第 52 卷 第 7 期 2003 年 7 月
1000-3290/2003/52(07)/1565-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.7,July,2003

(2+1)维耗散长波方程与(2+1)维 Broer-Kaup 方程新的类多孤子解*

那仁满都拉[1)2)] 王克协[1)]

[1)](吉林大学物理科学学院,长春 130023)

[2)](内蒙古民族大学物理与机电学院,通辽 028043)

(2002 年 7 月 17 日收到;2002 年 10 月 31 日收到修改稿)

进一步拓广齐次平衡法的应用,并对关键的操作步骤进行了改进,从而简便地求出了(2+1)维耗散长波方程和(2+1)维 Broer-Kaup 方程新的类多孤子解.这种解更具有一般性,它包含着已有文献给出的类多孤子解.

关键词:齐次平衡法,类多孤子解,(2+1)维耗散长波方程,(2+1)维 Broer-Kaup 方程

PACC:0340K,0290

1. 引 言

自然界和人类社会充满着非线性现象,这些非线性现象的研究最终可用非线性方程来简练地描述,因此如何求解这些非线性方程(组)的问题在非线性科学研究中具有重要的地位.物理学家和数学家一直都非常注重这方面的研究,并相继提出了许多求非线性发展方程(组)准确解的有效方法,如反散射方法、Backlund 变换法、Hirota 方法以及齐次平衡法等.其中齐次平衡法[1—3]是近年来发展的求非线性发展方程(组)孤波解的一种十分有效的新方法,该方法在求解非线性方程的过程中得到了广泛的应用[4—17].文献[18]中我们拓广使用齐次平衡法并对关键的操作步骤进行改进,从而简便地给出了(1+1)维色散长波方程和(1+1)维变形色散水波方程的一种特殊形状的多孤子解.本文在文献[18]的基础上,进一步拓广齐次平衡法的应用,并对关键的操作步骤进行改进,从而简便地求出了(2+1)维耗散长波方程和(2+1)维 Broer-Kaup 方程新的带有关于 y 的任意函数的类多孤子解.本文得到的这种解更具有一般性,在特殊情况下它与前人给出的结果相一致.

2. (2+1)维非线性耦合方程的类多孤子解

2.1. (2+1)维耗散长波方程的类多孤子解

文献[16]中研究的(2+1)维耗散长波方程为

$$u_{ty}+\eta_{xx}+\frac{1}{2}(u^2)_{xy}=0, \tag{1}$$

$$\eta_t+(u\eta+u+u_{xy})_x=0. \tag{2}$$

按照齐次平衡法的基本思想,可以设方程(1)和(2)具有如下形式解:

$$u(x,y,t)=f'(\varphi)\varphi_x+a(x,y,t), \tag{3}$$

$$\eta(x,y,t)=\lambda[f''(\varphi)\varphi_x\varphi_y+f'(\varphi)\varphi_{xy}]+b(x,y,t)\qquad(\lambda\neq0), \tag{4}$$

其中 $f(\varphi)$,$\varphi(x,y,t)$,$a(x,y,t)$,$b(x,y,t)$为待定函数,λ 为待定常数.按照齐次平衡法的基本操作步骤[1—3],下面应该把方程(3)和(4)代入方程(1)和(2)进行推算,得出关于 $f(\varphi)$的常微分方程(组).但这样的操作非常繁琐,所以应该改进这一操作步骤.其实把方程的解设成(3)和(4)式的情形下,很容易观察到 $u(x,y,t)$和 $\eta(x,y,t)$之间存在一种简单的变换关系,即

$$\eta=\lambda u_y+b-\lambda a_y, \tag{5}$$

因此利用变换关系(5)式,由方程(1)和(2)可得

* 国家自然科学基金(批准号:40074032)资助的课题.

$$u_{ty}+(uu_x)_y+\lambda u_{xxy}+(b-\lambda a_y)_{xx}=0, \quad (6)$$

$$u_{ty}+(uu_x)_y+\frac{1}{\lambda}u_{xxy}+\frac{1}{\lambda}(b-\lambda a_y)_t + \frac{1}{\lambda}[(b-\lambda a_y+1)u]_x=0. \quad (7)$$

