

相对论力学系统的形式不变性与 Noether 对称性

方建会 闫向宏 陈培胜

(石油大学应用物理系, 东营 257061)

(2002 年 7 月 17 日收到 2002 年 8 月 6 日收到修改稿)

研究相对论力学系统的形式不变性与 Noether 对称性, 给出相对论力学系统的 Noether 定理, 以及形式不变性的定义、判据和守恒量, 得到形式不变性和 Noether 对称性的关系, 并举例说明结果的应用.

关键词: 相对论, 力学系统, 形式不变性, Noether 对称性

PACC: 0330, 0320

1. 引言

关于力学系统对称性与守恒量理论的研究一直是数学、力学、物理学等领域的重要课题. 寻求力学系统守恒量的近代方法, 主要是研究作用量在无限小变换下不变性的 Noether 方法^[1]和研究运动微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 方法^[2]. 近 10 多年来, Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论的研究取得了一系列重要成果^[3-13]. 形式不变性是不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性, 它是指运动方程中出现的动力学函数在经无限小变换后仍满足原来的方程. 关于经典力学系统形式不变性的研究已取得了一些结果^[14-18]. 本文研究相对论力学系统的形式不变性与 Noether 对称性, 给出相对论力学系统的 Noether 定理, 以及形式不变性的定义、判据和守恒量, 得到形式不变性与 Noether 对称性的关系, 并举例说明结果的应用.

2. 相对论力学系统的 Noether 对称性

设力学系统由 N 个质点组成, 系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s (s = 1, 2, \dots, n)$ 确定, 则系统的相对论性 D'Alembert 原理为^[19]

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T^*}{\partial q_s} - Q_s \right) \delta q_s = 0, \quad (1)$$

其中

$$T^* = \sum_{i=1}^N m_{oi} c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}_i^2 / c^2} \right) \quad (2)$$

为系统的相对论性广义动能. 将广义力 Q_s 分为有势的 Q'_s 和非有势的 Q''_s , 有

$$Q'_s = - \frac{\partial V}{\partial q_s}, \quad Q_s = Q'_s + Q''_s = - \frac{\partial V}{\partial q_s} + Q''_s, \quad (3)$$

则(1)式可写为

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L^*}{\partial q_s} - Q''_s \right) \delta q_s = 0, \quad (4)$$

其中 $L^* = T^* - V$ 为系统的相对论性 Lagrange 函数.

取无限小单参数群变换

$$\bar{t} = t + \Delta t, \quad \bar{q}_s(\bar{t}) = q_s(t) + \Delta q_s, \quad (5)$$

在一级近似下, 其展开式为

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \epsilon f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ \bar{q}_s &= q_s + \epsilon F_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 ϵ 为无限小参数, f, F_s 为无限小单参数群变换的生成元. 于是有

$$\begin{aligned} \Delta t &= \epsilon f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ \Delta q_s &= \epsilon F_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \end{aligned} \quad (7)$$

广义坐标的等时变分和非等时变分有如下关系^[6]:

$$\Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s \Delta t. \quad (8)$$

将等时变分用生成元表为

$$\delta q_s = \epsilon [F_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \dot{q}_s f(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]. \quad (9)$$

将(9)式代入(4)式, 得

$$\sum_{s=1}^n \epsilon \left[- \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L^*}{\partial q_s} + Q''_s \right] (F_s - \dot{q}_s f) = 0. \quad (10)$$

将(10)式展开,加上并减去一个函数 $\epsilon \frac{\partial L^*}{\partial t} f$,整理得

$$\begin{aligned} & \epsilon \left\{ \sum_{s=1}^n \left[Q''_s (F_s - \dot{q}_s f) + \frac{\partial L^*}{\partial q_s} F_s + \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \dot{F}_s \right] \right. \\ & - \left(\frac{\partial L^*}{\partial t} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial q_s} \dot{q}_s + \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s \right) f + \frac{\partial L^*}{\partial t} f \\ & \left. - \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s f - \frac{d}{dt} \left[\sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} (F_s - \dot{q}_s f) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

再在(11)式中加上并减去一规范函数 $\epsilon \dot{P}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$,得

$$\begin{aligned} & \epsilon \left\{ \sum_{s=1}^n \left[Q''_s (F_s - \dot{q}_s f) + \frac{\partial L^*}{\partial q_s} F_s + \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \dot{F}_s \right] \right. \\ & + \left(L^* - \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s \right) \dot{f} + \frac{\partial L^*}{\partial t} f + \dot{P}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ & - \frac{d}{dt} \left[L^* f + \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} (F_s - \dot{q}_s f) \right. \\ & \left. \left. + P(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

这就是相对论力学系统 D'Alembert 原理不变性条件的变换.

