第 52 卷 第 6 期 2003 年 6 月
1000-3290/2003/52(06)/1326-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.6,June,2003

非保守力和非完整约束对 Hamilton 系统 Lie 对称性的影响*

张 毅
(苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)
(2002 年 8 月 15 日收到;2002 年 10 月 31 日收到修改稿)

研究非保守力和非完整约束对 Hamilton 系统的 Lie 对称性和守恒量的影响.分别研究了 Hamilton 系统受到非保守力和非完整约束作用时,系统的 Lie 对称性保持不变的条件,同时给出了系统的结构方程和守恒量保持不变的条件.以著名的 Emden 方程和 Appell-Hamel 模型为例进行了分析讨论.

关键词:分析力学,Hamilton 系统,非保守力,非完整约束,对称性,守恒量
PACC:0320

1. 引 言

自 1979 年 Lutzky[1] 将 Lie 对称性引入力学领域以来,Lie 对称性方法得到迅速发展并取得了一系列重要成果[2—13].赵跃宇研究了非保守力学系统的 Lie 对称性[2],梅凤翔[3—6] 全面系统地研究了各类约束力学系统的 Lie 对称性.当力学系统受到非保守力或非完整约束作用时,系统的 Lie 对称性和守恒量都会发生变化.原有的一些 Lie 对称性消失了,一些新的 Lie 对称性产生了,一些 Lie 对称性仍然保持不变.最近,张睿超、梅凤翔研究了非保守力或非完整约束对 Lagrange 系统 Lie 对称性的影响问题[11,12],研究了约束对 Birkhoff 系统 Lie 对称性的影响[13].本文进一步研究非保守力和非完整约束对 Hamilton 系统的影响,给出了 Hamilton 系统的 Lie 对称性、结构方程和守恒量在受到非保守力或非完整约束的作用后仍保持不变的条件,并以著名的 Emden 方程和 Appell-Hamel 模型为例进行了分析讨论,以说明结果的应用.

2. 非保守力对 Hamilton 系统 Lie 对称性的影响

Hamilton 系统的运动微分方程可表为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 $H = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 为 Hamilton 函数.

假设系统(1)受到非保守力 $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 的作用,则运动微分方程成为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{2}$$

引入时间,广义坐标和广义动量的无限小群变换

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s,$$
$$p_s^*(t^*) = p_s(t) + \Delta p_s \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{3}$$

其展开式为

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \\ q_s^* &= q_s + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \\ p_s^* &= p_s + \varepsilon\eta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \quad (s = 1,\cdots,n), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0, ξ_s, η_s 称为无限小变换的生成元.引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s \frac{\partial}{\partial p_s}. \tag{5}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + (\dot{\eta}_s - \dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}. \tag{6}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)及江苏省青蓝工程基金资助的课题.

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论[3]，方程(1)和(2)在无限小变换(4)下的不变性可以分别表示为以下确定方程

$$\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\dot{\xi}_0 = X^{(0)}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right),$$

$$\dot{\eta}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{\xi}_0 = -X^{(0)}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{7}$$

$$\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\dot{\xi}_0 = X^{(0)}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right),$$

$$\dot{\eta}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{\xi}_0 - Q_s\dot{\xi}_0 = -X^{(0)}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) + X^{(0)}(Q_s)$$

$$(s = 1,\cdots,n). \tag{8}$$

如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 同时满足(7)式和(8)式，则它们同时对应于系统(1)和系统(2)的 Lie 对称性，即 Hamilton 系统(1)在非保守力作用下相应的 Lie 对称性保持不变.

如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足(7)式但不满足(8)式，则它们对应于系统(1)的 Lie 对称性，而不是系统(2)的 Lie 对称性，即 Hamilton 系统(1)在非保守力作用下，相应的 Lie 对称性将会消失.

