

混沌的可加性*

甘建超^{1,2)} 肖先赐¹⁾

¹⁾ 电子科技大学电子工程学院, 成都 610054)

²⁾ 电子对抗国防科技重点实验室, 成都 610036)

(2002 年 6 月 5 日收到, 2002 年 8 月 28 日收到修改稿)

从理论上推导了由几个混沌时间序列构成的新序列的动力学特性, 提出了可加性的概念. 计算机仿真结果表明, 新的时间序列具有分维吸引子, 对初始值很敏感, 两条邻近轨道随着时间的增加呈现指数分离, 具有短期可预测性, 因此新序列也是混沌序列, 即混沌具有可加性. 混沌时间序列的可加性理论不仅具有重要的理论意义, 而且具有重要的应用价值, 它是研究多跳频电台的跳频码的理论基础.

关键词: 混沌时间序列, 吸引子, 分维, 可加性

PACC: 0545

1. 引 言

混沌是一种非线性动力学规律控制的行为, 表现为对初始值的敏感性, 其吸引子的维数是分维, 有十分复杂的分形结构, 具有短期可预测性和长期不可预测性.

自从美国的气象学家 E. Lorenz 在 1963 年发现了以他名字命名的奇怪吸引子以来, 混沌现象就逐渐为人们所重视. 1973 年, 李天岩和 Yorke 开始研究混沌的特征并第一次使用混沌即“chaos”一词^[1], 标志着混沌学的诞生. 1980 年, Packard 等学者提出了时间序列重构的思想和方法^[2]. 1981 年, Takens 和 Packard 等人在 Whitney 的拓扑嵌入定理基础上, 提出重构动力学轨迹相空间的延迟坐标法^[3], 提供了一种分析时间序列的新方法. 最大李亚谱诺夫指数从量上描述混沌系统对初始值的敏感性, Rosenstein 等人提出了计算最大李亚谱诺夫指数的算法^[4]. 吸引子的维数反映了混沌系统的几何特征的复杂性, 计算吸引子的维数的方法有 Grassberger-Procaccia 算法^[5]等. 1985 年, Wolf 等人提出了计算时间序列 Lyapunov 谱的数值算法^[6,7], 已成为判断一个时间序列是否混沌时间序列的最基本算法.

在电子战领域, 跳频码由于具有低截获、抗干扰

等性能而获得了广泛应用. 对于电子对抗专家而言, 他们关心的是怎样截获与干扰跳频信号. 利用跳频码具有混沌特性^[8], 由混沌的短期可预测性可以对跳频码进行预测^[9-20], 从而实现跳频信号的引导测向和引导干扰. 但是, 对于多跳频电台的情况, 是否还能采用上面的信号处理办法? 这是每一个工程技术人员关心的问题.

以相邻跳频点为 256 为例, 每一跳到下一跳有 256 种可能. 如果两个跳频电台同时发射跳频信号, 并且两种情形交替进行, 则直观上每一跳到下一跳之间就不是 256×256 种可能, 究竟有多少种可能性是无法知道的. 两个以上跳频电台的情形则更复杂. 如果多跳频电台产生的跳频码序列不具有混沌特性, 表现为完全随机的行为, 则从理论上说就不能应用预测的方式来引导测向和引导干扰. 如果多跳频电台产生的跳频码序列具有混沌特性, 则从理论上可以应用预测的方式实施对跳频信号的引导测向和引导干扰. 因此, 研究多跳频电台产生的跳频码序列的性质具有重要的应用价值.

由于跳频码具有混沌特性, 因此多跳频电台产生的跳频码新序列实质上就是多个混沌系统构成的新系统. 为了从理论上回答多跳频电台是否还具有混沌特征, 本文推导了多个混沌系统构成的系统的混沌动力学特性, 通过计算吸引子维数以及最大李

* 国防预研基金(批准号: 51435050101DZ0203)资助的课题.

亚谱诺夫指数 验证了新系统具有短期可预测性,因此从理论和仿真两个方面证明了新系统也具有混沌特性,也就是混沌具有可加性.这个结论为用预测的方式来实施对多跳频电台的引导测向和引导干扰扫清了理论障碍.

