第 52 卷 第 6 期 2003 年 6 月
1000-3290/2003/52(06)/1346-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.6,June,2003

自旋场对 Barriola-vilenkin 黑洞熵的量子修正

李固强

(湛江师范学院信息科技学院,湛江 524048)

(2002 年 7 月 19 日收到;2002 年 10 月 31 日收到修改稿)

用砖墙模型的方法,讨论了无源引力场对 Barriola-Vilenkin 黑洞熵的量子修正.计算表明,量子修正应该包含两部分:其中一部分与视界面积成正比,在视界附近与紫外截断因子 ϵ 是平方反比发散的;另一部分是两个对数发散项,这部分除了与黑洞的本身特征性质(M,η)有关以外,还与自旋场的自旋有关.结果与标量场引起的量子修正具有完全不同的形式.

关键词:砖墙模型,量子修正,黑洞熵

PACC:0420,9760L

1.引 言

1985 年,'t Hooft[1] 首次引进砖墙模型的方法研究了标量场对 Schwarzschild 黑洞熵的量子修正;1995 年,Solodukhin[2] 通过路径积分的方法也讨论了标量场对 Schwarzschild 黑洞熵的量子修正,并指出了它包含一个对数项 $S_{\ln}=\left(\frac{1}{45}\right)\ln(\Lambda/\epsilon)$,$\Lambda$,$\epsilon$ 分别为红外截断因子和紫外截断因子.此后,两种方法都被用来计算各种黑洞背景下各种自旋场对黑洞熵的量子修正,并且得到了许多有趣又重要的结果[3—6].最近,运用砖墙模型的方法,文献[7,8]讨论了自旋场对 Barriola-Vilenkin 黑洞熵的量子修正,所得结果除了系数不同以外它们的形式与标量场是一样的.本文在讨论了 Barriola-Vilenkin 黑洞背景下无源引力场($s=2$)场方程的基础上,运用砖墙模型方法,计算了引力场引起的 Barriola-Vilenkin 黑洞熵的量子修正,发现它不再与标量场成比例.

2.Barriola-Vilenkin 时空

在自然单位制中,Barriola-Vilenkin 黑洞外部时空度规为[7]

$$\mathrm{d}s^2=\Big(\frac{(1-8\pi\eta^2)(r-r_H)}{r}\mathrm{d}t^2-\frac{r}{(1-8\pi\eta^2)(r-r_H)}\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\Big),\tag{1}$$

其中 $r_H=2M/(1-8\pi\eta^2)$是事件视界,η 是对称性破缺的能量尺度.选择如下零标架:

$$\begin{aligned}l^\mu&=\frac{r}{(1-8\pi\eta^2)(r-r_H)}\delta_0^\mu+\delta_1^\mu,\\ n^\mu&=\frac{1}{2}\delta_0^\mu-\frac{(1-8\pi\eta^2)(r-r_H)}{2r}\delta_1^\mu,\\ m^\mu&=\frac{1}{\sqrt{2}r}\delta_2^\mu+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}r\sin\theta}\delta_3^\mu.\end{aligned}\tag{2}$$

它们满足正交关系

$$\begin{aligned}&l^\mu l_\mu=n^\mu n_\mu=m^\mu m_\mu=\bar{m}^\mu\bar{m}_\mu=0,\\ &l^\mu m_\mu=l^\mu\bar{m}_\mu=n^\mu m_\mu=n^\mu\bar{m}_\mu=0,\\ &l^\mu n_\mu=-m^\mu\bar{m}_\mu=1,\end{aligned}\tag{3}$$

而 12 个旋系数和 5 个 Weyl 张量的独立分量定义为[9]

$$\begin{aligned}&\kappa=l_{\mu;\nu}m^\mu l^\nu,\pi=-n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu l^\nu,\\ &\rho=l_{\mu;\nu}m^\mu\bar{m}^\nu,\lambda=-n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu\bar{m}^\nu,\\ &\sigma=l_{\mu;\nu}m^\mu m^\nu,\mu=-n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu m^\nu,\\ &\tau=l_{\mu;\nu}m^\mu n^\nu,\nu=-n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu,\\ &\varepsilon=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu l^\nu-m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu l^\nu),\\ &\alpha=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu\bar{m}^\nu-m^{\mu;\nu}\bar{m}^\mu\bar{m}^\nu),\\ &\beta=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu m^\nu-m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu m^\nu),\\ &\gamma=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu-m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu)\end{aligned}\tag{4}$$