如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 不满足(7)式但满足(8)式，则它们不是系统(1)的 Lie 对称性，但对应系统(2)的 Lie 对称性，即 Hamilton 系统(1)由于非保守力的作用，产生了新的 Lie 对称性.

Hamilton 系统在非保守力作用下 Lie 对称性保持不变的条件，由下述定理 1 给出.

定理 1　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 对应于系统(1)的 Lie 对称性，且非保守力 Q_s 和无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足

$$-Q_s\dot{\xi}_0 = X^{(0)}(Q_s) \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{9}$$

则当非保守力作用于系统(1)时，其 Lie 对称性保持不变.

证明　将(7)式代入(8)式，易得(9)式.

Lie 对称性不一定导致守恒量. 下面的定理给出了守恒量的存在条件和形式.

定理 2[3]　对于满足确定方程(7)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s，如果存在规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 满足如下结构方程：

$$-H\dot{\xi}_0 + \frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s - X^{(0)}(H) + \dot{G} = 0, \tag{10}$$

则 Hamilton 系统(1)存在如下形式的守恒量：

$$I = -H\xi_0 + p_s\xi_s + G = \text{const}. \tag{11}$$

定理 3　对于满足确定方程(8)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s，如果存在规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 满足如下结构方程：

$$-H\dot{\xi}_0 + \frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s - X^{(0)}(H)$$

$$+ Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0, \tag{12}$$

则相空间中非保守系统(2)存在如下形式的守恒量：

$$I = -H\xi_0 + p_s\xi_s + G = \text{const}. \tag{13}$$

由定理 2 和定理 3，我们有

定理 4　对于满足确定方程(7)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s，如果存在规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 满足结构方程(10)，且非保守力 Q_s 和无限小生成元 ξ_0，ξ_s 满足

$$Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{14}$$

则系统(1)和系统(2)具有相同的结构方程和相同的守恒量.

以著名的 Emden 方程为例. Emden 方程为[2,3]

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0. \tag{15}$$

它可作为一个非保守力学系统[3]，其中保守部分的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2, \tag{16}$$

非保守力为

$$Q = -t^2q^5. \tag{17}$$

广义动量和 Hamilton 函数为

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = t^2\dot{q}, H = \frac{p^2}{2t^2}, \tag{18}$$

Hamilton 系统(18)的确定方程为

$$\dot{\xi} - \frac{p}{t^2}\dot{\xi}_0 = -\frac{2p}{t^3}\xi_0 + \frac{1}{t^2}\eta, \dot{\eta} = 0, \tag{19}$$

受到非保守力 $Q = -t^2q^5$ 的作用后，确定方程成为

$$\dot{\xi} - \frac{p}{t^2}\dot{\xi}_0 = -\frac{2p}{t^3}\xi_0 + \frac{1}{t^2}\eta,$$

$$\dot{\eta} + t^2q^5\dot{\xi}_0 = -2tq^5\xi_0 - 5t^2q^4\xi, \tag{20}$$

方程(9)给出

$$t^2q^5\dot{\xi}_0 = -2tq^5\xi_0 - 5t^2q^4\xi, \tag{21}$$

方程(19)有解

$$\xi_0 = 0, \xi = -\frac{1}{t}, \eta = 1. \tag{22}$$

生成元(22)对应 Hamilton 系统(18)的 Lie 对称性，但生成元(22)不满足方程(20)或(21)，因此在非保守力(17)的作用下，系统(18)相应于生成元(22)的 Lie

对称性将消失.

方程(20)有解

$$\xi_0 = -2t, \xi = q, \eta = -p. \tag{23}$$

生成元(23)对应非保守力学系统(18),(17)的 Lie 对称性.容易验证,生成元(23)不满足方程(19)和(21),即 Hamilton 系统(18)在非保守力的作用下产生了新的相应于生成元(23)的 Lie 对称性.

容易验证生成元

$$\xi_0 = 0, \xi = 0, \eta = 1. \tag{24}$$

同时满足方程(19),(20)和(21),即 Hamilton 系统(18)在非保守力(17)作用下,相应于生成元(24)的 Lie 对称性保持不变.