如果 $\lambda=\pm1$，$b=\lambda a_y-1$，那么(6)和(7)式就变成关于 u 的 Burgers 方程

$$u_t+uu_x\pm u_{xx}=0. \quad (8)$$

这样问题就归结为求解简单的 Burgers 方程(8)的问题. 将(3)式代入(8)式，整理后可得

$$\begin{aligned}u_t+uu_x\pm u_{xx}=&(f''f'\pm f''')\varphi_x^3+(f''\varphi_x\varphi_t+af''\varphi_x^2\\&+f'^2\varphi_{xx}\varphi_x\pm3f''\varphi_{xx}\varphi_x)+(\varphi_{xt}\\&+a\varphi_{xx}\pm\varphi_{xxx}+a_x\varphi_x)f'\\&+a_t+aa_x\pm a_{xx}=0.\end{aligned} \quad (9)$$

令式中 φ_x^3 的系数为零，可得

$$f''f'\pm f'''=0. \quad (10)$$

解之得

$$f=\pm2\ln\varphi. \quad (11)$$

从而有

$$f'^2=\mp2f''. \quad (12)$$

将(12)式代入(9)式，并利用(10)式，得

$$\begin{aligned}u_t+uu_x\pm u_{xx}=&(\varphi_x\varphi_t+a\varphi_x^2\pm\varphi_{xx}\varphi_x)f''\\&+(\varphi_{xt}+a\varphi_{xx}\pm\varphi_{xxx}+a_x\varphi_x)f'\\&+a_t+aa_x\pm a_{xx}=0.\end{aligned} \quad (13)$$

令式中 f''，f' 和 f^0 的系数为零，可得

$$(\varphi_t+a\varphi_x\pm\varphi_{xx})\varphi_x=0, \quad (14)$$

$$\varphi_{tx}+(a\varphi_x)_x\pm\varphi_{xxx}=0, \quad (15)$$

$$a_t+aa_x\pm a_{xx}=0. \quad (16)$$

为了简便地找出方程的类多孤子解，选取 $a(x,y,t)=c(y)$，这时上式变成

$$(\varphi_t+c(y)\varphi_x\pm\varphi_{xx})\varphi_x=0, \quad (17)$$

$$(\varphi_t+c(y)\varphi_x\pm\varphi_{xx})_x=0. \quad (18)$$

可设方程(17)和(18)具有如下特解：

$$\varphi(x,y,t)=1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}[M_i(y)x+\alpha_i(y)+N_i(y)t] \times\exp[k_i(y)x+\beta_i(y)+l_i(y)t] \quad (19)$$

或

$$\varphi(x,y,t)=1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{sh}[M_i(y)x+\alpha_i(y)+N_i(y)t] \times\exp[k_i(y)x+\beta_i(y)+l_i(y)t], \quad (20)$$

其中 $M_i(y)$，$\alpha_i(y)$，$N_i(y)$，$k_i(y)$，$\beta_i(y)$ 以及 $l_i(y)$ 为关于 y 的待定函数. 把(19)式代入(17)和(18)式，可得

$$N_i(y)=-[c(y)\pm2k_i(y)]M_i(y), \quad (21)$$

$$M_i(y)=\pm\sqrt{\mp[l_i(y)+c(y)k_i(y)\pm k_i^2(y)]}, \quad (22)$$

其中 $c(y)$，$k_i(y)$，$l_i(y)$ 为关于 y 的任意函数.

因此，由(3)和(11)式以及(19)式，就得到方程(8)的类多孤子解

$$u=\pm2\frac{\sum_{i=1}^{n}\{M_i(y)\mathrm{sh}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]+k_i(y)\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]\}\exp[\xi_i+\beta_i(y)]}{1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]\exp[\xi_i+\beta_i(y)]}+c(y). \quad (23)$$

这是 Burgers 方程(8)更具一般性的类多孤子解. 利用变换关系(5)式及解(23)式，直接可得(2+1)维耗散长波方程(1)和(2)的类多孤子解

$$u=\pm2\frac{\sum_{i=1}^{n}\{M_i(y)\mathrm{sh}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]+k_i(y)\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]\}\exp[\xi_i+\beta_i(y)]}{1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]\exp[\xi_i+\beta_i(y)]}+c(y), \quad (24)$$

$$\eta=\pm\frac{\partial u}{\partial y}-1, \quad (25)$$

其中 $M_i(y)=\pm\sqrt{\mp[l_i(y)+c(y)k_i(y)\pm k_i^2(y)]}$，

$\zeta_i = x - [c(y) \pm 2k_i(y)]t$，$\xi_i = k_i(y)x + l_i(y)t$. 这是本文给出的该方程新的类多孤子解. 当 $M_i(y)=0$，即 $l_i(y) = -[c(y)k_i(y) \pm k_i^2(y)]$ 和 $\alpha_i(y)=0$ 时，解(24)和(25)式就变成文献[16]中得到的类多孤子解，所以文献[16]中得到的类多孤子解是本文结果的特殊情况.

