第 52 卷 第 5 期 2003 年 5 月
1000-3290/2003/52(05)/1048-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52, No.5, May, 2003

广义 Hamilton 系统的 Lie 对称性与守恒量*

梅凤翔

(北京理工大学理学院，北京 100081)

(2002 年 9 月 2 日收到；2002 年 10 月 14 日收到修改稿)

研究广义 Hamilton 系统 Lie 对称性导致的新型守恒量．首先，建立系统的微分方程．其次，研究一类特殊无限小变换下系统的 Lie 对称性．第三，将 Hojman 定理推广到广义 Hamilton 系统．最后，举例说明结果的应用．

关键词：广义 Hamilton 系统，Lie 对称性，守恒量

PACC：0320

1．引　　言

广义 Hamilton 力学的基本思想是构造一个 Hamilton 系统，在这个系统中，正则的共轭变量被非正则变量来替代，而这些非正则变量通常是系统的物理变量．20 世纪 50 年代以来，广义 Hamilton 力学取得了重要进展[1—3]．

用对称性理论来研究力学系统的守恒量是数学物理科学中的一个近代发展方向，主要有 Noether 对称性[4—9]，Lie 对称性[7,8,10—16]，形式不变性[17—19]等．由 Lie 对称性寻求守恒量，往往是通过 Noether 对称性．如果 Lie 对称性是一个 Noether 对称性，则可找到一个 Noether 守恒量[7,8]．Hojman 对偶数维动力学方程给出一个由 Lie 对称性直接求守恒量的定理[20]，Pillay 和 Leach 指出，Hojman 的守恒量对所有 Noether 对称性都是平凡的[21]，亦即找不到有意义的守恒量．本文试图将 Hojman 的定理推广并应用于一般具有奇数维的广义 Hamilton 系统，并得到非平凡守恒量．

2．广义 Hamilton 系统的微分方程

广义 Hamilton 系统的微分方程为[3]

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (i,j = 1,\cdots,m), \tag{1}$$

其中 J_{ij} 满足

$$J_{ij}(\boldsymbol{x}) = -J_{ji}(\boldsymbol{x}),$$
$$J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} = 0, \tag{2}$$

而 $H = H(t,\boldsymbol{x})$ 为 Hamilton 函数．广义 Hamilton 系统方程的维数可以是奇数的，如刚体定点运动，三种群 Volterra 方程，Lorenz 方程的 Robbins 模型等，都是三维广义 Hamilton 系统[3,8]．

3．无限小变换与 Lie 对称性的确定方程

引进无限小变换

$$t^* = t,\ x_i^*(t^*) = x_i(t) + \Delta x_i \tag{3}$$

或其展开式

$$t^* = t,\ x_i^*(t^*) = x_i(t) + \varepsilon\xi_i(t,\boldsymbol{x}), \tag{4}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_i 为无限小生成元．由(3)式看出，这是一类特殊的无限小变换，在实施变换时，时间保持不变．

方程(1)在无限小变换(4)下的 Lie 对称性确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i = \frac{\partial\alpha_i}{\partial x_j}\xi_j, \tag{5}$$

其中

$$\alpha_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \tag{6}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_j\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{7}$$

* 国家自然科学基金(批准号：19972010，10272021)资助的课题．

4. Hojman 定理的推广

Hojman 对偶数维动力学方程由 Lie 对称性直接找到守恒量的定理[20],被称为 Hojman 定理. Pillay 和 Leach 指出,利用 Hojman 的守恒律导出的不变量对所有 Noether 对称性都是平凡的[21]. 下面给出 Hojman 定理的推广并应用于广义 Hamilton 系统,给出系统的非平凡不变量.

