

2 + 1 维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程中孤子相互作用的探索^{*}

阮航宇^{1,2)} 陈一新²⁾

¹⁾ 宁波大学物理系, 宁波 315211)

²⁾ 浙江大学近代物理中心, 杭州 310027)

(2002 年 7 月 23 日收到, 2002 年 9 月 28 日收到修改稿)

利用分离变量法得到了 2 + 1 维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程包含三个任意函数的精确解. 合适地选择任意函数, 该精确解可以是描述所有方向指数局域的 dromion 相互作用, 三个方向指数局域的 Soliton 和 dromion 相互作用以及线孤子和 y 周期孤子相互作用的解. 对 dromion 相互作用从解析和几何两个角度进行了详细地探讨, 揭示了一些新的相互作用规律.

关键词: dromions 相互作用, NNV 方程, 分离变量法

PACC: 0230, 0340

1. 引 言

众所周知, 孤子理论在自然科学, 如凝聚态物理、流体力学、等离子体物理、纤维光学、天体物理、生命科学等众多领域有着广泛的应用前景^[1-5]. 孤子的弹性相互作用性质是孤子理论具有良好应用前景的基础. 1 + 1 维可积模型中孤子间的碰撞被公认是弹性的, 也就是说两孤子在碰撞过程中除了位相漂移没有任何物理量的交换, 碰撞前后波形保持不变. 然而从高维可积模型的对称性研究中发现, 2 + 1 维可积模型的对称结构远比 1 + 1 维可积模型丰富^[6-9]. 由此联想, 其孤子间的相互作用可能比低维可积模型复杂的多. 对高维可积模型的孤子相互作用有过不少报道, 可能高维非线性模型的求解比较困难, 大部分工作局限在相互作用现象的揭示^[10, 11], 很少涉及相互作用规律的探索. 我们对该课题做过不少探索^[12-15], 给出了某些 2 + 1 维可积模型中 dromion 相互作用的某些一般规律, 由于精确求解的困难性, 我们以往在该方向上的探索也受到了较大的限制. 最近, 分离变量方法的建立^[16, 17], 为进一步揭示高维可积模型中的孤子相互作用性质提供了有力的工具.

本文采用变量分离的思想, 按照孤子相互作用研究的需要, 设置了变量分离形式, 得到了 2 + 1 维 Nizhnik-Novikov-Veselov (NNV) 方程含有三个任意函数的精确解. 利用该精确解, 从解析和几何两个角度探讨了指数局域孤子 (dromion) 之间的相互作用现象, 揭示了一些新的相互作用规律.

2. 2 + 1 维 NNV 方程的精确解

2 + 1 维 NNV 方程

$$u_t + u_{xxx} + u_{yyy} = \mathfrak{X}(uv)_x + \mathfrak{X}(uw)_y, \quad (1)$$

$$v_y = u_x, \quad w_x = u_y \quad (2)$$

是 1 + 1 维 KdV 方程一个各向同性的 Lax 可积推广. Tagami, Hu 和 Li^[18, 19] 通过 Bäcklund 变换方法, 得到了该方程的类孤子解. 许多作者对 NNV 方程的其他类型的孤子解也进行了研究, 如 Boiti 等人^[20] 用反散射方法求解了 NNV 方程, Radha 和 Lakshmanan 通过双线性方法获得了该方程的多 dromion 解^[21]. 由于该方程未能写出明显的双线性形式, 以往常用的双线性方法研究孤子相互作用的手段碰到了较大的困难, 因此有关 NNV 方程孤子相互作用的研究非常少. 然而, 我们相信 NNV 方程存在着许多至今尚未发现的有趣的孤子结构和丰富的孤子相互作用现

^{*} 浙江省自然科学基金 (批准号: 100033), 油气藏地质及开发工程国家重点实验室开放基金 (批准号: PLN0104) 和教育部基金 (批准号: C0001) 资助的课题.

象.借用变量分离的思想,可以得到较多的精确解形式.某些精确解可以用来研究孤子相互作用规律.