和

$$\Psi_0 = -C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu m^\nu l^\rho m^\sigma,$$
$$\Psi_1 = -C_{\mu\nu\rho\sigma} l^\mu n^\nu l^\rho m^\sigma,$$
$$\Psi_2 = -\frac{1}{2} C_{\mu\nu\rho\sigma}(l^\mu n^\nu l^\rho n^\sigma - l^\mu n^\nu m^\rho \bar{m}^\sigma), \tag{5}$$
$$\Psi_3 = -C_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{m}^\mu n^\nu l^\rho n^\sigma,$$
$$\Psi_4 = -C_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{m}^\mu n^\nu \bar{m}^\rho n^\sigma,$$

其中 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ 是共形张量，它满足

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) - \frac{1}{6}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})R. \tag{6}$$

利用(1)，(2)和(6)式便得到 Barriola-Vilenkin 黑洞外部时空度规的全部旋系数

$$\kappa = \pi = \varepsilon = \lambda = \sigma = \nu = \tau = 0,$$
$$\alpha = -\beta = -\frac{\mathrm{ctg}\theta}{2\sqrt{2}r}, \rho = -\frac{1}{r}, \tag{7}$$
$$\mu = -\frac{(1-8\pi\eta^2)(r-r_H)}{2r^2}, \gamma = \frac{M}{2r^2}$$

和 Weyl 张量的全部独立分量

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \Psi_2 = -\frac{M}{r^3} - \frac{4\pi\eta^2}{3r^2}. \tag{8}$$

由此可见 Barriola-Vilenkin 黑洞外部时空度规(1)是 Petrov D 类的[7,10]．

3．自旋场

在 Barriola-Vilenkin 黑洞外部时空中，无源引力场场方程可用微扰方法经退耦[11]，并利用(7)式简化得

$$\begin{aligned}&[(\mathrm{D}-5\rho)(\Delta-2\gamma+\mu)-(\delta+2\alpha)\\&\times(\bar{\delta}-4\alpha)-3\Psi_2]\Psi_0^B=0,\\&[(\Delta+2\gamma+5\mu)(\mathrm{D}-\rho)-(\bar{\delta}+2\alpha)\\&\times(\delta-4\alpha)-3\Psi_2]\Psi_4^B=0.\end{aligned} \tag{9}$$

前后两方程分别对应自旋态 $p=s$ 和 $p=-s$；其中 D,Δ,δ 为普通微分算符，它们分别为

$$\mathrm{D} = l^\mu\partial_\mu = \frac{r}{(1-8\pi\eta^2)(r-r_H)}\partial_t + \partial_r,$$
$$\Delta = n^\mu\partial_\mu = \frac{1}{2}\partial_t - \frac{(1-8\pi\eta^2)(R-R_H)}{2r}\partial_r, \tag{10}$$
$$\delta = m^\mu\partial_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}\partial_\theta + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}r\sin\theta}\partial_\varphi.$$

(9)式可分离变量，设[3]

$$\{\Psi_0^B;\Psi_4^B\} = \{R_{lE}(r)\,{}_pY_{lm}(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et};\ r^{2p}\,{}_pR_{lE}(r)\,{}_pY_{lm}(\theta,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\}, \tag{11}$$

结合(7)和(8)式能得到

$$\Big[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{2\mathrm{i}p\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - p^2\mathrm{ctg}^2\theta + p + (l-p)(l+p+1)\Big]\,{}_pY_{lm}(\theta,\varphi) = 0, \tag{12}$$

$$\Big[\Xi^{-p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(\Xi^{p+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big) + \frac{r^4E^2 + 2\mathrm{i}pEr(\Xi - Mr)}{\Xi} - (l-p)(l+p+1) - \lambda(p)\Big]\,{}_pR_{lE}(r) = 0, \tag{13}$$