由定理 2,相应于无限小生成元(22),Hamilton 系统(18)存在守恒量

$$I_1 = -\frac{p}{t} - q = \text{const.} \tag{25}$$

由定理 3,相应于无限小生成元(23),非保守力学系统(18),(17)存在守恒量

$$I_2 = \frac{p^2}{t} + pq + \frac{1}{3}t^3 q^6 = \text{const.} \tag{26}$$

易知,Hamilton 系统(18)和非保守力学系统(18),(17)都不存在与无限小生成元(24)相应的守恒量.

3. 非完整约束对 Hamilton 系统 Lie 对称性的影响

假设系统(1)受到 g 个理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g). \tag{27}$$

约束(27)对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g). \tag{28}$$

系统的运动微分方程可表为正则形式[14]

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{29}$$

在运动微分方程积分以前,可由方程(27)和(29)求出约束乘子 λ_β 并表为 $t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ 的函数,于是方程(29)可表为[14]

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \Lambda_s \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{30}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \tag{31}$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论,方程(30)在无限小变换(4)下的不变性归为如下确定方程:

$$\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\dot{\xi}_0 = X^{(0)}\left(\frac{\partial H}{\partial p_s}\right), \dot{\eta}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{\xi}_0 - \Lambda_s\dot{\xi}_0 = -X^{(0)}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) + X^{(0)}(\Lambda_s) \quad (s = 1, \cdots, n). \tag{32}$$

约束方程(27)用正则变量表示,有[14]

$$\tilde{f}_\beta(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g). \tag{33}$$

约束(33)在无限小变换(4)下的不变性归为如下限制方程:

$$X^{(0)}(\tilde{f}_\beta(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g). \tag{34}$$

约束对虚位移的限制(28)归为如下附加限制方程:

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g). \tag{35}$$

如果无限小变换(4)的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足确定方程(32),则称相应的对称性为相空间中相应完整系统(30)的 Lie 对称性.进而,如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足确定方程(32)和限制方程(34),则称相应的对称性为相空间中非完整系统(27),(29)的弱 Lie 对称性.最后,如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足确定方程(32)、限制方程(34)和附加限制方程(35),则称相应的对称性为相空间中非完整系统(27),(29)的强 Lie 对称性.

Hamilton 系统(1)受到非完整约束的作用后,有些 Lie 对称性可以保持,有如下定理.

定理 5 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 和广义约束力 $\Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足条件

$$-\Lambda_s\dot{\xi}_0 = X^{(0)}(\Lambda_s), \tag{36}$$

则 Hamilton 系统(1)的 Lie 对称性也是相空间中相应完整系统(30)的 Lie 对称性.

定理 6 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 是 Hamilton 系统(1)的 Lie 对称性,而且满足(34),(36)式,则此对称性也是相空间中非完整系统(27),(29)的弱 Lie 对称性.

定理 7 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 是 Hamilton 系统(1)的 Lie 对称性,而且满足(34),(35),(36)式,则此对称性也是相空间中非完整系统(27),(29)

的强 Lie 对称性.

相空间中非完整系统的 Lie 对称性不一定有相应的守恒量. 下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件和守恒量的形式.

定理 8　对相应完整系统(30)的 Lie 对称性，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足如下结构方程：

$$-H\dot{\xi}_0 + \frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s - X^{(0)}(H) + \Lambda_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0, \tag{37}$$

则相空间中相应完整系统(30)存在如下形式的 Lie 对称性守恒量：

$$I = -H\xi_0 + p_s\xi_s + G = \text{const}. \tag{38}$$

定理 9　对非完整系统(27)，(29)的弱 Lie 对称性，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足结构方程(37)，则相空间中非完整系统(27)，(29)存在形如(38)式的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 10　对非完整系统(27)，(29)的强 Lie 对称性，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足结构方程(37)，则相空间中非完整系统(27)，(29)存在形如(38)式的强 Lie 对称性守恒量.