为了采用变量分离方法,引入 Bäcklund 变换

$$u = -\mathcal{X}(\ln f)_{xy} + u_0, \quad v = -\mathcal{X}(\ln f)_{xx} + v_0, \\ w = -\mathcal{X}(\ln f)_{yy} + w_0, \quad (3)$$

式中 $\{u_0, v_0, w_0\}$ 是 NNV 方程的一个任意已知的种子解.为简单起见,取种子解为以下的特殊形式:

$$u_0 = 0, \quad v_0 = v_0(x, t), \quad w_0 = w_0(y, t). \quad (4)$$

把拥有(4)式的(3)式代入(1)式,得到(1)式的三线形式

$$-f(f_{xxxx}f_y + f_x f_{yt} - 2f_{xy}f_{yyy} + f_t f_{xy} + f_x f_{yyy} \\ + 4f_{xxy}f_x) + 2f_{xxx}(ff_{xy} + f_x f_y) + 6f_x^2 f_{xxy} \\ - 6f_{xy}f_x f_{xx} + 6f_y^2 f_{yyx} - f_y(4ff_{yyx} + ff_{tt} \\ - 2f_x f_t - 2f_x f_{yyy} + 6f_{xy}f_{yy}) + f^2(f_{xxxxy} \\ + f_{yyyxx} + f_{xyt}) + 3(f_x f_y - ff_{xy})w_{0y} \\ + v_{0x}) + v_0(6ff_x f_{xy} + 3ff_y f_{xx} - 3f^2 f_{xxy} \\ - 6f_x^2 f_y) + w_0(6ff_y f_{xy} - 3f^2 f_{yyx} \\ - 6f_x f_y^2 + 3f_x f_{yxf}) = 0, \quad (5)$$

(2)式在变换(3)下自动满足.

经过详细运算,我们发现方程(5)可以拥有

$$f = p_1(x, t) + p_2(x, t)q(y, t) \quad (6)$$

的变量分离形式.在(6)式中, $p_1 \equiv p_1(x, t), p_2 \equiv p_2(x, t)$ 是 $\{x, t\}$ 的函数, $q \equiv q(y, t)$ 是 $\{y, t\}$ 的函数.显然,变量 x 和 y 已被完全分离.将(6)式代入(5)式,得到

$$(2f_x - f\partial_x) \mathcal{X} p_{1xxx}p_2 - p_{2xxx}p_1 + \mathcal{X} p_{2xx}p_{1x} - p_{1xx}p_{2x} \\ + p_2p_{1t} - p_1p_{2t} + 3v_0(p_1p_{2x} - p_2p_{1x}) + (p_1p_{2x} \\ - p_2p_{1x}) \mathcal{X} (2p_2 - q_y^{-1}f\partial_y) \mathcal{X} - q_{3y} - q_t + 3q_y w_0) = 0. \quad (7)$$

由于 p_1, p_2 不依赖 y, q 不依赖 x , 方程(7)等价于下面两个方程:

$$p_{2t}p_1 - p_2p_{1t} = 3v_0(p_1p_{2x} - p_2p_{1x}) + p_{1xxx}p_2 \\ - p_{2xxx}p_1 + \mathcal{X} p_{2xx}p_{1x} - p_{1xx}p_{2x} \quad (8)$$

$$q_t = 3q_y w_0 - q_{3y}. \quad (9)$$

方程(8)(9)中 v_0 和 w_0 的任意性,使得 NNV 方程的解拥有十分丰富的结构.事实上,由于 v_0 和 w_0 的任意性,我们不必解 1 + 1 维方程(8)和(9).即若固定函数 v_0 和 w_0 为

$$v_0 = \frac{1}{\mathcal{X} p_1 p_{2x} - p_2 p_{1x}} \{ p_{2t} p_1 - p_2 p_{1t} + p_{2xxx} p_1 \\ - p_{1xxx} p_2 - \mathcal{X} p_{2xx} p_{1x} - p_{1xx} p_{2x} \}, \quad (10)$$

$$w_0 = \frac{1}{3q_y} (q_t + q_{3y}), \quad (11)$$

则 p_1, p_2 和 q 成为三个任意函数.最后,将(6)式代入(3)式,发现 NNV 方程具有

$$u = -\mathcal{X}(\ln f)_{xy} \\ = -\frac{2p_{2x}q_y}{p_1 + p_2q} + \frac{\mathcal{X} p_{1x} + p_{2x}q}{(p_1 + p_2q)^2} p_2 q_y, \quad (12)$$

$$v = -\mathcal{X}(\ln f)_{xx} + v_0 = -2\frac{p_{1xx} + p_{2xx}q}{p_1 + p_2q} \\ + \frac{\mathcal{X} p_{1x} + p_{2x}q}{(p_1 + p_2q)^2} + v_0, \quad (13)$$

$$w = -\mathcal{X}(\ln f)_{yy} + w_0 = -\frac{2p_2 q_{yy}}{p_1 + p_2q} \\ + \frac{2p_2^2 q_y^2}{(p_1 + p_2q)^2} + w_0 \quad (14)$$

