

# 一个电张弛振子中的瞬态激变<sup>\*</sup>

陆云清 王文秀 何大韧<sup>†</sup>

(扬州大学物理科学与技术学院 扬州 225002)

(2002 年 4 月 10 日收到, 2002 年 8 月 28 日收到修改稿)

报道一例映孔导致激变后发生的奇异排斥子的拓扑突变, 这种突变以其分数维的突变为标志, 并引起激变后长混沌瞬态运动行为的突变, 因而应该具有基础理论和实践上的重要意义.

关键词: 激变, 奇异排斥子, 混沌瞬态

PACC: 0545

## 1. 引 言

耗散动力学系统中混沌吸引子的突变(例如突然消失、扩张、合并)称为激变(crisis). 其中, 由于混沌吸引子与其吸引域边界上的一个不稳定周期轨道碰撞而导致其突然消失的激变称为边界激变<sup>[1,2]</sup>. 通常, 混沌吸引子就是这个不稳定周期轨道的不稳定流形的闭包, 而其吸引域就是这个不稳定周期轨道的稳定流形的闭包<sup>[3,4]</sup>. 在控制参数变化到临界点时, 这不稳定流形与稳定流形相切. 在控制参数越过临界点后, 越过稳定流形的不稳定流形部分形成一个从原来的混沌吸引子逃逸的孔洞. 进入逃逸孔洞及其各阶逆象集合的迭代将在有限步后逃逸. 逃逸孔洞及其逆象集将切割掉不稳定周期轨道的不稳定流形上的几乎所有点. 残余部分形成一个分形, 称为“混沌鞍”或“奇异排斥子”<sup>[1,3,5-7]</sup>. 奇异排斥子上的迭代将永不开奇排斥子, 并永远在其上作混沌运动. 然而, 由于奇异排斥子是一个测度为零的集合, 并且整体上不是一个吸引集. 随机地选取初值点是完全不可能打中奇异排斥子的. 实验上或数值上可观测的并不是奇异排斥子本身, 而是它的一个很小的近邻. 从奇异排斥子近邻出发的迭代可以在它的近邻徘徊很长时间, 并显示混沌的性质, 但早晚它们要从原混沌吸引子所占据的区域逸出. 这使得原来被混沌吸引子占据的相空间中出现一个密切依赖

于初值的很长的瞬态混沌运动<sup>[1,3,5,6]</sup>. 在导致混沌吸引子突然扩张或合并的内禀或循环激变后<sup>[1,2]</sup>, 也会出现密切依赖于初值的长瞬态混沌运动, 也可以类似地定义混沌鞍或奇异排斥子. 混沌鞍、奇异排斥子和瞬态混沌的性质对许多实际问题, 例如混沌控制<sup>[8]</sup>和混沌保护<sup>[9]</sup>都很重要.

描述激变的最重要规律是所谓“生存时间”的标度律<sup>[1,3,5,6]</sup>:

$$\tau \propto \epsilon^{-\nu} \quad (\epsilon \rightarrow 0), \quad (1)$$

其中  $\tau$  为迭代在原混沌吸引子(现在已经成为混沌瞬态)所占据的区域的平均生存时间,  $\epsilon = |p - p_c|$  ( $p$  为控制参数,  $p_c$  为其临界值). 在处处光滑的一维映象中, 标度常数  $\nu = 1/2$  总成立.

在系统函数分段连续的映象系统中, 也可能由于混沌吸引子与映象的两个不连续区构成的“映孔”的碰撞而引起混沌吸引子的突然扩张(称为“映孔导致激变”<sup>[10-12]</sup>), 或由于混沌吸引子的吸引域内的一个不稳定周期轨道与一个不连续区碰撞而引起混沌吸引子的突然扩张(称为“不连续性导致激变”<sup>[13-15]</sup>). 这些激变都具有明显的新特征. 最近, 我们在一个描述电张弛振子的不连续一维映象的映孔导致激变之后发现了奇异排斥子的突变. 这一新现象我们尚未见报道.