Hamilton 系统(1)受到非完整约束作用后，在一定条件下，系统的某些 Lie 对称性守恒量可以保持，有如下定理.

定理 11　如果 Hamilton 系统(1)受到非完整约束作用后，某些 Lie 对称性保持不变，且满足条件

$$\Lambda_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0, \tag{39}$$

则对应的 Lie 对称性守恒量也保持不变.

研究 Appell-Hamel 模型[14]. 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3. \tag{40}$$

非完整约束为

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 = 0. \tag{41}$$

引进广义动量和 Hamilton 函数

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1, p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2,$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m\dot{q}_3,$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgq_3, \tag{42}$$

约束方程(41)用正则变量表示为

$$\tilde{f} = \frac{1}{m^2}(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) = 0. \tag{43}$$

Hamilton 系统(42)的运动微分方程为

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m}, \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m}, \dot{q}_3 = \frac{P_3}{m},$$
$$\dot{p}_1 = 0, \dot{p}_2 = 0, \dot{p}_3 = -mg, \tag{44}$$

施加非完整约束(41)后，系统的运动微分方程为

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m}, \dot{q}_2 = \frac{p_2}{m}, \dot{q}_3 = \frac{p_3}{m}, \dot{p}_1 = -\frac{mgp_1}{2p_3},$$
$$\dot{p}_2 = -\frac{mgp_2}{2p_3}, \dot{p}_3 = -\frac{1}{2}mg, \tag{45}$$

广义约束反力为

$$\Lambda_1 = -\frac{mgp_1}{2p_3}, \Lambda_2 = -\frac{mgp_2}{2p_3}, \Lambda_3 = \frac{1}{2}mg. \tag{46}$$

条件(36)给出

$$\frac{mgp_1}{2p_3}\dot{\xi}_0 = -\frac{mg}{2p_3}\eta_1 + \frac{mgp_1}{2p_3^2}\eta_3,$$
$$\frac{mgp_2}{2p_3}\dot{\xi}_0 = -\frac{mg}{2p_3}\eta_2 + \frac{mgp_2}{2p_3^2}\eta_3,$$
$$-\frac{1}{2}mg\dot{\xi}_0 = 0. \tag{47}$$

方程(44)在无限小变换(4)下的不变性归为如下确定方程：

$$\dot{\xi}_1 - \frac{p_1}{m}\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_1, \dot{\xi}_2 - \frac{p_2}{m}\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_2,$$
$$\dot{\xi}_3 - \frac{p_3}{m}\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_3, \dot{\eta}_1 = 0, \dot{\eta}_2 = 0,$$
$$\dot{\eta}_3 + mg\dot{\xi}_0 = 0. \tag{48}$$

方程(45)在无限小变换(4)下的不变性归为如下确定方程：

$$\dot{\xi}_1 - \frac{p_1}{m}\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_1, \dot{\xi}_2 - \frac{p_2}{m}\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_2,$$
$$\dot{\xi}_3 - \frac{p_3}{m}\dot{\xi}_0 = \frac{1}{m}\eta_3,$$
$$\dot{\eta}_1 + \frac{mgp_1}{2p_3}\dot{\xi}_0 = -\frac{mg}{2p_3}\eta_1 + \frac{mgp_1}{2p_3^2}\eta_3,$$
$$\dot{\eta}_2 + \frac{mgp_2}{2p_3}\dot{\xi}_0 = -\frac{mg}{2p_3}\eta_2 + \frac{mgp_2}{2p_3^2}\eta_3,$$
$$\dot{\eta}_3 + \frac{1}{2}mg\dot{\xi}_0 = 0. \tag{49}$$

