第 52 卷 第 6 期 2003 年 6 月
1000-3290/2003/52(06)/1337-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52,No.6,June,2003

弱相对论等离子体横向扰动下的离子声孤波*

段文山† 洪学仁

(西北师范大学物理与电子工程学院,兰州 730070)

(2002 年 6 月 1 日收到)

在低阶近似下,得到了描述无磁场相对论热离子等离子体的 KP(Kadomtsev-Petviashvilli)方程.研究表明,相对论热离子等离子中的非线性离子声孤波在高阶横向扰动下是稳定的,且在相对论热离子等离子体中仅存在压缩型孤波.

关键词:离子等离子体,孤波,声波,约化摄动法

PACC:0340K,5235S,4735

1. 引 言

近年来非线性波,特别是孤波的研究引起了人们极大的兴趣[1—9],其中等离子体中的非线性波研究[10,11]和流体力学中的非线性波研究[12,13]更为引人注目.目前,理论和实验表明,在长波近似下,无碰撞等离子体中的离子声孤波行为可由 Korteweg de Vries(KdV)方程来描述.如果等离子中粒子的速度远远小于光速,则离子声孤波表现出非相对论行为,但如果粒子速度接近光速,则相对论效应将成为主导.物理系统中相对论非线性波的研究引起了很大的兴趣,如激光等离子体相互作用[14,15]及天体物理领域[16]等.但对于无碰撞等离子体中离子声波的弱相对论效应几乎没有相关解释.最近,有些作者研究了分别由冷离子和热离子组成的等离子体中离子声波沿一维传播时的弱相对论效应[17].Washimi 和 Taniuni 理论上研究了一维 KdV 型孤子,Kadomtsev 和 Petviashvili 理论上研究了二维离子声孤波[18].Nejoh 研究了由冷离子组成的等离子体中二维离子声孤波的相对论效应[19],但没有考虑热离子情形.本文通过考虑热离子情形,研究了由热离子组成的无碰撞等离子体中二维离子声孤波传播的相对论效应,得到了二维 KdV 方程,即 KP 方程.

2. 弱相对论离子声波的控制方程

对于由等温电子和热离子组成的无磁场无碰撞等离子体,考虑有限小振幅波沿(x,y)平面的传播情况.假设沿 y 方向的扰动与 x 方向相比是一高阶无穷小.此等离子体系统的动力学行为可由连续性方程、动量方程和 Possion 方程来描述.因此,其无量纲化二维形式的基本方程组为

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(nu)+\frac{\partial}{\partial y}(nv)=0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)(\beta u)+\frac{\sigma}{n}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v+\frac{\sigma}{n}\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial \phi}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)p+p\gamma\left(\frac{\partial(u\beta)}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}=n_e-n, \tag{5}$$

其中 $n_e=e^{\phi}$,$\beta=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\approx 1-\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$.

考虑弱相对论效应,因此将 β 展开到二阶,n,u,v,ϕ,n_e,c,p 分别为离子数密度、离子流沿 x 和 y 方向的运动速度、静电势、电子数密度、光速及离子的压力.无量纲化过程为 $n=n'/n_0$,$n_e=n'_e/n_0$,u

* 国家自然科学基金(批准号:10247008)、甘肃省中青年自然科学基金(批准号:YS021-A22-018)、国家人事部回国留学人员择优项目、国家教育部回国留学人员科研启动基金和西北师范大学科技创新工程(批准号:NWNU-KJCXGC-215)资助的课题.

† 通讯联系人:duanws@nwnu.edu.cn

$= u'/(kT_e/M)^{1/2}$，$v = v'/(kT_e/M)^{1/2}$，$c = c'/(kT_e/M)^{1/2}$，$\phi = \phi'/(kT_e/e)$，$t = t'/\omega_{pi}^{-1}$，$x = x'/k_D^{-1}$，$y = y'/k_D^{-1}$，$p = p'/p_0$. 其中 n'，n'_e，u'，v'，t'，x'，y'，ϕ'，p'分别为相应具有量纲的物理量. n_0 为未受扰动的背景电子数密度，T_e 为电子温度，k 为 Boltzmann 常数，$(kT_e/M)^{1/2}$为声速，其中 M 为离子质量，$\omega_{pi}^{-1} = (\epsilon_0 M/n_0 e^2)^{1/2}$为离子等离子体频率的倒数，$k_D^{-1} = (\epsilon_0 kT_e/n_0 e^2)^{1/2}$为德拜长度，$p_0 = n_0 T_e$ 为平衡时的压力. 在弱非线性分析中，对弱非线性介质中一维小振幅长波传播的非线性行为可由 KdV 方程来描述[20]. 对于多维问题，可以将 KdV 方程进行各种推广[21,22].