## 2. 系 统

由于在文献 [10, 16, 17] 中对本系统已有详细描

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 19975039)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人.

述 我们在此仅作简略介绍. 在一个电子张弛振子中, 一个闸流管作为可控开关, 使一个电容器不断进行充电和放电. 加在电容器上的电压以指数规律在一个受到正弦调制的上阈值和一个常下阈值之间作张弛振荡. 由此可以得到如下描述此系统的映象<sup>[16]</sup>:

$$x_{n+1} = B_2 + A_2 \ln(C_2 + U_0 \sin x_{n+1})$$

$$= x_n + A_1 \ln\left(\frac{C_1}{B_1} + \frac{U_0}{B_1} \sin x_n\right) \quad [\text{mod } 2\pi]. \quad (2)$$

这里  $x_n$  是  $t_n$  时刻张弛振荡达到上阈值时调制信号的相位,  $A_1 = \omega D_1, A_2 = \omega D_2, B_i, C_i, D_i (i = 1, 2)$  是取决于各个电路参数的常数, 具体形式可见文献<sup>[10, 16]</sup>的表述.  $U_0, \omega$  是上阈值正弦调制信号的幅度和频率. 本文选取  $D_1 = 0.001516, B_1 = -5.7135v, C_1 = -18.51v, D_2 = 0.003300, B_2 = 11.485, C_2 = 35.00v, \omega$  固定为 900Hz.  $U_0$  取为控制参数.

文献<sup>[10, 16, 17]</sup>讨论了映象(2)的两条临界线, 并解析地得出了它们的表达式. 当控制参数越过临界线 1 时, 系统由可逆转变为不可逆; 当控制参数越过临界线 2 时, 系统由连续转变为不连续. 所有不连续性导致的特征现象, 例如 V 型阵发<sup>[18, 19]</sup>、映孔导致激变<sup>[10-12]</sup>、不连续性导致激变<sup>[13-15]</sup>、不连续性导致的混沌稳定和混沌抑制<sup>[20]</sup>、映孔导致吸引子共存<sup>[16, 21, 22]</sup>等都发生在两条临界线之上的区域中.

### 3. 奇异排斥子的突变

#### 3.1. 映孔导致激变

映孔是这类系统中的特征现象之一<sup>[10-12]</sup>. 它出现的机理已在文献<sup>[10, 11]</sup>中介绍过. 当研究映象  $f$  的一个  $p$  周期吸引子的稳定性和演化时, 必须考虑映象的不连续点  $x_g$  的若干逆映象  $f^{-k}(x_g) (k < p)$  处  $p$  阶映象  $f^p(x)$  的不连续行为. 这种不连续性在  $f(x)$  图像中只能隐含地表示, 然而在  $f^p(x)$  中却显含地表示出来, 如图 1 所示. 当  $x_g$  的第  $k$  个逆映象落在映象  $f$  的不可逆区时, 将会出现 2 或 3 个  $f^{-k}(x_g)$ , 用  $f_i^{-k}(x_g) (i = 1-3)$  来表示. 重要的是其中两个会对称地出现在一个函数极大值或极小值两边, 从而使此极值两边对称地出现两个不连续区, 切掉极值处的最高或最低的一小片映象函数, 形成一个映孔, 如图 1 所示. 映孔的出现是一种临界现象.