2. 多个混沌系统构成的系统的混沌动力学模型

假设有 M 个混沌时间序列为

$$\{a_n^j\} = \{a_1^j, a_2^j, a_3^j, \dots, a_n^j, \dots\} \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

其中上标表示第 j 个混沌时间序列.其混沌动力学差分方程为

$$a_{n+1}^j = F(a_n^j) \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

为了研究方便,首先考虑两个混沌时间序列构成的新序列,假定这两个序列对应项交叉构成新序列的项,即新序列为

$$\{a_n\} = \{a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2, a_3^1, a_3^2, \dots, a_n^1, a_n^2, \dots\}. \quad (3)$$

新序列的动力学差分方程为

$$a_{n+1} = \Phi(a_n) = \begin{cases} F(a_n^1) & n = 2k - 1, \\ F(a_n^2) & n = 2k, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4)$$

于是, M 个混沌时间序列构成的新序列为

$$\{a_n\} = \{a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^M, a_2^1, a_2^2, \dots, a_2^M, \dots, a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^M, \dots\}. \quad (5)$$

新序列的动力学差分方程为

$$a_{n+1} = \Phi(a_n) = \begin{cases} F(a_n^1) & n = Mk - 1, \\ F(a_n^2) & n = Mk - 2, \\ \dots & \\ F(a_n^{M-1}) & n = Mk - (M - 1), \\ F(a_n^M) & n = Mk, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6)$$

当然,新序列中各项的形成方式可以是其他方式.不管怎样,新映射 Φ 不同于原来的混沌映射 F .

3. 主要结果

3.1. 计算机仿真所用到的混沌映射及其参数

鉴于篇幅,下面只给出了三个典型的混沌映射. logistic 混沌映射

$$x(n+1) = \alpha x(n)(1-x(n)), \alpha = 4; \quad (7)$$

Tent 混沌映射

$$x(n+1) = \begin{cases} x(n)a & x(n) \leq a \\ (1-x(n))(1-a) & x(n) > a \end{cases} \quad a = 0.4; \quad (8)$$

Henon 混沌映射

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 + y(n) - 1.4x^2(n), \\ y(n+1) = 0.3x(n). \end{cases} \quad (9)$$

对于上面的多变量的混沌映射,在下面的分析中,均取 x 分量来计算其关联维数、嵌入维数、预测值,其相空间中的吸引子也是 x 分量的吸引子.

3.2. 相空间中的吸引子

由于多个混沌时间序列构成的混合序列种类繁多,为了研究方便,下面只考虑两个混沌序列的组合,分为相同序列取不同初始值的序列组合以及不同序列的组合两种情况.在以下的相图中,样本点都取 2000 点.

3.2.1. 相同混沌序列取不同初始值的组合混沌序列的吸引子

两个 logistic 混合混沌映射的 3 维吸引子如图 1 所示.两个 Tent 混合混沌映射的 3 维吸引子如图 2 所示.

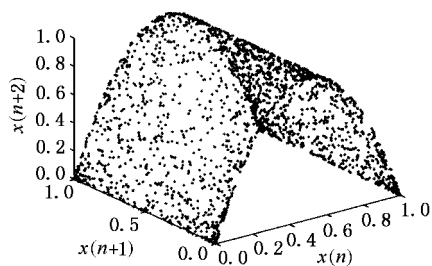


图 1 两个 logistic 映射的吸引子

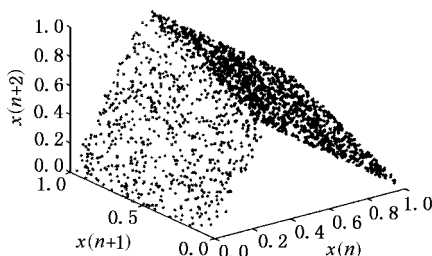


图 2 两个 Tent 映射的吸引子

两个 Henon 映射的 3 维吸引子如图 3(a)所示,

x - y 平面上的 2 维吸引子如图 3(b)所示.