如果无限小变换的生成元 f, F_s 和规范函数 $P = P(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 满足如下条件:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \left[Q''_s (F_s - \dot{q}_s f) + \frac{\partial L^*}{\partial q_s} F_s + \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \dot{F}_s \right] \\ & + \left(L^* - \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s \right) \dot{f} + \frac{\partial L^*}{\partial t} f \\ & + \dot{P}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

则相应的对称性为 Noether 对称性,此时系统存在如下守恒量:

$$I = L^* f + \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} (F_s - \dot{q}_s f) + P = \text{const}. \quad (14)$$

称(13)式为相对论力学系统的 Noether 等式.

定理 1 对相对论力学系统,如果无限小变换的生成元 f, F_s 和规范函数 $P = P(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 满足条件(13)式,那么系统存在形如(14)式的守恒律.该定理称为相对论力学系统的广义 Noether 定理.

3. 相对论力学系统的形式不变性

设系统受到的约束是理想的完整约束,则由(4)式可得系统的相对论性 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L^*}{\partial q_s} = Q''_s, \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

引入 Euler 算子

$$E_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s}, \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (16)$$

则(15)式可写为

$$E_s(L^*) = Q''_s \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

取无限小变换的生成元向量

$$X^{(0)} = f \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^n F_s \frac{\partial}{\partial q_s}, \quad (18)$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^n (F_s - \dot{q}_s f) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \quad (19)$$

二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{s=1}^n (\ddot{F}_s - 2\ddot{q}_s \dot{f} - \dot{q}_s \ddot{f}) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \quad (20)$$

在变换(6)下, Lagrange 函数 $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 变成 $\bar{L}^* = L^*(\bar{t}, \bar{\mathbf{q}}, \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt})$, 非势广义力 $Q''_s = Q''_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 变成 $\bar{Q}''_s = Q''_s\left(\bar{t}, \bar{\mathbf{q}}, \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{dt}\right)$.

定义 如果在无限小变换(6)下,方程(17)的形式保持不变,即

$$E_s(\bar{L}^*) = \bar{Q}''_s \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (21)$$

则称这种不变性为相对论力学系统(15)的形式不变性.

将 \bar{L}^*, \bar{Q}''_s 展开,有

$$\bar{L}^* = L^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \epsilon X^{(1)}(L^*) + \alpha(\epsilon^2) \quad (22)$$

$$\bar{Q}''_s = Q''_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \epsilon X^{(1)}(Q''_s) + \alpha(\epsilon^2). \quad (23)$$

判据 对相对论力学系统(15),如果无限小变换的生成元 f, F_s 满足

$$E_s(X^{(1)}(L^*)) - X^{(1)}(Q''_s) = 0, \quad (24)$$

则在无限小变换(6)下,相对论力学系统是形式不变性的.

证明 将 Euler 算子作用于(22)式,去掉 ϵ^2 及更高阶小项,得

$$E_s(\bar{L}^*) = E_s(L^*) + \epsilon E_s(X^{(1)}(L^*)), \quad (25)$$

将 (17) 式代入 (25) 式, 并利用 (23) 式, 得

$$E_s(\bar{L}^*) = \bar{Q}_s' + \epsilon [E_s(X^{(1)}(L^*)) - X^{(1)}(Q_s'')], \quad (26)$$

将 (24) 式代入 (26) 式, 便得 (21) 式.

相对论力学系统的形式不变性在一定条件下可导致守恒量.

定理 2 在无限小变换 (6) 下, 如果相对论力学系统 (15) 是形式不变性的, 且存在规范函数 $P_F = P_F(t, q, \dot{q})$ 满足结构方程

$$L^* \dot{f} + X^{(1)}(L^*) + \sum_{s=1}^n (F_s - \dot{q}_s f) Q_s'' = -\dot{P}_F, \quad (27)$$

则系统存在如下守恒量:

$$I = L^* f + \sum_{s=1}^n \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} (F_s - \dot{q}_s f) + P_F = \text{const}. \quad (28)$$

证明 (28) 式对 t 求导后将 (27) 式代入, 并注意到 (15) 式便可得证.

4. 形式不变性与 Noether 对称性的关系

由 (24) 和 (13) 式可知, 相对论力学系统的形式不变性与 Noether 对称性一般而言是不同的. 关于它们之间的关系有如下定理:

定理 3 如果相对论力学系统 (15) 在无限小变换 (6) 下是形式不变性的, 则当无限小变换的生成元 f, F_s 和规范函数 $P = P(t, q, \dot{q})$ 满足 (13) 式时, 形式不变性也是 Noether 对称性, 否则, 形式不变性不是 Noether 对称性.

定理 4 如果相对论力学系统 (15) 在无限小变换 (6) 下是 Noether 对称性的, 则当无限小变换的生成元 f, F_s 满足 (24) 式时, Noether 对称性也是形式不变性的, 否则, Noether 对称性不是形式不变性的.

相对论力学系统的 Noether 对称性和形式不变性导致的守恒量分别由定理 1 和定理 2 给出. 如果相对论力学系统在给定无限小变换 (6) 下既具有 Noether 对称性, 又具有形式不变性, 由定理 1 和定理 2 知, Noether 对称性和形式不变性导致相同的守恒量.