它突然出现在  $f^{-k}(x_g)$  水平线越过  $x_f(x)$  相平面上的一个极值之时. 当此水平线继续向前运动时, 它将切掉极值处的越来越大的一片映象函数, 形成一个越来越大的映孔. 在  $\omega = 900\text{Hz}, U_0 < U_{0c} (12.5784v < U_{0c} < 12.5787v)$  时, 映象(2)中导致激变的映孔尚未出现, 混沌吸引子尚被  $x \approx 5$  处的极小值及其前几阶映象限制在一个小范围  $S$  (即图 1 中比较密集的迭代所示的区域, 近似的定义域范围是  $x \in [4.40, 5.45]$ ) 内. 在  $U_0$  越过  $U_{0c}$  时, 如图 1 所示, 映孔突然出现, 使混沌吸引子突然扩张. 迭代在已经转变为混沌瞬态的原混沌吸引子占据区域  $S$  中进行许多次后从映孔中逸出, 经过两次迭代后, 又重新注入到原混沌吸引子占据区域, 如此无限地在这个扩张后的混沌吸引子上运动. 这时虽然由于映象的分段连续性不能定义混沌鞍 (没有鞍点及其流形、流形闭包等起作用), 然而可以定义一个奇异排斥子. 它可以定义为原混沌吸引子占据区域  $S$  与映孔及其各阶逆象集合  $H$  的差集. 这个奇异排斥子同样是一个分形, 是不可观测的. 可以观测的是位于奇异排斥子邻近的迭代, 它们在原吸引子占据区域  $S$  中徘徊一个长时间后, 最终由映孔逸出, 构成混沌瞬态中的超长部分. 屈世显、何大韧等人曾对此例映孔导致激变的机制和主要规律作了研究<sup>[10]</sup>, 然而由于当时的条件限制, 他们的计算结果在映孔变得较大时不够精确, 也未能研究奇异排斥子, 当然更未能注意和发现激变后发生的奇异排斥子的突变.

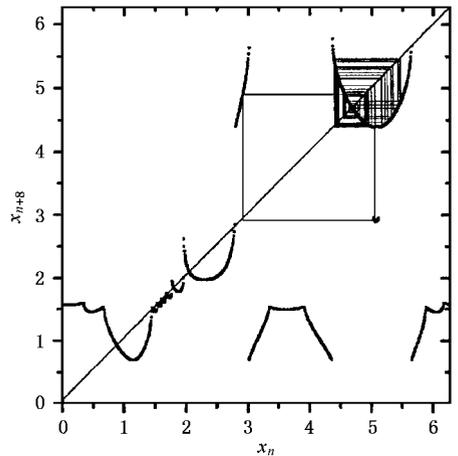


图 1  $U_0 = 12.5787v$  时映象(2)式的 8 阶回归映象图及扩张后的混沌吸引子的图示

### 3.2. 奇异排斥子及其分数维

显然,当映孔很小(如图 1 所示)时,映孔及其逆象集  $H$  远不能完全占据原混沌吸引子所在区域  $S$ , 奇异排斥子将是一个由相对更密集的点组成的、具有更大的分数维值的分形。当映孔随着  $U_0$  的增加越来越大时,映孔及其逆象集  $H$  也逐渐变大,组成奇异排斥子的点将越来越稀疏,它的分数维也将越来越小。在  $U_0$  达到  $U_{0d} \approx 12.625v$ , 映孔的左边沿达到图 1 中位于  $x \approx 4.7$  处的不稳定不动点时,易于证明映孔的各阶逆象的边界将刚好重合,原混沌吸引子占据区域  $S$  与映孔及其各阶逆象集  $H$  的差集变为空集。奇异排斥子的分维值也将从原来的连续演变规律中的某一点突然跃变到零。在  $U_0 > U_{0d}$  时,如图 2 所示,进入原混沌吸引子占据区域  $S$  的迭代将立即进入映孔而逃逸。它们逃逸后经过多次迭代仍旧重新注入  $S$ , 形成一个新的、一再扩张过的混沌吸引子。本文作者及其合作者曾使用屈世显等人为了模拟图 1 中映孔突然出现前后的映象函数关键部分而构造的分段线性简化模型<sup>[10,11]</sup>对上述奇异排斥子突变现象伴随的定量规律作了解析推导<sup>[23]</sup>,证明了在  $U_0 = U_{0d}$  时发生奇异排斥子分数维和原混沌吸引子占据区域  $S$  中生存时间所遵循规律的突变。对本文讨论的实际系统(映象(2)),看来很难作类似的定量解析推导,然而数值计算应该显示定性完全符合的结果。