形式的精确解.从(10)–(14)式可看出, p_1, p_2 和 q 的任意选择可能会引起 u, v, w 的某些奇性.因此在选择任意函数 p_1, p_2 和 q 时应考虑避免(12)–(14)式的奇性.即使在选择函数 p_1, p_2 和 q 时受到(12)–(14)式奇性的限制,解(12)(13)和(14)式仍揭示了相当丰富的孤子结构.下面是一些有趣的例子.取

$$p_1 = \sqrt{K} \cosh(k_1 x - k_1^3 t), \\ p_2 = 1, \quad q = \cos(l_2 y), \quad (15)$$

对物理场 u 和势 v 我们获得周期孤子解

$$u = -\frac{2k_1 l_2 \sqrt{K} \sin(k_1 x - k_1^3 t) \sin(l_2 y)}{[\sqrt{K} \cosh(k_1 x - k_1^3 t) + \cos(l_2 y)]^2}, \quad (16)$$

$$v = -\frac{4k_1^2 [2K + 2\sqrt{K} \cosh(k_1 x - k_1^3 t) \cos(l_2 y)]}{[2\sqrt{K} \cosh(k_1 x - k_1^3 t) + 2\cos(l_2 y)]^2}. \quad (17)$$

如果 p_1, p_2, q 被选为

$$p_1 = 1 + a_1 \exp(2\xi_1) + \exp(\xi_2) \\ + a_{12} \exp(2\xi_1 + \xi_2), \\ p_2 = -a_{11} \exp(\xi_1) - a a_{12} \exp(\xi_1 + \xi_2), \\ q = \cos(l_2 y), \quad (18)$$

$$\xi_1 = k_1 x - \omega_1 t, \quad \xi_2 = k_2 x - \omega_2 t, \\ \omega_1 = k_1^3, \quad \omega_2 = \frac{k_2(3k_1^4 + 3l_2^2 - k_1^2 k_2^2)}{2k_1^2},$$

$$a_1 = \frac{k}{4k_1^4}, \quad a a_{12} = \frac{L}{k_1^2}, \quad a_{12} = \frac{kL^2}{4k_1^4},$$

$$a_{11} = \frac{1}{k_1^2}, \quad L = \frac{(k_1 - k_2)^2 - \frac{l_2^2}{k_1^2}}{(k_1 + k_2)^2 - \frac{l_2^2}{k_1^2}},$$

那么势函数

$$v = -\mathcal{X}(\ln f)_{xx} + v_0 \quad (19)$$

是描述线孤子和 y 周期孤子相互作用的解 式中

$$f = p_1 + p_2 q = 1 + \frac{k}{4k_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{1}{k_1^2} \exp(\xi_1) \cos(l_2 y) + \exp(\xi_2) \left[1 + \frac{kL^2}{4k_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{L}{k_1^2} \exp(\xi_1) \cos(l_2 y) \right] \quad (20)$$

$$v_0 = \frac{1}{(3p_1 p_{2x} - p_2 p_{1x})} \{ p_{2t} p_1 - p_2 p_{1t} + p_{2xxx} p_1 - p_{1xxx} p_2 - \mathcal{X} [p_{2xx} p_{1x} - p_{1xx} p_{2x}] \} \equiv 0. \quad (21)$$

若我们选择

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_3) + a_{13} \exp(\eta_1 + \eta_3), \\ p_2 &= 1 + a_{12} \exp(\eta_1) + a_{23} \exp(\eta_3) \\ &\quad + m \exp(\eta_1 + \eta_3), q = \exp(\eta_2), \\ \eta_1 &= k_1 x - \omega_1 t, \quad \eta_2 = l_2 y - \omega_2 t, \\ \eta_3 &= k_3 x - \omega_3 t, \end{aligned} \quad (22)$$