限制方程(34)给出

$$\eta_1 p_1 + \eta_2 p_2 - \eta_3 p_3 = 0, \tag{50}$$

附加限制方程(35)给出

$$(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0)\dot{q}_1 + (\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0)\dot{q}_2 - (\xi_3 - \dot{q}_3\xi_0)\dot{q}_3 = 0. \tag{51}$$

方程(48)有解

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0,$$
$$\eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \eta_3 = 0, \tag{52}$$
$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1,$$
$$\eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \eta_3 = 0, \tag{53}$$
$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \frac{t}{m}, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0,$$
$$\eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \eta_3 = 0. \tag{54}$$

它们都对应 Hamilton 系统(42)的 Lie 对称性.生成元(54)不满足方程(49),即它们对应的 Lie 对称性由于施加了非完整约束而消失了.生成元(52),(53)都满足方程(49)和(50),因此它们对应的 Lie 对称性既是相空间中相应完整系统的 Lie 对称性又是非完整系统(40),(41)的弱 Lie 对称性.生成元(52)还满足方程(51),因此它所对应的 Lie 对称性还是系统(40),(41)的强 Lie 对称性.

方程(49)有解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = q_3, \xi_2 = q_3, \xi_3 = 0,$$
$$\eta_1 = p_3, \eta_2 = p_3, \eta_3 = 0, \tag{55}$$

显然生成元(55)不满足方程(48),因此它所对应的 Lie 对称性是由于施加了非完整约束而新产生的.

条件(39)给出

$$-\frac{mgp_1}{2p_3}(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) - \frac{mgp_2}{2p_3}(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) + \frac{1}{2}mg(\xi_3 - \dot{q}_3\xi_0) = 0, \tag{56}$$

生成元(52)满足条件(56),因此对应于生成元(52),Hamilton 系统(42)和非完整约束系统(40),(41)具有相同的守恒量

$$I_1 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgq_3 = \text{const}. \tag{57}$$

生成元(53)不满足方程(56),Hamilton 系统(42)对应生成元(53)的守恒量为

$$I_2 = p_3 + mgt = \text{const}. \tag{58}$$

施加非完整约束后,非完整系统(40),(41)对应生成元(53)的守恒量为

$$I'_2 = p_3 + \frac{1}{2}mgt = \text{const}. \tag{59}$$

显然,守恒量(58)和守恒量(59)不相同.

衷心感谢导师梅凤翔教授的悉心指导.

[1] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[2] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380(in Chinese)[赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)第 1 页]

[4] Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **32** 466(in Chinese)[梅凤翔 2000 力学学报 **32** 466]

[5] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207(in Chinese)[梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[6] Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901(in Chinese) [梅凤翔、尚玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[7] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023(in Chinese) [傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]

[8] Zhang Y and Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354

[9] Zhang Y and Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816(in Chinese)[张毅、薛 纭 2001 物理学报 **50** 816]

[10] Zhang Y, Shang M and Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401

[11] Zhang R C, Chen X W and Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 561

[12] Zhang R C, Chen X W and Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 801

[13] Zhang R C, Chen X W and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 12

[14] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p333 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础(北京:北京工业学院出版社)第 333 页]

Effects of non-conservative forces and nonholonomic constraints on Lie symmetries of a Hamiltonian system*

Zhang Yi

(*Department of Civil Engineering, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou 215011, China*)

(Received 15 August 2002; revised manuscript received 31 October 2002)

Abstract

The effects of non-conservative forces and nonholonomic constraints on Lie symmetries and conserved quantities of a Hamiltonian system are studied. When non-conservative forces or nonholonomic constraints are inserted in the Hamiltonian system, we obtain the conditions under which Lie symmetries, structure equation and conserved quantities of the system will remain present. The famous Emden equation and Appell-Hamel model are taken as examples to illustrate the application of the results.

Keywords: analytical mechanics, Hamiltonian system, non-conservative force, nonholonomic constraint, symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010) and the 'Qing Lan' Project Foundation of Jiangsu Province of China.