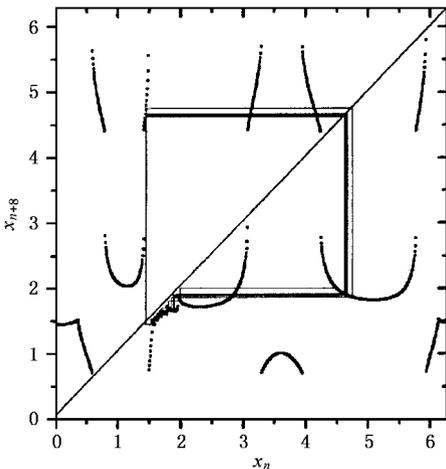


图 2  $U_0 = 12.65000v$  时映象(2)式的 8 阶回归映象图及扩张后的混沌吸引子的图示

奇异排斥子的数值计算是一个难题,并且一直是研究的热点之一<sup>[5,24]</sup>。对于这里研究的比较简单

的一维映象系统(2),我们的实践证明使用 Tél 早期建议的单轨迹方法<sup>[6]</sup>(single trajectory method)就可以得到相当满意的结果。图 3(a)显示了  $U_0 = 12.5787v$  时用此方法得到的奇异排斥子。图 3(b)更清楚地显示了它的分形本质。

比较图 1 与图 3 的区别,粗看起来图 1 与图 3 显示的图形似乎是相同的,然而在图 1 中选择的是  $S$  中的经过短短几十次迭代就会从映孔逃逸的初值,从而近似地表示由于映孔出现而导致的原混沌吸引子占据区域  $S$  中的混沌瞬态以及扩张后的混沌吸引子,而在图 3 中选择的是  $S$  中的经过几千次迭代后才会从映孔逃逸的初值,也就是显示超长瞬态的初值,从而在只显示几百次迭代时近似地表示奇异排斥子。换言之,图 3 是在近似地显示映孔导致激变之前存在的原混沌吸引子被映孔及其逆象集  $H$  切割后的余集,其上的迭代应该在原混沌吸引子占据区域  $S$  中无限次地运动而不从映孔逸出。在图 2 中,选任何一个  $S$  中的初值都会显示图中所示的立即逃逸,这时无所谓“超长瞬态”,也不再存在奇异排斥子。

类似地,图 3(c)显示了  $U_0 = 12.587v$ , 映孔已经相当大时用此方法得到的奇异排斥子。图 3(d)更清楚地显示了它的分形本质。这时映孔及其逆象集  $H$  已经占据了原混沌吸引子占据区域  $S$  的绝大部分,仅在图中所示的不稳定不动点附近还存在奇异排斥子上较密集的点。从这四幅图显示的两个参数情况仅可以认识奇异排斥子随映孔增大而改变的大致规律,定量计算得到的分数维变化规律才能准确揭示上述奇异排斥子的突变。为此我们用盒子计数法<sup>[25]</sup>计算了  $U_0 > U_{0c}$  时奇异排斥子的分数维随映孔增大而改变的规律。图 4(a),(b)分别显示了  $U_0 = 12.5787v$  和  $U_0 = 12.587v$  时标度的倒数  $\delta$  增大所引起的盒子计数  $N$  的变化。图中显示的良好标度不变区充分说明计算所得的奇异排斥子是分形,而且图中标度不变区的斜率就是要计算的分数维值。图 5 显示了分数维随参数  $U_0$  减小,并且证明了上述的分数维在  $U_0 = U_{0d}$  时突然变化到零的结论。

