能量可以分解为 3 部分之和.  $n$  层的柱环结构的 Casimir 能量可分解为  $(2n-1)$  部分之和.各部分的贡献都收敛(有限

的).

2. 对于小的柱面间距 柱环结构的 Casimir 能量主要来自柱环之间的部分 ;对于很小的间距 趋向平行板的极限情况.

3. 相对于导体平行板 柱环腔体的 Casimir 能量有非平凡的性质 ,即它随柱环间距而变化 ;作用在内、外柱面的 Casimir 势能也随柱环间距而变化 ,这产生了一项新的 Casimir 力 .可以期望 ,这一项新的 Casimir 力将可能在具体物理系统中可以带来可观察效应 .

物理结果的成立总有条件 .因为电磁波的波长若小于原子间距 ,电磁波将穿透导体边界 ,使边界条件不复成立 ,所以这里的结果成立之条件为柱环间距  $d$  以及  $r_0$  和  $R$  大大于原子间距 .期望这里得到的结果在以后用到实际的系统中 .

### 附录 A

#### $\epsilon_{(N)}^h$ 中积分的有限性

需要说明的是下式 (即 30 式) 里面积分的有限性 .

$$\epsilon_{(N)}^h(s) = -\frac{r_0^{2s-1}}{2\pi} \cos(\pi s) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dz \cdot z^{1-2s} \times \frac{\partial}{\partial z} \ln f_m^{(N)}(iz).$$

本附录中 ,只分析  $\epsilon_{(1)}^h$  ,而  $\epsilon_{(N)}^h$  可以类似的分析 .

$$\ln f_m^{(1)}(iz) = \ln \left( 1 - \frac{I_m(z) K_m(\lambda z)}{K_m(z) I_m(\lambda z)} \right) \quad (A1)$$

检查积分的收敛性 ,要做两件事 :1) 在渐进情况下 ( $m \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$ ) 积分的收敛性 ;2) 在  $z \rightarrow 0$  的情况 ,被积函数的奇异性 .

先说明积分的收敛性 ,在此之前 ,看 (A1) 式能否进行 Taylor 展开 .从下面两个 Bessel 函数的表式<sup>[13]</sup> :

$$\begin{cases} I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k! \Gamma(m+k+1)}; \\ K_m(z) = \int_0^{\infty} dt \exp(-z \cosh t) \cosh(kt) \\ \quad (|\arg z| < \frac{\pi}{2}), \end{cases} \quad (A2)$$

可以看出 ,对于  $z > 0$  ,在  $\lambda > 1$  时 , $K_m(\lambda z) < K_m(z)$  , $I_m(\lambda z) > I_m(z)$  满足可进行 Taylor 展开的条件  $|I_m(z) K_m(\lambda z) / (K_m(z) I_m(\lambda z))| < 1$  .所以

$$\ln f_m^{(1)}(iz) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{I_m(z) K_m(\lambda z)}{K_m(z) I_m(\lambda z)} \right)^n. \quad (A3)$$

奇异性只可能在  $m = 0$  时且当  $z \rightarrow 0$  发生 .我们直接分析  $m = 0$  时对 (A1) 式的导数 ,发现

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \ln f_0^{(1)}(iz) \right|_{z=0} = 0. \quad (A4)$$

所以没有奇异性问题 .

现在继续分析 (A3) 式的渐进表示式 .为方便和完备 ,作为资料在下面写出  $m \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$  时 Bessel 函数的渐进表示式<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} I_m(mz) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \frac{e^{m\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{m^k} \right\}, \\ K_m(mz) &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} \frac{e^{-m\eta}}{(1+z^2)^{1/4}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u_k(t)}{m^k} \right\}, \\ Y_m(mz) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \frac{(1+z^2)^{1/4}}{z} e^{m\eta} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(t)}{m^k} \right\}, \\ K'_m(mz) &\approx -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2m}} \frac{(1+z^2)^{1/4}}{z} e^{-m\eta} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{v_k(t)}{m^k} \right\}, \end{aligned}$$