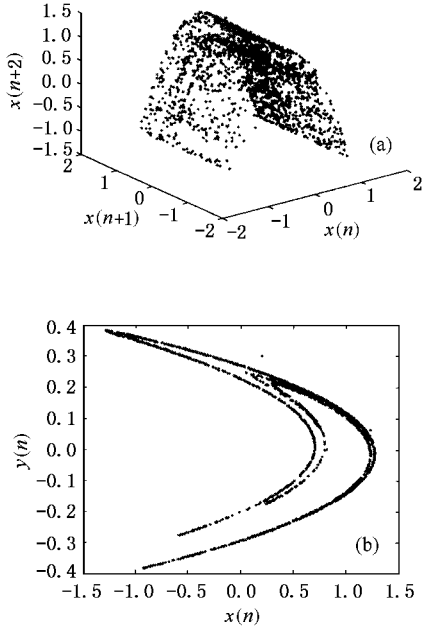


图 3 两个 Henon 混沌映射的吸引子

以上相图说明,相同混沌序列取不同初始值的组合序列在三维相空间中有吸引子.

3.2.2. 不同混沌序列的组合混沌序列的吸引子

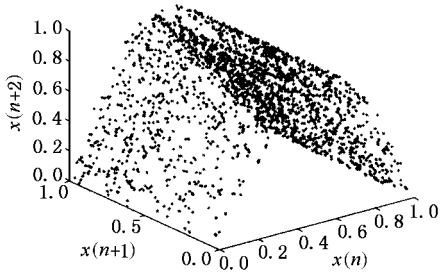


图 4 Tent 和 Henon 混合映射的吸引子

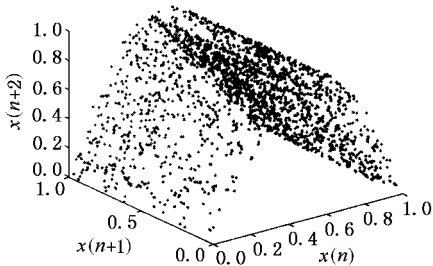


图 5 Tent 和 logistic 混合映射的吸引子

为了方便,所有混沌序列都采用下列归一化变换:

$$x(n) = (a(n) - a_0)(a_1 - a_0),$$

$$a_1 = \max_{n=1, \dots, N} \{a(n)\}, a_0 = \min_{n=1, \dots, N} \{a(n)\}.$$

(10)

Tent 混沌映射和 Henon 混沌映射的混合映射的 3 维吸引子如图 4 所示. Tent 混沌映射和 logistic 混沌映射的混合映射的 3 维吸引子如图 5 所示.

以上相图说明,不同混沌序列的组合序列在三维相空间中也有吸引子.

3.3. 混合混沌映射的吸引子关联维数

吸引子的维数反映了刻画吸引子至少需要的自由变量的个数,而吸引子的维数有多种形式,通常使用的是关联维数,其计算的方法中比较好、使用的是 Grassberger-Procaccia 算法^[5],本文采用这种方法来计算跳频码吸引子的关联维数.这种方法的主要过程是根据相空间的重构矢量 X ,计算这些矢量的关联和 $C_m(r)$,然后作出 $\ln C_m(r) - \ln(r)$ 曲线(r 可取任意小的正数),取其中比较直的一段平滑曲线的斜率 D_c 作为吸引子关联维数的估计值.

在以下的仿真中,所有的映射都经过归一化处理,归一化区间为 $[0, 1]$,样本点都为 2000 个.当嵌入维数比较小时,斜率 D_c 还不是真实值;当嵌入维数逐渐增加到一定程度后,斜率 D_c 将会趋于一个稳定值,这个稳定值就是吸引子的关联维数.为了保证 D_c 趋于稳定值,本文所取嵌入维数为 $m = 5, 6, 7, 8, 9$ 时间间隔 $\Delta t = 1$.