则物理场

$$u = -\mathcal{X}(\ln f)_{xy} \quad (23)$$

是描述 NNV 方程 dromion 相互作用或 dromion 和 “Solitoff” 相互作用的解 式中

$$f = p_1 + p_2 q = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + \exp(\eta_3) + a_{12} \exp(\eta_1 + \eta_2) + a_{13} \exp(\eta_1 + \eta_3) + a_{23} \exp(\eta_2 + \eta_3) + m \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3). \quad (24)$$

3. dromion 相互作用

3.1. 相互作用的解析分析

本文主要讨论由 (24) 式所决定的物理场 u 的一些性质. 从上面的分析可看出这个描述 dromion 相互作用的解 (23) 对色散关系没有要求, 耦合系数也可以是任意的. 当假设 $k_1 > 0, k_3 > 0$ 并且 $\omega_1/k_1 > \omega_3/k_3$, 我们可以获得相互作用前后 dromion 的表达式

$$f_1 = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + a_{12} \exp(\eta_1 + \eta_2), \quad (25)$$

$$f_2 = \exp(\eta_1) \{ 1 + a_{12} \exp(\eta_2) + a_{13} \exp(\eta_3) + m \exp(\eta_2 + \eta_3) \}, \quad (26)$$

$$f_3 = \exp(\eta_3) \{ 1 + a_{13} \exp(\eta_1) + a_{23} \exp(\eta_2) + m \exp(\eta_1 + \eta_2) \}, \quad (27)$$

$$f_4 = 1 + \exp(\eta_2) + \exp(\eta_3) + a_{23} \exp(\eta_2 + \eta_3). \quad (28)$$

考虑到 f 被因子 $\exp(ax + b)$ 相乘 (a 和 b 不依赖 x) 对 u 的结果不产生影响. 因此在讨论 f 的形式时, 不需要考虑相乘的指数公因子. 从 (25)–(28) 式可看出, 若 $m = a_{12} a_{13} a_{23}$, 则相互作用前由 f_1, f_2 表征的两个 dromion 和相互作用后由 f_3, f_4 表征的两个 dromion 除存在位相漂移外, 其余完全相同. 因此这种碰撞应该是弹性碰撞. 若 $m \neq a_{12} a_{13} a_{23}$, 则碰撞前后 f 的形式是不同的, 因此 dromion 的形状也是不同的. 即相互作用是非弹性的. 若选择三个耦合系数中的某一个为 0, 如 $a_{13} = 0$, 那么由 f_1 和 f_2 形成的场 u 分别是 dromion 和 “Solitoff”. f_3 和 f_4 形成的场 u 也是 dromion 和 “Solitoff”. 即此时 u 是描述 dromion 和 “Solitoff” 相互作用的解. 从 (25)–(28) 式也可以看到该 dromion 和 “Solitoff” 之间的相互作用也是非弹性的.

3.2. 相互作用的几何分析

这节将给出 dromion 相互作用的几何分析. 图 1 是 (23) 式所确定的 NNV 方程物理场 u 的两 dromion 相互作用图. 在图 1 中, 三个耦合系数均不为 0, 且满足 $m = a_{12} a_{13} a_{23}$, 图中的三个孤子被表征为

$$\eta_1 = x - 19t, \quad \eta_2 = \frac{3}{2}y - 8t, \quad \eta_3 = \frac{1}{2}x - 3t. \quad (29)$$

图 1(a)(b)(c) 中的时间分别为 $-2.0, 0, 2.0$. 从图 1 可清楚地看到两 dromion 相互作用前后形状相同, 这与我们解析分析结论是一致的.

图 2 也是 (23) 式所表示的场 u 的两 dromion 相互作用图. 在此图中我们取 a_{12}, a_{13}, a_{23} 均不为 0, 但 $m \neq a_{12} a_{13} a_{23}$. 图中三个线孤子与 (29) 式相同 (a), (b)(c) 三图的时间分别为 $t = -2.0, t = 0, t = 2.0$. 图 2 清楚地显示了 dromion 非弹性相互作用的主要特征, 碰撞前后波形发生了改变.