定理 对广义 Hamilton 系统(1),如果存在某函数 $\mu=\mu(t,x)$ 满足条件

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{8}$$

则广义 Hamilton 系统有如下形式的守恒量:

$$I_H=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\mu\xi_i)}{\partial x_i}=\text{const}. \tag{9}$$

证明 将(9)式按方程(1)求对时间的导数,有

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H&=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\xi_i+\frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right)\\&=-\frac{1}{\mu^2}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\xi_i+\frac{1}{\mu}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\xi_i\\&\quad+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}.\end{aligned} \tag{10}$$

由(8)式得

$$-\frac{1}{\mu^2}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu=-\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_j}-\mu\frac{\partial^2\alpha_j}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{11}$$

注意到关系

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mu-\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}, \tag{12}$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i-\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}, \tag{13}$$

将(11),(12),(13)式代入(10)式,并利用方程(5),得到

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H&=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\xi_j+\frac{1}{\mu}\left\{-\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_j}-\mu\frac{\partial^2\alpha_j}{\partial x_i\partial x_j}\right.\\&\quad\left.-\frac{\partial\mu}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}\right\}\xi_i+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i+\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_i\\&\quad-\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}=0.\end{aligned}$$

证毕.

5. 算 例

下面举例说明上述结果的应用.

某三维广义 Hamilton 系统的微分方程为

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-g(x_2),\\\dot{x}_2&=f(x_1),\\\dot{x}_3&=f(x_1)+g(x_2),\end{aligned} \tag{14}$$

其中 f,g 为可微函数. 试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

Lie 对称性的确定方程(5)给出

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1&=-\frac{\partial g}{\partial x_2}\xi_2,\\\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1,\\\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_3&=\frac{\partial f}{\partial x_1}\xi_1+\frac{\partial g}{\partial x_2}\xi_2.\end{aligned} \tag{15}$$

取生成元

$$\xi_1=\xi_2=0,\ \xi_3=\frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)^2, \tag{16}$$

它满足方程(15),因此对应系统的一个 Lie 对称性. 方程(8)给出

$$\mu=1, \tag{17}$$

而守恒量(9)式给出

$$I_H=\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}=x_1-x_2+x_3=\text{const}. \tag{18}$$

这是一个非平凡守恒量.

[1] Olver P J 1986 *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York: Springer-Verlag)

[2] Marsden J E and Ratiu T S 1994 *Introduction to Mechanics and Symmetry* (New York: Springer-Verlag)

[3] Li J B, Zhao X H and Liu Z R 1994 *Theory and Application of Generalized Hamiltonian Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [李继彬、赵晓华、刘正荣 1994 广义哈密顿系统理论及其应用(北京 科学出版社)]

[4] Djukić Dj D and Vujanović B 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[5] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1659

[6] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic Univ. Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[7] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔

1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[8] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing :Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[9] Ge W K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1156 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 1156]

[10] Mei F X 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[11] Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔、尚 玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[12] Qiao Y F and Zhao S H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2001 物理学报 **50** 1]

[13] Zhang Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[14] Mei F X 2000 *ASME Appl*. *Mech*. *Rev*. **51** 283

[15] Mei F X 2000 *Acta Mechanica* **141** 135

[16] Zhang R C et al 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 801

[17] Mei F X 2001 *J*. *Beijing Institute of Technology* **21** 535 (in Chinese) [梅凤翔 2001 北京理工大学学报 **21** 535]

[18] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[19] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5

[20] Hojman S A 1992 *J Phys*. *A* :*Math*. *Gen*. **25** L291

[21] Pillay T and Leach P G L 1996 *J Phys*. *A* :*Math*. *Gen*. **29** 6999

Lie symmetry and the conserved quantity of a generalized Hamiltonian system*

Mei Feng-Xiang

(*School of Science*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 2 September 2002; revised manuscript received 14 October 2002)

Abstract

For a generalized Hamiltonian system, a new conservation law derived by using the Lie symmetry is studies. Firstly, the differential equations of the system are given. Secondly, the Lie symmetry under special infinitesimal transformations is studied. Thirdly, the theorem of Hojman is generalized to this system. Finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: generalized Hamiltonian system, Lie symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19972010, 10272021).