图 6(a) 表示两个 Henon 混沌映射的 $\ln C_m(r) - \ln(r)$ 曲线,图 6(b) 表示两个 Tent 和 Henon 混沌映射的 $\ln C_m(r) - \ln(r)$ 曲线.从图 6 可以看出,两图中的 $\ln C_m(r) - \ln(r)$ 曲线在嵌入维数增加到一定程度后 ($m > 6$) 有近似平行的区域,这些平行区域的斜率就是吸引子的关联维数,其余情况也有类似结果.

表 1 的数据反映了各种混合混沌序列的吸引子的关联维数,从量上描述了这些吸引子的几何特性以及刻画这些吸引子所需自由变量的个数.

表 1 各种混合混沌映射的吸引子关联维数

混合混沌映射的吸引子关联维数 D_c (近似值)	
两个 logistic 混沌映射	3.3973
两个 Tent 混沌映射	2.3731
两个 Henon 混沌映射	2.3372
Tent 和 Henon 映射	2.4867
Tent 和 logistic 映射	3.0485

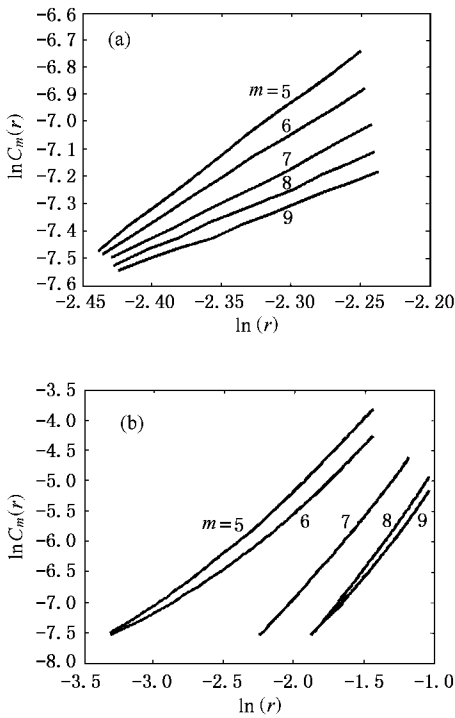


图 6 两个混沌映射构成的新序列的 $\ln C_m(r) - \ln(r)$ 曲线

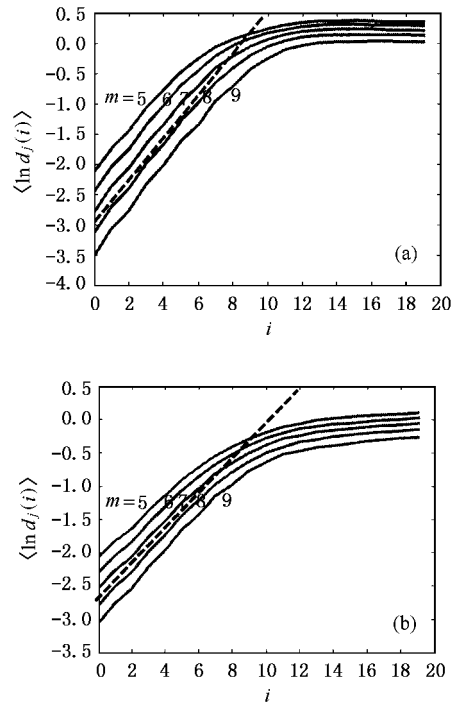


图 7 两个混合映射的 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i$ 曲线

3.4. 混合混沌映射的最大李亚普诺夫指数

混沌映射的最大李亚普诺夫指数反映了动力系统的稳定性,也定量地反映了该系统对初始条件的敏感性^[3,7]程度.为了计算混合混沌映射的最大李亚普诺夫指数,本文采用 Rosenstien 等人提出的算法^[4]通过对跳频码序列进行相空间重构,记 $d_j(i)$ 表示第 j 条轨道与其最临近轨道在第 i 时刻的距离, Δt 表示时间间隔,则最大李亚普诺夫指数 λ 就是 $\ln d_j(i) - i\Delta t$ 曲线的斜率.为了得到比较可靠的结果,可以计算 $\ln d_j(i)$ 的统计平均值 $\langle \ln d_j(i) \rangle$ 来代替 $\ln d_j(i)$.对于混沌系统,其 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i\Delta t$ 曲线有一段比较平直的区域,这段区域的斜率就是指数 λ .