这里，考虑弱依赖于横向(y)的沿平面传播的波. 因此，沿 y 方向的运动速度以及其他物理量与 x 方向相比均为高阶扰动. 运用约化摄动法，对各物理量作如下展开：

$$n = 1 + \epsilon n_1 + \epsilon^2 n_2 + \cdots, \tag{6}$$

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \cdots, \tag{7}$$

$$v = \epsilon^{3/2} v_1 + \epsilon^{5/2} v_2 + \cdots, \tag{8}$$

$$\phi = \epsilon\phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \cdots, \tag{9}$$

$$p = 1 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \cdots, \tag{10}$$

$$\beta u = u_0 - \frac{u_0^3}{2c^2} + \epsilon\beta_1 u_1 + \epsilon^2 [\beta_1 u_2 + \beta_2 u_1^2] + \cdots,$$

其中

$$\beta_1 = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{u_0}{c}\right)^2,$$

$$\beta_2 = -\frac{3u_0}{2c^2}.$$

对坐标作如下展开：

$$\xi = \epsilon^{1/2}(x - \lambda t),$$

$$\eta = \epsilon y,$$

$$\tau = \epsilon^{3/2} t,$$

其中 ϵ 为一小量，λ 为相速度.

将方程(6)—(10)代入方程(1)—(5)，假设所有物理量当 $\xi \to \infty$ 时都趋于零. 由方程(1)，(2)，(4)的 $\epsilon^{3/2}$和方程(5)的 ϵ 可得

$$p_1 = \gamma\beta_1\phi_1, \tag{11}$$

$$u_1 = (\lambda - u_0)\phi_1, \tag{12}$$

$$n_1 = \phi_1, \tag{13}$$

$$(\lambda - u_0)^2 \beta_1 = \beta_1 \gamma\sigma + 1. \tag{14}$$

由方程(3)的 ϵ^2 可得

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} = \beta_1 (\lambda - u_0) \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta}. \tag{15}$$

由方程(1)，(2)，(4)的 ϵ^5 和方程(5)的 ϵ^2 最后可得到 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + a\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + b\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3}\right) + d\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} = 0, \tag{16}$$

其中

$$a = [(1 + \gamma^2\beta_1^2\sigma)(\lambda - u_0) + (\lambda - u_0)^3\beta_1 - 2\beta_2(\lambda - u_0)^4 + 2(\lambda - u_0)^2\sigma\gamma\beta_2][2(1 + \gamma\beta_1\sigma)]^{-1},$$

$$b = \frac{\lambda - u_0}{2(1 + \gamma\beta_1\sigma)},$$

$$d = \frac{(1 + \gamma\sigma)\beta_1(\lambda - u_0)}{2(1 + \gamma\beta_1\sigma)}.$$

3. 讨 论

KP 方程(16)存在稳定孤波解

$$\phi_1 = \phi_m \mathrm{sech}^2 \frac{\xi - c_0\tau}{w},$$

其中 $\phi_m = 3c_0/a$ 和 $w = 2\sqrt{b/c_0}$ 分别为孤立波的振幅和宽度. 如果 $\lambda > u_0$，a，b 和 d 都为正数，则存在压缩型孤子. 如果 $\lambda = u_0$，则此展开方法不再适用，须使用其他展开方法. 对于 $\lambda < u_0$，但 $u_0/c \ll 1$，a，b，d 均为负数的情形，可以通过变换 $\tau' = -\tau$，得到与方程(16)完全相同的方程，因此，此情形下也存在压缩型孤子.

引入变换 $\xi = b^{1/3}\xi'$，$\eta = \sqrt{2db^{1/3}}\,Z$，$\phi_1 = 3\frac{b^{1/3}}{a}\phi_1$，方程(16)可化为

$$\frac{\partial}{\partial \xi'}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + 3\phi\frac{\partial \phi}{\partial \xi'} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi'^3}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} = 0, \tag{17}$$

然后用 ξ 代替 ξ'，η 代替 Z.