图 3 是 “Solitoff” 和 dromion 相互作用图. 图中 u 也是由 (23) 式表示, 函数 f 中的一个耦合系数 a_{13} 为 0, $m \neq a_{12} a_{13} a_{23}$ 且不为 0. 图中三个线孤子与 (29) 式相同, 时间 (a) $t = -2.0$ (b) $t = 0$ (c) $t = 2.0$. 该图中所反映的 “Solitoff” 和 dromion 相互作用现象与我们解析分析情况一致, 即 “Solitoff” 和 dromion 在相互作用之后, 形状发生了改变.

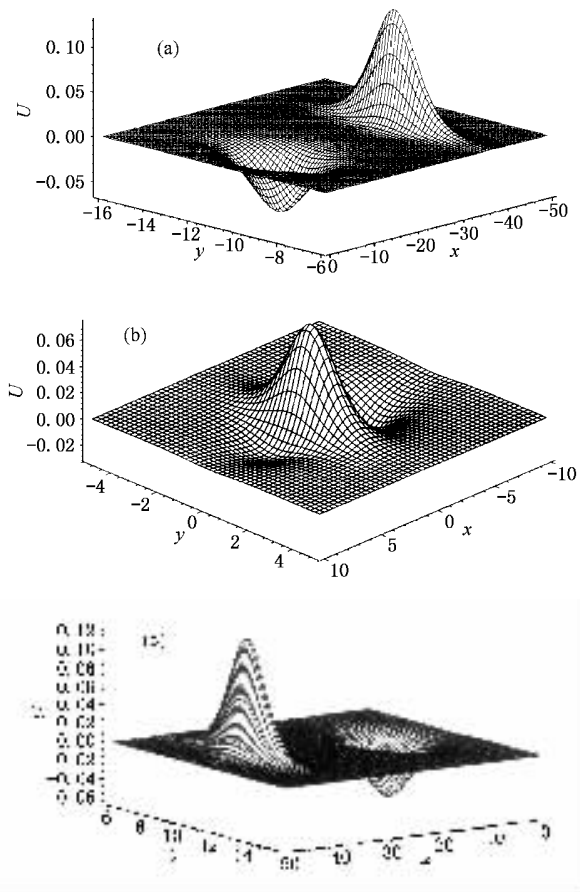


图 1 2+1 维 NNV 方程关于场量 u (由(23)式确定) 的两个 dromion 相互作用图 ($a_{12}, a_{13}, a_{23}, m$) = (1/2, 2/3, 2, 2/3); 相应的时间 (a) $t = -2.0$ (b) $t = 0$ (c) $t = 2.0$

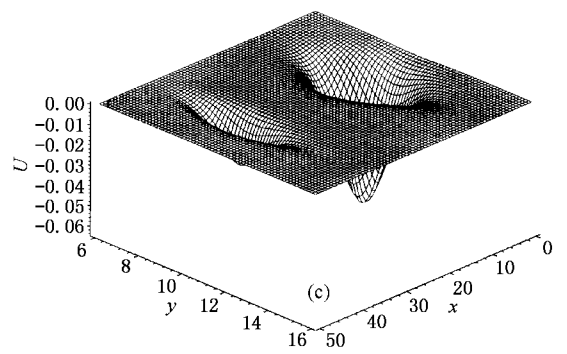
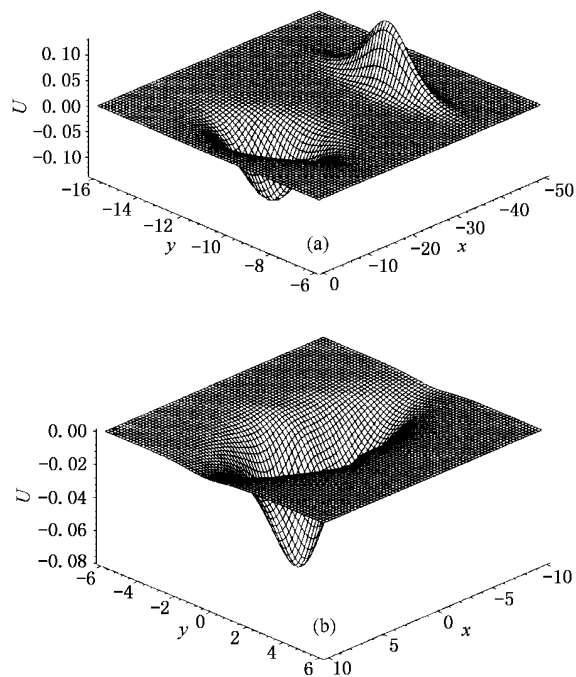