图 7(a) 表示两个 logistic 混沌映射的 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i$ 曲线,图 7(b) 表示两个 Tent 和 Henon 混沌映射的 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i$ 曲线.从图 7 可以看出,两图中的 $\langle \ln d_j(i) \rangle - i$ 曲线确实有一段比较平直的区域(虚线所示),其余情形类似.表 2 列出了各种混合混沌映射的最大李亚普诺夫指数 λ , 并且最大李亚普诺夫指数 λ 都为有限的正数,反映了各种混合映射的两条不同轨道的具体分离程度,充分证明了它们确实具有对初始值的敏感性,邻近不同轨道随着时间的增长呈指数分离.

表 2 各种混合映射的最大李亚普诺夫指数

混合映射的最大李亚普诺夫指数 λ (近似值)	
两个 logistic 混沌映射	0.2842
两个 Tent 混沌映射	0.2433
两个 Henon 混沌映射	0.1535
两个 Tent 和 Henon 映射	0.2023
两个 Tent 和 logistic 映射	0.2303

3.5. 混合映射的短期可预测性

为了验证混合序列具有短期可预测性,采用如下算法,其步骤为:

1. 重构相空间.假设嵌入维数为 m ,时间延迟为 τ , Δt 为采样时间间隔,则状态向量为

$$X = (x_{N+(m-1)\tau\Delta t}, x_{N+(m-2)\tau\Delta t}, \dots, x_{N+\tau\Delta t}, x_N). \quad (11)$$

2. 根据合适的半径 ϵ 寻找点 $x_n (n < N)$ 的空心邻域 $U_\epsilon(x_n)$ 内的邻近点 $x_n \in U_\epsilon(x_N)$, 其中 $n < N$. 计算空心邻域 $U_\epsilon(x_N)$ 内的邻近点个数 $|U_\epsilon(x_N)|$, 当时间延迟为 $\tau = 1$, 采样时间间隔 $\Delta t = 1$ 时,记录下这些邻近点的将来第 m 个值 x_{n+m} .

3. 计算点 $x_n (n < N)$ 的预测值

$$\hat{x}_{n+m} = \frac{1}{|U_\epsilon(x_n)|} \sum_{x_n \in U_\epsilon(x_n)} x_{n+m}, \quad n < N. \quad (12)$$

如果 $m = 1$ 则为进一步预测,若 $m \geq 2$ 则为 m 步

预测. 在下面的计算机仿真中, 均取样本 $N = 2000$, 前面 500 点为训练集, 后面 1500 点为测试集. 为了便于比较, 将真实值 x_N 介于预测值 $\hat{x}_{N+m} \pm 5\% \hat{x}_{N+m}$ 范围内者当作有效预测, 然后统计 1500 点的有效预测率 ρ . 记 1500 点的预测误差的均方根为 σ . 对各类新映射进行预测时, 所取嵌入维数 m 和邻域半径 r 均为最佳以保证最佳预测效果. 表 3 统计了混合混沌序列的一步预测性能.

表 3 各种混合映射的预测结果

预测结果	嵌入维数 m	邻域半径 r	误差均方根 σ	预测比率 $\rho/\%$
两个 logistic 混沌映射	2	0.1	0.2000	59.1333
两个 Kent 混沌映射	2	0.1	0.0192	70.2667
两个 Henon 混沌映射	2	0.1	0.0275	73.8667
Kent 和 Henon 映射	2	0.1	0.0213	72.3333
Kent 和 logistic 映射	2	0.1	0.0187	79.5333

为了更直观地反映混合映射的预测效果, 图 8 和图 9 表示了两种典型的混合映射的预测结果, 其中 (a) 图表示预测, x 轴表示时间, y 轴表示真实值。和预测值。 (b) 图表示真实值和预测值的关系, x 轴表示真实值, y 轴表示预测值. 由图 8 和图 9 中的 (b) 图可以看出, 真实值和预测值基本上分布在对角线附近, 说明混合映射的预测效果很好, 也就是具有短期可预测性, 其余情形也有类似结果.