其中 ${}_pY_{lm}(\theta,\varphi)$ 为自旋权重球谐函数；l,m 为整数，它们满足 $l \geqslant s, -l \leqslant m \leqslant l$；$\sqrt{(1-p)(l+p+1)}$ 为分离变量常数；$\Xi = (1-8\pi\eta^2)r(r-r_H)$ 和

$$\lambda(p) = 2\pi\eta^2 p(3p+4). \tag{14}$$

应注意的是，方程(12)和(13)也能描述 Barriola-Vilenkin 黑洞外部时空中无源标量场($p=s=0$)的行为．

4．熵的计算

运用 WKB 近似方法，记 ${}_pR_{lE}(r) \sim \exp[\mathrm{i}S(r,p,l,E,)]$．由方程(13)决定了径向波数 $k(r,p,l,E) \equiv \partial_r S(r,p,l,E)$，

$$k = \Xi^{-\frac{1}{2}}\Big[\frac{r^4E^2}{\Xi} - (l-p)(l+p+1) - \lambda(p)\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

根据 Hooft 砖墙模型的方法，设在 $r = r_H + \varepsilon$ 和 $r \geqslant L$ 区域 ${}_pR_{lE}(r) = 0$，其中 $0 < \varepsilon \ll r_H$；$L \gg r_H$．按照半经典量子化规则，径向波数应满足关系式

$$\int_{r_H+\varepsilon}^{L} k(r,p,l,E)\,\mathrm{d}r = n\pi, \tag{16}$$

而能量值不超过 E 的本征态数目为

$$\begin{aligned}g(E) &= \sum_p\sum_l(2l+1)n = \sum_p\int_{|p|}^{l_{\max}}(2l+1)\mathrm{d}l \cdot \frac{1}{\pi}\int_{r_H+\varepsilon}^{L}k(r,p,l,E)\,\mathrm{d}r\\&= \frac{1}{\pi}\sum_p\int_{r_H+\varepsilon}^{L}\mathrm{d}r\int_{|p|}^{l_{\max}}\Xi^{-\frac{1}{2}}\Big[\frac{r^4E^2}{\Xi} - (l-p)(l+p+1) - \lambda(p)\Big]^{\frac{1}{2}}(2l+1)\mathrm{d}l\\&\approx \frac{2E^3L^3\omega}{9\pi(1-8\pi\eta^2)^2} + \frac{2E^3r_H^4\omega}{3\pi\varepsilon(1-8\pi\eta^2)^2}\end{aligned}$$

$$
+ \frac{8E^3 r_H^3 \omega}{3\pi(1-8\pi\eta^2)^2} \ln \frac{L}{\varepsilon}
$$

$$
+ \frac{E r_H \sum_p [p - |p| - \lambda(p)]}{\pi(1-8\pi\eta^2)} \ln \frac{L}{\varepsilon}, \qquad (17)
$$

其中 $l_{\max}$ 由(15)式确定；$\omega = \sum_p 1$. 对于引力场，$\omega = 2$；对于标量场，$\omega = 1$[3].

温度为 T 时，系统自由能由下式给出：

$$
-\beta F = \pm \sum_\alpha \ln(1 \pm e^{-\beta E_\alpha}), \qquad (18)
$$

其中 $\beta = \frac{1}{K_B T}$ 加号对应于费米系统，减号对应于玻色系统；而态密度由(17)式决定. 对于引力场，就有

$$
F = + \frac{1}{\beta}\int_0^\infty \mathrm{d}E \frac{\mathrm{d}g(E)}{\mathrm{d}E} \ln(1 - e^{-\beta E})
$$

$$
= -\int_0^\infty \frac{e^{-\beta E}}{1 - e^{-\beta E}} g(E)\mathrm{d}E \approx - \frac{2\pi^3 L^3 \omega}{135\beta^4(1-8\pi\eta^2)^2}
$$

$$
- \frac{2\pi^3 r_H^4 \omega}{45\beta^4 \varepsilon (1-8\pi\eta^2)^2} - \frac{8\pi^3 r_H^3 \omega}{45\beta^4(1-8\pi\eta^2)^2}
$$

$$
\times \ln \frac{L}{\varepsilon} + \frac{s^2 r_H \pi [1 + 12\pi\eta^2]}{6\beta^2(1-8\pi\eta^2)} \ln \frac{L}{\varepsilon}. \qquad (19)
$$