### 3.3. 迭代在原混沌吸引子占据区域中的生存时间

本文中迭代在原混沌吸引子占据区域  $S$  中的平均生存时间  $\tau$  定义为

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n}, \quad (3)$$

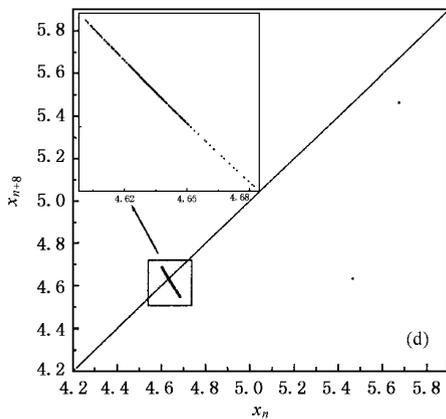
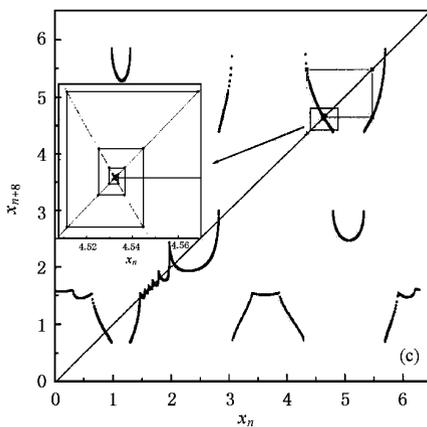
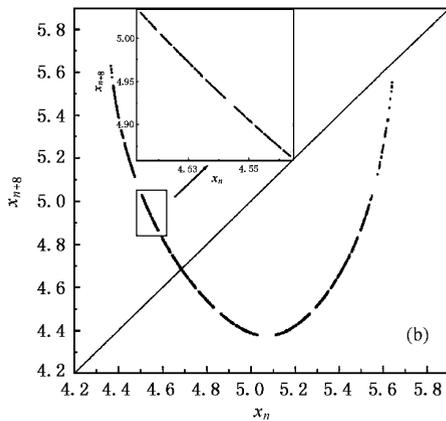
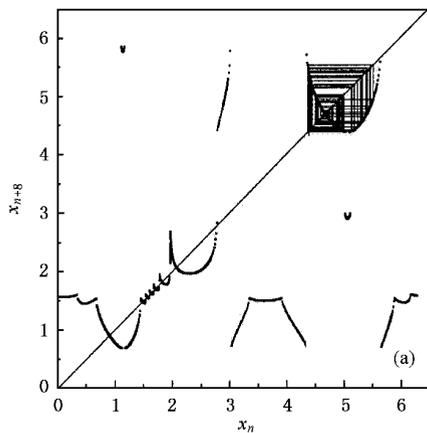


图3 (a)为  $U_0 = 12.5787v$  时映象(2)式在8阶回归映象图中显示的奇异排斥子 (b)为(a)中奇异排斥子的放大, 并且不再显示迭代过程. 插入图为小方框部分的放大, 以显示奇异排斥子几何结构的自相似性 (c)为  $U_0 = 12.587v$  时映象(2)式在8阶回归映象图中显示的奇异排斥子, 插入图为小方框部分的放大 (d)为(c)中奇异排斥子的放大, 并且不再显示迭代过程. 插入图为小方框部分的放大, 以显示奇异排斥子几何结构的自相似性

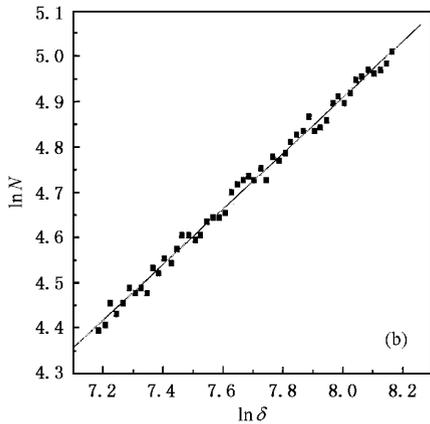
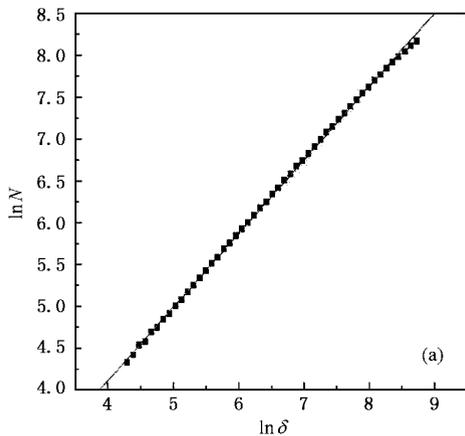


