第 52 卷 第 5 期 2003 年 5 月
1000-3290/2003/52(05)/1071-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.5, May, 2003

无反射势阱中相对论粒子的束缚态

陈 刚 楼智美

(绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2002 年 8 月 7 日收到; 2002 年 10 月 14 日收到修改稿)

给出了具有无反射势型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解.

关键词: 无反射势, Klein-Gordon 方程, Dirac 方程, 束缚态

PACC: 0365

1. 引 言

在强耦合条件下,在势场中运动的粒子的相对论效应变得非常重要[1],而在考虑相对论效应时,处于势场中运动的粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程来描述. Dominguez-Adame[2] 和 Talukdar 等人[3] 分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解和散射态解;胡嗣柱等人[4] 给出了在 Hulthén 标量势与矢量势相等的条件下 Dirac 方程的 s 波束缚态解;侯春风等人分别给出了在 Morse 和 Woods-Saxon 标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解[5,6];郭建友给出了在 $\tan^2(\pi\eta r)$ 标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解[7];强隐朝给出了在谐振子标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解[8]. 作者已经给出了在 Pöschl-Teller 标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解[9],本文将考虑粒子在无反射势中的相对论效应,在无反射势型标量势与矢量势相等的条件下,分别给出了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解.

无反射势阱

$$V(r) = -\frac{1}{2}n(n+1)\operatorname{sech}^2(r) \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

是双原子分子模型势的吸引部分参数 n 等于整数时的特殊情形,因平面波经此势阱不发生反射而得名,无反射势在 KDV 孤子理论等问题的研究中也起十分重要的作用[10,11].

2. 具有无反射势型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

文献[2]指出,具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 s 波 Klein-Gordon 方程为($\hbar = \mu = 1$)

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + [E - V(r)]^2 - [M + S(r)]^2\right\}u(r) = 0$$

$$\left[R(r) = \frac{u(r)}{r}\right], \tag{1}$$

对于无反射势,在标量势与矢量势相等的条件下, s 波的 Klein-Gordon 方程为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + n(n+1)(E+M)\operatorname{sech}^2(r) + (E^2 - M^2)\right\}u(r) = 0, \tag{2}$$

令

$$y = \cosh^2(r), \tag{3}$$

$$k^2 = M^2 - E^2, \tag{4}$$

$$\delta(\delta - 1) = n(n+1)(E+M), \tag{5}$$

则方程(2)变为

$$y(1-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}u(y) + \left(\frac{1}{2} - y\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u(y) - \frac{1}{4}\left[\frac{\delta(\delta-1)}{y} - k^2\right]u(y) = 0. \tag{6}$$

考虑方程(6)的奇点,可设方程(6)的解为

$$u(y) \approx y^{\frac{\delta}{2}}f(y). \tag{7}$$

把(7)式代入方程(6)可得

$$y(1-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}f(y) + \left[\left(\delta + \frac{1}{2}\right) - y(\delta+1)\right]\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(y) - \frac{1}{4}[\delta^2 - k^2]f(y) = 0. \tag{8}$$

方程(8)为超几何方程. 其解为[12]

$$f(y) \approx F(\alpha,\beta,\gamma,y), \tag{9}$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{2}(\delta - k), \tag{10}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\delta + k), \tag{11}$$

$$\gamma = \delta + \frac{1}{2}. \tag{12}$$

为了保证方程(8)的解满足边界条件和归一化条件，必须使得

偶本征态：$$\frac{1-\delta}{2} + \frac{k}{2} = -i \quad (i = 0,2,4,6,\cdots), \tag{13}$$

奇本征态：$$1 - \frac{\delta}{2} + \frac{k}{2} = -i \quad (i = 1,3,5,7,\cdots). \tag{14}$$

对于偶本征态，能量 E 满足的方程是

$$-\sqrt{1+4n(n+1)(E+M)} + 2\sqrt{M^2-E^2} + 1 = -4i. \tag{15}$$

相对应的波函数为(未归一化)

$$u_i(r) = \cosh^{\delta}(r) F\left(i+\frac{1}{2},\beta,\gamma,\cosh^2(r)\right). \tag{16}$$

对于奇本征态，能量 E 满足的方程是

$$-\sqrt{1+4n(n+1)(E+M)} + 2\sqrt{M^2-E^2} + 3 = -4i. \tag{17}$$

相对应的波函数为(未归一化)

$$u_i(r) = \cosh^{\delta}(r) F(i+1,\beta,\gamma,\cosh^2(r)). \tag{18}$$

3. 具有无反射势型标量势与矢量势的 Dirac 方程的束缚态解

文献[4]指出，具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 Dirac 方程为($\hbar = \mu = 1$)

$$\{C\cdot \boldsymbol{P} + D[M + S(r)]\}\psi = [E - V(r)]\psi. \tag{19}$$

在相对论情况下，中心力场中粒子的守恒量完全集可以取为($H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z$)，($H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z$)的共同本征函数为[13]

$$\psi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} f_{i,K}(r)\phi^{A}_{jm_j} \\ \mathrm{i}g_{i,K}(r)\phi^{B}_{jm_j}\end{pmatrix} \quad \left(\text{当 } K = j + \frac{1}{2}\text{ 时}\right), \tag{20}$$

$$\psi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} f_{i,K}(r)\phi^{B}_{jm_j} \\ \mathrm{i}g_{i,K}(r)\phi^{A}_{jm_j}\end{pmatrix} \quad \left(\text{当 } K = -\left(j + \frac{1}{2}\right)\text{ 时}\right), \tag{21}$$

其中

$$\phi^{A}_{jm_j} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{j+m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{j-m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

$$\phi^{B}_{jm_j} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\dfrac{j-m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{j+m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}. \tag{22}$$