本文结果具有更一般的意义, 对相对论情况和经典情况都适用, 当 $|\dot{r}_i| \ll c$ 时, 相对论性广义动

能 T^* 化为经典动能 $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_{0i} \dot{r}_i^2$, 本文结果化为经典情况下的结果.

5. 算 例

设相对论力学系统的 Lagrange 函数为

$$L^* = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) c^2}) - V, \quad (29)$$

所受的非势广义力为 $Q''_1 = \dot{q}_1, Q''_2 = -\dot{q}_2$, 势能 V 为常数. 研究其形式不变性和 Noether 对称性.

方程 (24) 给出

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) \left\{ \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) c^2}} \right. \\ \left. \times [(\dot{F}_1 - \dot{q}_1 \dot{f}) \dot{q}_1 + (\dot{F}_2 - \dot{q}_2 \dot{f}) \dot{q}_2] \right\} \\ - (\dot{F}_1 - \dot{q}_1 \dot{f}) = 0, \quad (30)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \left\{ \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) c^2}} \right. \\ \left. \times [(\dot{F}_1 - \dot{q}_1 \dot{f}) \dot{q}_1 + (\dot{F}_2 - \dot{q}_2 \dot{f}) \dot{q}_2] \right\} \\ + (\dot{F}_2 - \dot{q}_2 \dot{f}) = 0, \quad (31)$$

取

$$f = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad (32)$$

则 (30) 和 (31) 式满足. 故对生成元 (32) 式, 系统是形式不变性的.

方程 (13) 给出

$$\dot{q}_1 (F_1 - \dot{q}_1 f) - \dot{q}_2 (F_2 - \dot{q}_2 f) \\ + \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) c^2}} (\dot{q}_1 \dot{F}_1 + \dot{q}_2 \dot{F}_2) \\ + \left[m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) c^2}) - V \right. \\ \left. - \frac{m_0 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) c^2}} \right] \dot{f} + \dot{P} = 0, \quad (33)$$

将 (32) 式代入 (33) 式, 可求得规范函数 $P = (q_2 - q_1)$, 故对生成元 (32) 式, 系统也是 Noether 对称性的.

由定理 1 和定理 2 知, 系统的形式不变性和 Noether 对称性导致的守恒量相同, 为

$$I = \frac{m_0 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) c^2}} + (q_2 - q_1) = \text{const}. \quad (34)$$

若取

$$f = 0, \quad F_1 = -q_2, \quad F_2 = q_1, \quad (35)$$

则(30)和(31)式不满足,但由(33)式可求得规范函数 $P = q_1 q_2$, 故对生成元(35)式,系统不是形式不变性的,但却是 Noether 对称性的,根据定理 1,这个

Noether 对称性导致的守恒量为

$$I = m_0 \frac{q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)c^2}} + q_1 q_2 = \text{const.} \quad (36)$$

- [1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* KI II 235
- [2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973
- [3] Liu D 1990 *Sci. China A* **20** 1189 (in Chinese) [刘 端 1990 中国科学 A **20** 1189]
- [4] Mei F X 1993 *Sci. China A* **23** 709 (in Chinese) [梅凤翔 1993 中国科学 A **23** 709]
- [5] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Constrained Systems and Their Symmetries* (Beijing : Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京 : 北京工业大学出版社)]
- [6] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing : Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 : 科学出版社)]
- [7] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Conserved Quantities of Mechanics System* (Beijing : Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京 : 科学出版社)]
- [8] Fang J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 836
- [9] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]
- [10] Guo Y X, Jiang L Y and Yu Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 181
- [11] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]
- [12] Fang J H 2002 *Chin. Phys.* **11** 313
- [13] Luo S K 2002 *Chin. Phys.* **11** 429
- [14] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177
- [15] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373
- [16] Wang S Y and Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5
- [17] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]
- [18] Fang J H, Xue Q Z and Zhao S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会、薛庆忠、赵高卿 2002 物理学报 **51** 2183]
- [19] Luo S K 1991 *Shanghai J. Mech.* **12** 61 (in Chinese) [罗绍凯 1991 上海力学 **12** 61]

Form invariance and Noether symmetry of a relativistic mechanical system

Fang Jian-Hui Yan Xiang-Hong Chen Pei-Sheng

(Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying 257061, China)

(Received 17 July 2002 ; revised manuscript received 6 August 2002)

Abstract

In this paper, we study the form invariance and Noether symmetry of a relativistic mechanical system. Firstly, we give the Noether theorem of a relativistic mechanical system and the definition and criterion and conserved quantity of the form invariance in the system. Next, the relation between the form invariance and Noether symmetry of the system is obtained. Finally, we give an example to illustrate the application of the result.

Keywords : relativity, mechanical system, form invariance, Noether symmetry

PACC : 0330, 0320