孤波的一维稳定性已经进行了研究. 如果

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v'} > 0, \tag{18}$$

则平面孤波是一维稳定的. 其中

$$P(v') = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_s^2(\xi - v't : v')\mathrm{d}\xi \tag{19}$$

为孤波的动量. 此处孤波写成 $\phi = \phi_s(\xi - v't : v')$的形式，其中 v'为孤波波速.

假设 KdV 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + 3\phi\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0,$$

有一沿 x 方向传播且一维稳定的孤波解 $\phi = \phi_s(\xi - v'_0\tau : v'_0)$，其中 v'_0 为恒定波速. 则此孤波在横向 y

的长波扰动下将随时间慢变. 由文献[23],当广义 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)-\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0 \quad (20)$$

具有正色散($\sigma=1$)时,其孤波在横向扰动下是不稳定的,而当广义 KP 方程(20)具有负色散($\sigma=-1$)时,其孤波稳定性依赖于函数 $f(u)$. 如果 $f(u)=(p+2)u^{p+1}$,其中 p 为正实数,当 $2<p\leqslant 4$ 时,孤波在横向长波扰动下是不稳定的. 对于本文情形,$p=1$,因此其孤波在横向长波扰动下是稳定的.

[1] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 889
[2] Fan N G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
[3] Xia T C, Zhang H Q and Yan Z Y 2001 *Chinese Physics* **10** 694
[4] Lü K P and Duan W S 2000 *Chinese Physics* **9** 81
[5] Lou S Y and Xu J J 1999 *Chinese Physics* **8** 280
[6] Chen L L and Lou S Y 1999 *Chinese Physics* **8** 285
[7] Lou S Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1657 (in Chinese) [楼森岳 2000 物理学报 **49** 1657]
[8] Li Z B and Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese) [李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]
[9] Lin J and Wang K L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 13 (in Chinese) [林机、汪克林 2001 物理学报 **50** 13]
[10] Duan W S, Lü K P and Zhao J B 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1088
[11] Duan W S and Lü K P 1998 *Phys. Plasmas* **5** 4160
[12] Duan W S, Zhao C Y, Wang B R and Wei R J 1998 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **7** 721
[13] Duan W S, Wang B R, Wei R J 1997 *Physics Letters* A **224** 154
[14] Arons J 1979 *Space Sci. Rev.* **24** 417
[15] Chian A C L and Clemmow P C 1975 *J. Plasma. Phys.* **14** 505
[16] Das G C and Paul S N 1985 *Phys. Fluid* **28** 823
[17] Kezi H, Taylor R J and Barker D R 1970 *Phys. Rev. Lett.* **25** 11
[18] Kadomtsev B B and Petviashvili V I 1970 *Soviet Phys. Dok* **15** 539
[19] Nejoh Y 1987 *J. Plasma. Phys.* **38** 439
[20] Infeld E and Rowlands G 1990 *Nonlinear Waves, Soliton and Chaos* (Cambridge University Press)
[21] Chen X N 1989 *Phys. Fluid* A **1** 2058
[22] Chen X N and Sharma S D 1997 *J. Fluid Mech.* **291** 263
[23] Kataota T, Tsutahara and Negoro Y 2000 *Phys. Rev. Lett.* **3** 3065

Ion acoustic solitary waves in a weakly relativistic plasma under transverse perturbations*

Duan Wen-Shan† Hong Xue-Ren
(*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

(Received 1 June 2002)

Abstract

Kadomtsev-Petviashvili (KP) equation is derived for unmagnetized, relativistic and hot ion plasmas. The result suggests that the nonlinear ion acoustic solitary waves in a relativistic hot ion plasma are stable even when there are some higher-order transverse perturbations. There are only compressive solitary waves in the relativistic hot ion plasmas, this has been vertified analytically in this paper.

Keywords: ion plasmas, solitary wave, acoustic wave, reductive perturbatin technique
PACC: 0340K, 5235S, 4735

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10247008) the Natural Science Foundation of Gansu Province (Grant No. YS021-A22-018), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, State Education Ministry (SEM), and the Natural Science Foundation of Northwest Normal University (Grant No. NWNU-KJCXGC-215).

† email: duanws@nwnu.edu.cn