把(20)式或(21)式代入(19)式，可分离出 Dirac 方程的径向部分为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} - \frac{K}{r}f = [M + E + S(r) - V(r)]g, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} + \frac{K}{r}g = [M - E + S(r) + V(r)]f. \tag{24}$$

对于无反射势，在标量势与矢量势相等的条件下，方程(23)，(24)变为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} - \frac{K}{r}f = (M+E)g, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} + \frac{K}{r}g = [(M-E) - n(n+1)\mathrm{sech}^2(r)]f. \tag{26}$$

把(25)式代入(26)式可得

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + n(n+1)(M+E)\mathrm{sech}^2(r) + (E^2 - M^2) - \frac{K(K-1)}{r}\right]f = 0. \tag{27}$$

对于 s 波，即 $K=1$. 方程(27)变为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + n(n+1)(M+E)\mathrm{sech}^2(r) + (E^2 - M^2)\right]f = 0. \tag{28}$$

方程(28)与方程(2)完全类似，于是立即可得：

对于偶本征态，能量 $E_{i,1}$ 满足的方程是

$$-\sqrt{1+4n(n+1)(E_{i,1}+M)} + 2\sqrt{M^2-E_{i,1}^2} + 1 = -4i, \tag{29}$$

与 $E_{i,1}$ 相对应的 $f_{i,1}(r)$ 分量为(未归一化)

$$f_{i,1}(r) = \cosh^{\delta}(r) F\left(i+\frac{1}{2},\beta,\gamma,\cosh^2(r)\right). \tag{30}$$

由(25)式可得 $g_{i,1}(r)$ 分量为(未归一化)

$$g_{i,1}(r) = \frac{1}{(M + E_{i,1})}\Big\{\delta\cosh^{\delta-1}(r)\sinh(r) \times F\Big(i+\frac{1}{2},\beta,\gamma,\cosh^2(r)\Big) + 2\frac{\Big(i+\frac{1}{2}\Big)\beta}{\gamma}\cosh^{\delta+1}(r)\sinh(r) \times F\Big(i+\frac{3}{2},\beta+1,\gamma+1,\cosh^2(r)\Big) - \frac{1}{r}\cosh^{\delta}(r)F\Big(i+\frac{1}{2},\beta,\gamma,\cosh^2(r)\Big)\Big\}. \tag{31}$$

把 $f_{i,1}(r)$和 $g_{i,1}(r)$代入(20)式,可给出在偶本征态下 Dirac 方程的 s 波旋量波函数.

对于奇本征态,能量 $E_{i,1}$满足的方程是

$$-\sqrt{1+4n(n+1)}(E_{i,1}+M) + 2\sqrt{M^2 - E_{i,1}{}^2} + 3 = -4i, \tag{32}$$

与 $E_{i,1}$相对应的 $f_{i,1}(r)$分量为(未归一化)

$$f_{i,1}(r) = \cosh^{\delta}(r)F(i+1,\beta,\gamma,\cosh^2(r)). \tag{33}$$

由(25)式可得 $g_{i,1}(r)$分量为(未归一化)

$$g_{i,1}(r) = \frac{1}{(M + E_{i,1})}\Big\{\delta\cosh^{\delta-1}(r)\sinh(r) \times F(i+1,\beta,\gamma,\cosh^2(r)) + 2\frac{(i+1)\beta}{\gamma}\cosh^{\delta+1}(r)\sinh(r) \times F(i+2,\beta+1,\gamma+1,\cosh^2(r)) - \frac{1}{r}\cosh^{\delta}(r)F(i+1,\beta,\gamma,\cosh^2(r))\Big\}. \tag{34}$$

把 $f_{i,1}(r)$和 $g_{i,1}(r)$代入(20)式,可给出在奇本征态下 Dirac 方程的 s 波旋量波函数.

4. 结　　论

综上所述,具有相等的标量与矢量无反射势型势函数的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解可以严格地求出,即在与通常非相对论量子力学的双原子分子问题中处理无反射势相同的近似下可以得到方程的解.这时的 s 波 Dirac 方程的 f 分量所满足的方程与 Klein-Gordon 方程非常相似,其解可用同样的方法求得,从而可求出 s 波 Dirac 方程的 g 分量,由此可得出 Dirac 方程的 s 波束缚态旋量波函数.

[1] Wang I C and Wong C Y 1988 *Phys. Rev.* D **38** 348

[2] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[3] Talukdar B, Yunus A and Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[4] Hu S Z and Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[5] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese) [侯春风、李　焱、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[6] Hou C F and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 561

[7] Guo J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese) [郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[8] Qiang W C 2002 *Chin. Phys.* **11** 757

[9] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese) [陈　刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[10] Gradner G S *et al* 1974 *Commun. Pure and Appl. Math.* **27** 93

[11] Lamb G L Jr 1986 *Elements of Solution Theory* (New York: John Wiley and Sons)

[12] Wang Z X and Guo D R 2000 *Introduction to Special Function* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论(北京:北京大学出版社)]

[13] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* Vol Ⅱ, 2 nd (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学 卷Ⅱ 第二版(北京:科学出版社)]

Bound states of relativistic particles in reflectionless-type potential

Chen Gang Lou Zhi-Mei
(*Department of Physics*, *Shaoxing College of Arts and Sciences*, *Shaoxing* 312000, *China*)
(Received 7 August 2002; revised manuscript received 14 October 2002)

Abstract

The s-wave bound states of Klein-Gordon equation and Dirac equation with scalar and vector reflectionless-type potentials are obtained.

Keywords: reflectionless potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound state
PACC: 0365