式中  $t = 1/\sqrt{1+z^2}, \eta = 1/t + \ln[zt/(t+1)]$  ,  
 $u_0(t) = 1, u_1(t) = (3t - 5t^3)/24$  ,  
 $u_2(t) = (81t^2 - 462t^4 + 385t^6)/1152$  ,  
 $u_3(t) = (30375t^3 - 369603t^5 + 765765t^7 - 425425t^9)/414720 \dots$  ,  
 $u_{k+1}(t) = \frac{1}{2} t^2 (1-t^2) u'_k(t) + \frac{1}{8} \int_0^t (1-5t^2) u_k(t) dt \quad k = 0, 1, \dots$  ,

$v_0(t) = 1, v_1(t) = (-9t + 7t^3)/24$  ,  
 $v_2(t) = (-135t^2 + 594t^4 - 455t^6)/1152$  ,  
 $v_3(t) = (-42525t^3 + 451737t^5 - 883575t^7 + 475475t^9)/414720 \dots$  ,  
 $v_k(t) = u_k(t) + t(t^2 - 1) \left\{ \frac{1}{2} u_{k-1}(t) + tu'_{k-1}(t) \right\} \quad k = 1, 2, \dots$

从 (30) 式的积分知道 ,如果  $(I_m(z) K_m(\lambda z) / (I_m(\lambda z) K_m(z))) \approx O(t^4)$  成立 ,积分是收敛的 .实际上 ,

$$\begin{aligned} \frac{I_m(z) K_m(\lambda z)}{I_m(\lambda z) K_m(z)} &\approx \exp(2m(\eta - \eta')) \\ &\times \left( \frac{(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t)}{m^k}) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u_k(t')}{m^k} \right)}{(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u_k(t)}{m^k}) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(t')}{m^k} \right)} \right) \\ &\approx \exp(2m(\lambda - 1)z) \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(t, t')}{m^k} \right), \end{aligned} \quad (A5)$$

式中  $t' = 1/\sqrt{1+(\lambda z)^2}, \eta = 1/t' + \ln[\lambda z t'/(t'+1)]$  ,上式近似号右端第二行括号中的  $w_k(t, t')$  为  $t$  和  $t'$  的多项式 .由于  $1 - \lambda < 0$  ,前面的指数函数保证了被积函数在渐进条件下以指数形式 (而不是  $t^4$ ) 趋向于零 .在这种情况下 (A3) 式中的高次项可以忽略 .(A3) 式的 Bessel 函数被其渐进表式代替后固定  $m$  对  $z$  进行积分 ,将得到一个小数 .

从被积函数的渐进展开式可以看出 ,对足够大的  $m$  ,积分将以指数的方式趋向于零 .这使得我们可以用精确的数学语言说明级数求和是收敛的 ,即对任意小数  $\delta > 0$  ,存在  $m > M$  ( $M$  为大数) ,使得  $\sum_{m>M} \epsilon_{(N)}^h / m < \delta$  ,其中  $\epsilon_{(N)}^h$  为 (30) 式中没有求和号时的单项 .

## 附录 B

 $I_m$  和  $K_m$  等的递推公式

在计算中,为节省计算量要用到  $I_m$  和  $K_m$  的递推公式.为了计算的稳定性,对  $I_m$  用减序,对  $K_m$  用升序,

$$I_{m-1}(z) = I_{m+1}(z) + \frac{2m}{z} I_m(z), \quad (\text{B1})$$

$$K_{m+1}(z) = K_{m-1}(z) + \frac{2m}{z} K_m(z).$$

一阶导数的递推公式如下:

$$I'_m(z) = I_{m+1}(z) + \frac{m}{z} I_m(z), \quad (\text{B2})$$

$$K'_m(z) = -K_{m-1}(z) - \frac{m}{z} K_m(z).$$

对于  $I_m$  和  $K_m$ , 其两阶导数的递推公式为

$$B_m''(z) = \frac{1}{4} \left[ B_{m-2}(z) + \binom{2}{1} B_m(z) + \binom{2}{2} B_{m+2}(z) \right],$$

$$B_m = I_m e^{im\pi} K_m. \quad (\text{B3})$$

注意升序和减序,明显写出  $I'_m$  和  $K'_m$  表示式

$$K_m''(z) = \frac{1}{4} \left( K_{m-2}(z) + \left( 3 + \frac{4m(m+1)}{z^2} \right) K_m(z) + \frac{2(m+1)}{z} K_{m-1}(z) \right), \quad (\text{B4})$$

$$I'_m(z) = \frac{1}{4} \left( I_{m+2}(z) + \left( 3 + \frac{4m(m-1)}{z^2} \right) I_m(z) + \frac{2(m+1)}{z} I_{m+1}(z) \right). \quad (\text{B5})$$