相应的自旋场的熵 $S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta}$，只考虑由自旋场引起的熵的量子修正

$$
S^q = \frac{8\pi^3 r_H^4 \omega}{45\beta^3 \varepsilon (1-8\pi\eta^2)^2} + \frac{32\pi^3 r_H^3 \omega}{45\beta^3(1-8\pi\eta^2)^2} \ln \frac{L}{\varepsilon}
$$

$$
- \frac{s^2 r_H \pi [1 + 12\pi\eta^2]}{3\beta(1-8\pi\eta^2)} \ln \frac{L}{\varepsilon}. \qquad (20)
$$

引入从视界 r_H 到 $r_H + \varepsilon$ 的固有距离

$$
l_p = \int_{r_H}^{r_H+\varepsilon} \sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{8M\varepsilon}}{1-8\pi\eta^2} \qquad (21)
$$

以及紫外截断因子 ϵ 和红外截断因子 Λ，并令

$$
l_p^2 = \frac{2}{15}\epsilon^2, \quad \Lambda^2 = \frac{L\epsilon^2}{\varepsilon}. \qquad (22)
$$

又 β 由下式决定[7]：

$$
\beta = \lim_{r \to r_H} 4\pi \sqrt{-g_{tt} g_{rr}} \left(\frac{\mathrm{d}g_{tt}}{\mathrm{d}r}\right)^{-1} = \frac{4 r_H \pi}{1-8\pi\eta^2}. \qquad (23)
$$

这样方程(20)可改写为

$$
S^q = \frac{A\omega}{48\pi\epsilon^2} + \frac{(1-8\pi\eta^2)\omega}{45} \ln \frac{\Lambda}{\epsilon}
$$

$$
- \frac{s^2[1 + 12\pi\eta^2]}{6} \ln \frac{\Lambda}{\epsilon}, \qquad (24)
$$

其中 $A = 4\pi r_H^2$ 为视界的表面积.

5. 结 论

方程(24)表明引力场对熵的量子修正包含两个部分：第一部分即第一项与视界面积成正比，且在 $\varepsilon \to 0$ 时与紫外截断因子 ϵ 是平方反比发散的，它描述的是几何特征；第二部分为后面的两个与视界面积无关的对数发散项，它们不但与黑洞的性质(M，η)有关，而且与自旋场的自旋有关，显然不能把其中任何一项当作附加的常数而被忽略. 在计算中，我们还发现第三项是 $p = s$ 和 $p = -s$ 两种自旋态的共同贡献；当且仅当 $\eta = 0$ 时，它仅是 $p = -s$ 单个自旋态的贡献[3].

应注意的是，当 $\omega = 1$，$s = 0$ 和 $\eta = 0$ 时，我们的结果与文献[2]中 Soloduklin 的结果一致；当 $\eta = 0$ 时，我们的结果与文献[3]的结果是相容的. 我们看到，(24)式中第三项的出现已使得无源引力场对 Barriola-Vilenkin 黑洞熵的量子修正不再与标量场的成比例.

[1] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[2] Solodukhin S.N 1995 *Phys. Rev.* D **51** 609

[3] Li Z H 1999 *Phys. Rev.* D **62** 024001

[4] Jing J L and Yan M L 2001 *Phys. Rev.* D **63** 084028

[5] Jing J L and Yan M L 2000 *Chin. Phys.* **9** 389

[6] Zhao R and Zhang L C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 593 [赵 仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 593]

[7] Li Z H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 396

[8] Lu M W and Jing J L 2000 *International Journal of Theoretical Physics* **39** 1331

[9] Newman E and Penrose R 1962 *J. Math. Phys.* **3** 566

[10] Li Z H, Mi L Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 575 [黎忠恒、米丽琴 1999 物理学报 **48** 575]

[11] Li Z H 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 553

Quantum corrections to the entropy of the Barriola-Vilenkin black hole due to spin fields

Li Gu-Qiang

(*Information Technology and Science School*, *Zhanjiang Normal College*, *Zhanjiang* 524048, *China*)

(Received 19 July 2002; revised manuscript received 31 October 2002)

Abstract

The quantum corrections to the entropy of the Barriola-Vilenkin black hole due to the massless gravitational field are calculated by using the brick-wall model. It is shown that the quantum corrections consist of two parts: One is a quadratic divergent term at the event horizon and is proportional to the surface area of the event horizon. The other is two logarithmically divergent terms which not only depend on the characteristics of the black hole but also on the spin of the field. The whole expression does not take the form of the scalar field.

Keywords: brick-wall model, quantum corrections, black hole entropy

PACC: 0420, 9760L