图 2 2+1 维 NNV 方程关于场量 u (由(23)式确定) 的两个 dromion 相互作用图 ($a_{12}, a_{13}, a_{23}, m$) = (1/2, 2/3, 2, 3/2); 相应的时间 (a) $t = -2.0$ (b) $t = 0$ (c) $t = 2.0$

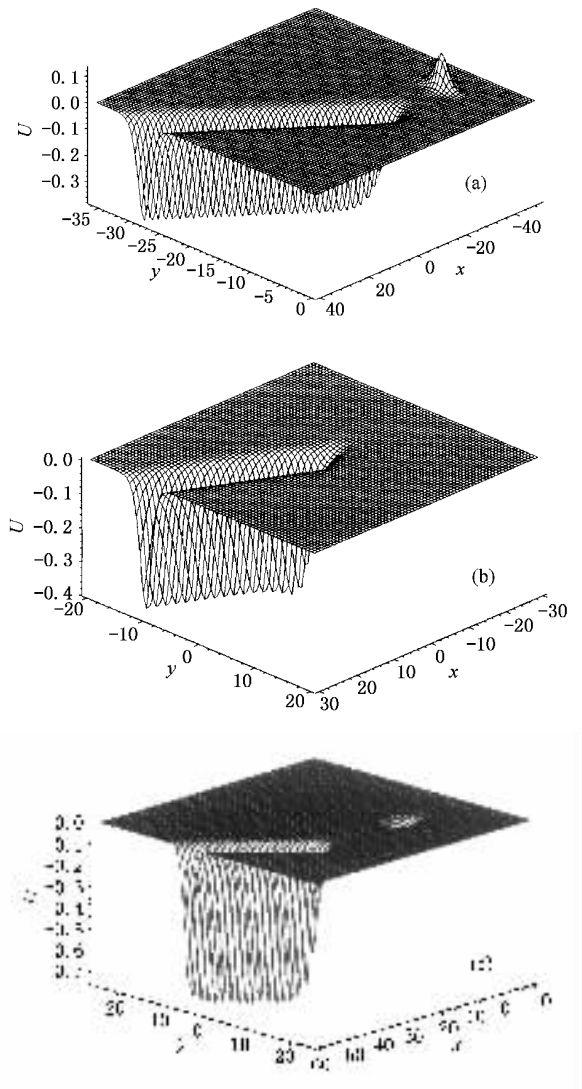


图 3 2+1 维 NNV 方程关于场量 u (由(23)式确定) 的“solitoff”和 dromion 相互作用图 ($a_{12}, a_{13}, a_{23}, m$) = (1/2, 0, 2, 3/2); 相应的时间 (a) $t = -2.0$ (b) $t = 0$ (c) $t = 2.0$

4. 结论和讨论

本文采用分离变量方法得到了 NNV 方程含有三个任意函数的解. 适当选择任意函数, 可以得到相当丰富的孤子解形式. 文中列出了关于场变量 u 的双 dromion 解, 描述“Solitoff”和 dromion 相互作用的解, 周期孤子解; 关于势函数 v 的周期孤子解和描述线孤子和 y 周期孤子相互作用的解. 对场变量 u 的双 dromion 之间; “Solitoff”和 dromion 之间的相互作用从解析和几何两个角度做了较为详细地讨论.

虽然 1 + 1 维可积模型如 KdV 方程, 孤子间的相互作用被认为是完全弹性的. 2 + 1 维可积模型孤子间的相互作用却呈现了丰富的现象. 在以往的工作中, 我们发现对于 2 + 1 维可积模型只要构成 dromion 的多孤子解形式与 Hirota N 孤子解的标准形式 (包含色散关系, 耦合系数等所有形式) 相同, dromion 之间的相互作用是弹性的, 否则是非弹性的. 由于求解手段的限制, 我们无法对该课题做更为深入的探索. 对于未能写出双线性形式的可积模型, 其孤子间相互作用的研究困难更多. 借助分离变量方法, 本文方便地得到了 NNV 方程 (注, NNV 方程不具有双线性形式) 描述双 dromion 相互作用的物理场 u 的形式, 形成 u 的函数 f 其形式与 Hirota 标准解形式相同, 但 ω 与 k 之间没有色散关系的限制, 耦合系数