以上的理论分析和仿真结果说明了两个混沌时间序列组合构成的新序列具有有限的正的最大李亚普诺夫指数 λ , 其吸引子是分维而且具有复杂的分形结构, 这些混合序列还具有短期可预测性, 因此新构成的序列也是一个混沌序列. 于是, 下面的命题成立.

命题 1 两个混沌时间序列组合构成的新序列也是一个混沌序列.

既然两个混沌时间序列组合构成的新序列也是一个混沌序列, 那么三个或三个以上的混沌时间序列组合构成的新序列是否也是一个混沌序列? 下面的命题给出了肯定的回答.

命题 2 $n(n \geq 2)$ 个混沌时间序列构成的新序列也是一个混沌序列.

证明 采用数学归纳法.

1. 当 $n = 2$ 时, 即新序列是由两个混沌时间序列构成, 由前面的论证以及仿真结果可知, 新构成的序列也是一个混沌序列.

2. 假设 $n = k(k$ 为大于 2 的正整数) 时, k 个混

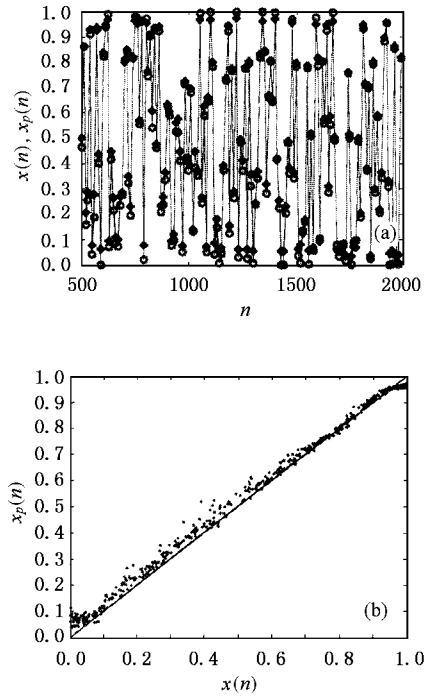


图 8 两个 logistic 混合映射的预测

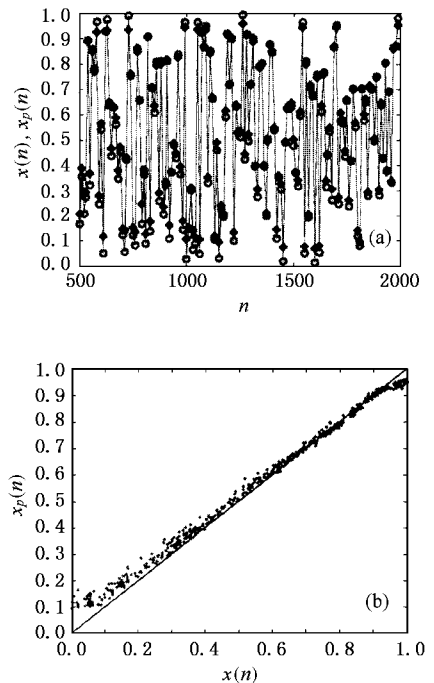


图 9 两个 Kent 和 Henon 混合映射的预测

沌时间序列构成的新序列也是一个混沌序列. 下面证明 $n = k + 1$ 时, 即 $k + 1$ 个混沌时间序列构成的新序列也是一个混沌序列.

令 k 个混沌时间序列构成的新序列为 $\{a_n\}$, 则 $k + 1$ 个混沌时间序列构成的新序列 $\{b_n\}$ 即为序列

$\{a_n\}$ 与第 $k+1$ 个混沌时间序列构成. 又由假设可知, 序列 $\{a_n\}$ 为混沌序列, 所以它与第 $k+1$ 个混沌时间序列构成的新序列也是混沌序列, 即 $k+1$ 个混沌时间序列构成的新序列 $\{b_n\}$ 是一个混沌序列.