图4 (a)  $U_0 = 12.5787v$  时图 3(a)(b) 显示的奇异排斥子在标度变化时盒子计数的变化 (b)  $U_0 = 12.587v$  时图 3(c)(d) 显示的奇异排斥子在标度变化时盒子计数的变化

其中  $n$  是所取初值的数目(本文一律取  $10^6$  个),  $N_i$  是从第  $i$  个初值出发,在原混沌吸引子占据区域中迭代的瞬态长度. 请注意这里研究的是映孔导致激变已经发生( $U_0 > U_{0c}$ )的情况,原混沌吸引子已经在扩张后转变为混沌瞬态,所以生存时间是有限的. 文献 10 报道过本例映孔导致激变在  $U_0 \rightarrow U_{0c}$  时显示的非常独特的平均生存时间标度行为

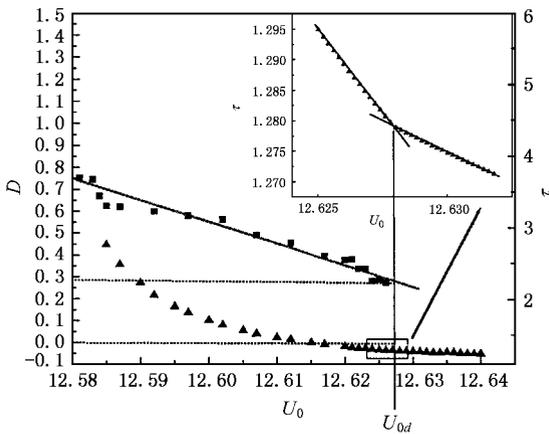


图 5 奇异排斥子的分数维  $D$  (用方块表示) 和迭代在原混沌吸引子占据区域中的平均生存时间  $\tau$  (用  $\blacktriangle$  表示) 的变化规律. 插入图是小方形区域的放大, 显示在  $U_0 = U_{0d}$  时发生的突变

$$\tau = C \exp[k(U_0 - U_{0c})]^{1/2}.$$

从文献 10 的图 4 和图 5 中显示的计算结果可以看到: 在  $\epsilon = |U_0 - U_{0c}|$  非常小时计算数据与表示上述标度规律的拟合曲线符合得相当好, 而在  $\epsilon$  较大时偏离就比较大. 这是由于当时较差的计算条件导致的低计算精度造成的. 我们大幅度地提高了计算精度, 重新计算了这个标度律, 并且把注意力集中在  $\epsilon$  较大的情况. 新的计算结果显示不管在  $\epsilon$  较大还是较小的情况下数据与表示上述标度规律的拟合曲线符合得很好, 在  $U_0 \approx U_{0d}$  附近这曲线可以近似地视为直线, 而且直线的斜率在  $U_0 = U_{0d}$  时发生突变. 图 5 同时显示了奇异排斥子的分数维和平均生存时间在参数  $U_0 \rightarrow U_{0d}$  时的变化规律.

## 4. 结 论

本文报道了奇异排斥子的拓扑突变. 这种突变将引起激变后长混沌瞬态运动行为的突变, 因而应该具有基础理论和实践上的重要意义. 目前这种被称为“瞬态激变”的新现象仅在分段连续映象中发生的映孔导致激变之后发现, 但似乎没有理由先验地否定在其他类型系统中观察到这种现象的可能.

[1] Grebogi C, Ott E and Yorke J A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 1284;  
Grebogi C, Ott E and Yorke J A 1987 *Phys. Rev. A*, **36** 5365  
[2] He D R, Wang B H et al 2001 *An introduction to nonlinear dynamics: The dynamic characteristics of everywhere-smooth and piecewise-smooth systems* (Xian Shaanxi Scientific and Technological Publishing House) Chapter 7, 8 (in Chinese) [何大韧、汪秉宏等 2001 非线性动力学引论: 处处光滑与分段光滑系统的动力学特性(西安: 陕西科技出版社, 第 7-8 章)]  
[3] Ott E 1993 *Chaos in dynamical systems* (Cambridge: Cambridge Univ. Press) p122-129  
[4] Wang W X, Ma M Q and He D R 2000 *J. Yangzhou Univ.* **3**(3) 19 (in Chinese) [王文秀、马明全、何大韧 2000 扬州大学学报 **3**(3) 19]  
[5] Nusse H E and Yorke J A 1989 *Physica* (Amsterdam) **36D** 137  
[6] Tél T 1990 *Transient Chaos*, in *Directions in Chaos* Vol. III, edited by Hao B L (Singapore: World Scientific)  
[7] Hong L and Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese) [洪灵、徐建学 2000 物理学报 **49** 1228]  
Hong L and Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵、徐建学 2001 物理学报 **50** 612]  
[8] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196  
Auerbach D, Grebogi C, Ott E and Yorke J A 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 3479