也可任意选择. 通过对解的形式分析, 我们发现若 f 拥有 (24) 式的形式, 且耦合系数均不为 0, 那么当 $m = a_{12} a_{13} a_{23}$ 时, $u = -2(\ln f)_{,xy}$ 描述的孤子相互作用是弹性的, 除了位相漂移, 没有任何物理量的交换. 然而当其他条件相同, 但 $m \neq a_{12} a_{13} a_{23}$, 场变量 u 所描述的 dromion 之间的相互作用是非弹性的, 即经过相互作用 dromion 的波形发生了变化. 文中从解析和几何二方面给予了证明. 应说明一下, 以往我们所得到的关于 dromion 相互作用的某些规律与本文研究的结果是一致的. 只是以前给出的弹性相互作用的条件比较严, 本文的探究发现该条件可以比较宽松. 我们也对“Solitoff”和 dromion 之间的相互作用给予了一些讨论. 在 (24) 式中取 $a_{13} = 0$, 则 (23) 式所表示的 u 描述了“Solitoff”和 dromion 相互作用.

分离变量方法可应用于多个高维可积甚至不可积模型求解, 从不同的变量分离形式可以得到不同类型的精确解表示. 只要原方程拥有方程 (6) 形式的分量分离, 一定存在本文所列举的所有解形式. 其 dromion 之间的相互作用也一定遵循本文所得到的规律.

对于不可积模型是否可以用 (6) 式的形式进行变量分离? 是否存在着在相互作用过程中波形保持不变的孤子解? 值得进一步研究.

作者感谢楼森岳教授的帮助和讨论.

- [1] Loutsenko I and Roubtsov D 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3011
- [2] Tajiri M and Maesono H 1997 *Phys. Rev. E* **55** 3351
- [3] Das G C 1997 *Phys. Plasmas* **4** 2095
- [4] Gedalin M, Scott T C and Band Y B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 448
- [5] Lou S Y 2000 *Comm. Theor. Phys.* **33** 7
- [6] Kadomtsov B B and Petviashvili V I 1970 *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539
- [7] Davey A and Stewartson K 1974 *Proc. R. Soc. London A* **338** 17
- [8] Zhang J F, Huang W H and Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 [in Chinese] 张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
- [9] Huang W H, Zhang J F et al 2002 *Chin. Phys.* **11** 1101
- [10] Matveev V B and Salle M A 1991 *Darboux Transformations and Solitons* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg)
- [11] Kako F and Yajima N 1980 *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** 2063
- [12] Ruan H Y and Chen Y X 1999 *J. Math. Phys.* **40** 248
- [13] Ruan H Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1781 [in Chinese] 阮航宇 1999 物理学报 **48** 1781]
- [14] Ruan H Y and Chen Y X 2000 *Phys. Rev. E* **62** 5738
- [15] Ruan H Y et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 [in Chinese] 阮航宇等 2001 物理学报 **50** 586]
- [16] Lou S Y and Ruan H Y 2001 *J. Phys. A :Math. Gen.* **34** 305
- [17] Ruan H Y 2002 *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** 453
- [18] Tagami Y 1989 *Phys. Lett. A* **141** 116
- [19] Hu X B and Li Y S 1991 *J. Phys. A :Math. Gen.* **24** 1979
- [20] Boiti M, Leon J J and Pempineli F 1986 *Inv. Problems* **2** 116
- [21] Radha R and Lakshmanan M 1994 *J. Math. Phys.* **35** 4746

Study on soliton interaction in the $2 + 1$ -dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation *

Ruan Hang-Yu^{1,2)} Chen Yi-Xin²⁾

¹⁾*Institute of Modern Physics, Ningbo University, Ningbo 315211, China*

²⁾*Zhejiang Institute of Modern Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*

(Received 23 July 2002 ; revised manuscript received 28 September 2002)

Abstract

A variable separation approach is used to obtain exact solutions of the Nizhnik-Novikov-Veselov equation. One of the exact solutions of this model is analysed to study the interaction between two dromions, dromion and "soliton" both analytically and graphically. Some new interacting properties are revealed.

Keywords : interaction between dromions, NNV equation, variable separation approach

PACC : 0230, 0340

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 100033) by the State Key Laboratory of Oil/Gas Reservoir Geology and Exploitation (Grant No. PLN0104) and by the Ministry of Education of China (Grant No. C0001).