- [ 1 ] Candelas P 1982 *Ann. Phys.* ( NY ) **143** 241  
 [ 2 ] Bordag M, Mohideen U, Mostepanenko V M 2001 *Phys. Rep.* **353** 1  
 [ 3 ] Zhang L and Ge M L 2000 *Frontier Problems of Quantum Mechanics* ( Beijing :Tsinghua University Press )p231( in Chinese ) [ 张 礼、葛墨林 2000 量子力学的前沿问题( 北京 :清华大学出版社,第 231 页) ]  
 [ 4 ] Casimir H B G and Polder D 1948 *Phys. Rev.* **73** 360  
 [ 5 ] Casimir H B G 1956 *Physica* **19** 846

- [ 6 ] Boyer T H 1968 *Phys. Rev.* **174** 1764  
 [ 7 ] Lukosz W 1971 *Physica* **56** 109  
 [ 8 ] DeRaad L L Jr and Milton K A 1981 *Ann. Phys.* ( NY ) **136** 229  
 [ 9 ] Gosdzinsky P and Romeo A 1998 *Phys. Lett. B* **441** 265  
 [ 10 ] Ambjorn J and Wolfram S 1983 *Ann. Phys.* ( NY ) **147** 1  
 [ 11 ] Leseduarte S and Romeo A 1996 *Ann. Phys.* ( NY ) **250** 448  
 [ 12 ] Blau S K, Visser M and Wipf A 1988 *Nucl. Phys. B* **310** 163  
 [ 13 ] Abramowitz M and Stegun I A 1965 *Handbook of Mathematical Functions* ( New York )

# Effects of quantum electromagnetic dynamics in a cylindrical ring cavity<sup>\*</sup>

Jiang Wei-Zhou Fu De-Ji Wang Zhen-Xia Ai Xiao-Bai Zhu Zhi-Yuan

( Shanghai Institute of Nuclear Research , Chinese Academy of Sciences , Shanghai 201800 , China )

( Received 21 June 2002 ; revised manuscript received 28 July 2002 )

## Abstract

A charge-free conductor cavity has macroscopic quantum effects that can be explained by the physical picture of vacuum zero-point energy. This paper studies the macroscopic quantum effects in the conductive cylindrical ring in terms of zero-point oscillating modes. The zero-point oscillating modes are obtained through solving the Maxwell equations without sources under the boundary condition of the cylindrical conductor surfaces. The vacuum energy ( i. e. the Casimir energy ) per unit length and area for the double-layer concentric cylindrical ring is obtained and it can be decomposed into the three independent and convergent parts that come from the interior , exterior cylindrical surfaces and the portion between them , respectively. For an  $n$ -layer cylindrical ring , its Casimir energy comprises of  $( 2n - 1 )$  parts , all of which are convergent. Topologically , the geometric structure of the cylindrical ring is analogous to that of the parallel plates. However , the Casimir energy of the cylindrical ring has the non-trivial property that the coefficients of the Casimir energies and potentials vary with the interval between the cylindrical surfaces , compared to the constant coefficient for the parallel plates. This non-trivial property will give rise to an additional Casimir force that does not exist in the case of parallel plates.

**Keywords** : casimir effects , cavity of cylindrical ring , zero-point energy , quantum electro-magnetic dynamics

**PACC** : 1220D , 4250 , 1110

---

<sup>\*</sup> Project supported partially by the Knowledge Innovation Program , Chinese Academy of Sciences ( Grant No. KJ CX2 - N11 ) , by the Major Project of Knowledge Innovation Program , Chinese Academy of Sciences ( Grant No. 26010031 ) , and by the State Key Development Program for Basic Research of China ( Grant No. G200077400 ).