[9] Lai Y C and Grebogi C 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1094  
[10] Qu S X, Christiansen B and He D R 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 841 (in Chinese) [屈世显、B. Christiansen、何大韧 1995 物理学报 **44** 841]  
[11] Qu S X, Christiansen B and He D R 1995 *Phys. Lett. A* **201** 413  
[12] Qu S X and He D R 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1307 (in Chinese) [屈世显、何大韧 1997 物理学报 **46** 1307]  
[13] Sun J G, Guan S, Ji X P, He D R, Wang B H and Qu S X 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1970 (in Chinese) [孙建刚、官山、纪西萍、何大韧、汪秉宏、屈世显 1996 物理学报 **45** 1970]  
[14] Ding X L, Wu S G, Yin Y C and He D R 1999 *Chinese Phys. Lett.* **16** 167  
[15] Wu S G, Ding X L and He D R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2180 (in Chinese) [吴顺光、丁晓玲、何大韧 1999 物理学报 **48** 2180]  
[16] He D R, Wang B H et al. 1994 *Physica D* **79** 335  
[17] Wu S G, Ding X L, He D R et al. 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2162 (in Chinese) [吴顺光、丁晓玲、何大韧等 1999 物理学报 **48** 2162]  
[18] He D R, Wang B H et al. 1992 *Acta Phys. Sin.* **42** 711 (in Chinese) [何大韧、汪秉宏等 1992 物理学报 **42** 711]  
[19] Fan J P, Hou Y Q et al. 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1084 (in Chinese) [范建平、侯榆青等 1998 物理学报 **47** 1084]

- [ 20 ] He D R , Wu S G , *et al.* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1464 ( in Chinese ) [ 何大韧、吴顺光等 1997 物理学报 **46** 1464 ]
- [ 21 ] He D R *et al.* 1994 *Europhys. Lett.* **26** 165
- [ 22 ] He Q L , He D R *et al.* 1996 *J. Shaanxi Normal Univ.* **24** ( 3 ) 48 ( in Chinese ) [ 贺庆丽、何大韧等 1996 陕西师范大学学报 **24** ( 3 ) 48 ]
- [ 23 ] Wang W X , Lu Y Q , Chen H S , Ma M Q , Zhu Y Z and He D R 2002 *Chinese Phys. Lett.* **19** 901
- [ 24 ] Sweet D , Nusse H E and Yorke J A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2261
- [ 25 ] Yang Z R 2001 *Fractal Physics* ( Shanghai : Shanghai Sci. and Tech. Educ. Pub. House ) p 2 20 ( in Chinese ) [ 杨展如 2001 分形物理学 ( 上海 : 上海科技出版社 ) 第 2 20 页 ]

## Crisis of transient chaos in an electronic relaxation oscillator<sup>\*</sup>

Lu Yun-Qing Wang Wen-Xiu He Da-Ren

( College of Physics Science and Technology , Yangzhou University , Yangzhou 225002 , China )

( Received 10 April 2002 ; revised manuscript received 28 August 2002 )

### Abstract

A sudden topological change of a strange repeller happened after a hole-induced crisis is reported. This change is signified by the sudden change of its fractal dimension , and induces a sudden change of the behaviour of the long chaotic transient motion after the crisis , therefore it should be of importance in both basic theory and practice.

**Keywords** : crisis , strange repeller , chaotic transience

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 19975039 ).