综上所述, n ($n \geq 2$) 个混沌时间序列构成的新序列也是一个混沌序列.

4. 结 论

本文推导了多个混沌系统构成的系统的混沌动力学特性, 从理论和仿真两个角度说明了两个混沌时间序列构成的新序列具有对初始值敏感性, 两条邻近轨道随着时间的增长呈现指数分离, 其吸引子是分维而且具有复杂的分形结构, 这些混合序列还

具有短期可预测性, 因此新构成的序列也是一个混沌序列. 最后用数学归纳法证明了多个混沌时间序列组合构成的新序列也是一个混沌序列.

上面的结论说明混沌现象具有可加性, 混合后新的时间序列具有与原来序列不同的动力学特性, 其吸引子形状在变化, 各种混沌特性也在变化, 但是这些变化是在原来特性和形状基础上的变化, 是原来的继承与发展, 也就是说既有遗传也有变异.

混沌时间序列的可加性不仅具有十分重要的理论意义, 而且也有十分重要的应用价值. 在跳频通信和雷达中, 由于跳频具有混沌特性, 因此多个跳频电台发射形成的跳频码也具有混沌特性就是自然的结论, 这为研究多跳频电台提供了理论依据.

- [1] Li T Y, Yorke J A, 1975 *Am. Math. Monthly* **82** 985
 [2] Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D and Shaw R S 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 712
 [3] Takens F, 1981 *Dynamical Systems and Turbulence* eds D Rand and L S Young (Berlin: Springer)
 [4] Rosenstien M T, Collins J J and Luca C J D 1993 *Physica D* **65** 117
 [5] Grassberger P and Procaccia I 1983 *Physica D* **9** 189
 [6] Wolf A, Swift J B, Swinney H L and Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
 [7] Rosenstien M T, Collins J J and Luca C J D 1994 *Physica D* **73** 82
 [8] Guo S B, Xiao X C 2000 *System Engineering and Electronic Technology* **22**(12) 28 (in Chinese) [郭双冰、肖先赐 2000 系统工程与电子技术 **22**(12) 28]
 [9] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 53 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 53]

- [10] Casdagli M, Eubank S, Farmer J D and Gibson J F 1991 *Physica D* **51** 52
 [11] Eckmann J P and Ruelle D 1992 *Physica D* **56** 185
 [12] Theiler J 1986 *Phys. Rev. A* **34** 2427
 [13] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 403 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 403]
 [14] Zhang J S, Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]
 [15] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Chin. Phys.* **9** 408
 [16] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 88
 [17] Zhang J S, Xiao X C 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 897 (in Chinese) [张家树、肖先赐 1998 物理学报 **47** 897]
 [18] Zhang J S, Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1248 (in Chinese) [张家树、肖先赐 1998 物理学报 **50** 1248]
 [19] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Chin. Phys.* **10** 97
 [20] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Chin. Phys.* **10** 390

Characteristic of addition of chaos^{*}

Gan Jian-Chao^{1,2)} Xiao Xian-Ci¹⁾

¹⁾ Department of Electronic Engineering, University of Electronics Science and Technology, Chengdu 610054, China)

²⁾ National Electronic Warfare Laboratory, Chengdu 610036, China)

(Received 5 June 2002; revised manuscript received 28 August 2002)

Abstract

The additivity of chaotic time series is proven theoretically. The result of our computer simulation illustrates that the new chaotic time series, produced by combining several chaotic time series. Can have fractal attractors, and is sensitive to the initial states, and predictable in short-term prediction. Also, two different trajectories well depart exponentially with time. Therefore, these new series are chaotic time series. We can say that chaos has characteristic of addition. The characteristic that chaotic time series can be integrated is not only important in theory, but also important in practice. It is a theoretical base to research hopping frequency codes of multi-radio-station.

Keywords: chaotic time series, attractor, fractal dimension, characteristic of addition

PACC: 0545

* Project supported by the National Defense Foundation of China (Grant No. 51435050101DZ0203).