2.2. (2+1)维 Broer-Kaup 方程的类多孤子解

(2+1)维 Broer-Kaup 方程为[17]

$$H_{ty} - H_{xxy} + 2(HH_x)_y + 2G_{xx} = 0, \tag{26}$$

$$G_t + G_{xx} + 2(GH)_x = 0. \tag{27}$$

该方程已在统计物理、等离子体物理和非线性光纤通信等许多科技领域中得到应用. 设方程(26)和(27)具有如下形式解：

$$H(x,y,t) = f'(\varphi)\varphi_x + a(x,y,t), \tag{28}$$

$$G(x,y,t) = \lambda[f''(\varphi)\varphi_x\varphi_y + f'(\varphi)\varphi_{xy}] + b(x,y,t) \quad (\lambda \neq 0), \tag{29}$$

其中 $f(\varphi)$，$\varphi(x,y,t)$，$a(x,y,t)$ 及 $b(x,y,t)$ 为待定函数，λ 为待定常数. 同样，从(28)和(29)式可得如下变换：

$$G = \lambda H_y + b - \lambda a_y. \tag{30}$$

把(30)式代入(26)和(27)式，可得

$$H_{ty} + (2\lambda - 1)H_{xxy} + 2(HH_x)_y + 2(b - \lambda a_y)_{xx} = 0, \tag{31}$$

$$H_{ty} + H_{xxy} + 2(HH_x)_y + \frac{2}{\lambda}[(b - \lambda a_y)H]_x + \frac{1}{\lambda}(b - \lambda a_y)_t + \frac{1}{\lambda}(b - \lambda a_y)_{xx} = 0. \tag{32}$$

如果 $\lambda = 1$，$b = \lambda a_y$，那么(31)和(32)式就变成关于 H 的 Burgers 方程

$$H_t + 2HH_x + H_{xx} = 0. \tag{33}$$

与方程(8)一样，求解方程(33)，就容易得到它新的类多孤子解

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{M_i(y)\mathrm{sh}[M_i(y)\zeta_i + \alpha_i(y)] + k_i(y)\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i + \alpha_i(y)]\}\exp[\xi_i + \beta_i(y)]}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i + \alpha_i(y)]\exp[\xi_i + \beta_i(y)]} + c(y), \tag{34}$$

其中 $M_i(y) = \pm\sqrt{-[l_i(y) + 2c(y)k_i(y) + k_i^2(y)]}$，$\zeta_i = x - 2[c(y) + k_i(y)]t$，$\xi_i = k_i(y)x + l_i(y)t$. 所以(2+1)维 Broer-Kaup 方程新的类多孤子解为

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{M_i(y)\mathrm{sh}[M_i(y)\zeta_i + \alpha_i(y)] + k_i(y)\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i + \alpha_i(y)]\}\exp[\xi_i + \beta_i(y)]}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i + \alpha_i(y)]\exp[\xi_i + \beta_i(y)]} + c(y), \tag{35}$$

$$G = \frac{\partial H}{\partial y}, \tag{36}$$

其中 $M_i(y) = \pm\sqrt{-[l_i(y) + 2c(y)k_i(y) + k_i^2(y)]}$，$\zeta_i = x - 2[c(y) + k_i(y)]t$，$\xi_i = k_i(y)x + l_i(y)t$. 这是本文得到的该方程新的带有关于 y 的任意函数的类多孤子解. 当 $M_i(y)=0$，即 $l_i(y) = -[2c(y)k_i(y) + k_i^2(y)]$，$\alpha_i(y)=0$，以及 $c(y)$ = 常数时，解(35)和(36)式就变成文献[17]中得到的类多孤子解. 所以文献[17]中得到的类多孤子解是本文结果的特殊情况.

3. 结　　语

本文进一步拓广齐次平衡法的应用，并对一些关键的操作步骤进行了改进，从而简便地求出了(2+1)维耗散长波方程和(2+1)维 Broer-Kaup 方程新的带有关于 y 的任意函数的类多孤子解. 本文给出的解更具有一般性，它包含已有文献给出的类多孤子解. 实践证明本文这种拓广和改进的齐次平衡法简洁有效，它不但适合于求解(1+1)维非线性耦合方程，而且还适合于求解某些(2+1)维的非线性耦合方程. 推广该方法到具高次非线性耦合方程，值得

进一步研究.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[2] Fan E G and Zhang H Q 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 1254(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1254]

[3] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[4] Xu B Z *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1946(in Chinese)[徐炳振等 1998 物理学报 **47** 1946]

[5] Zhang J F 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1416(in Chinese)[张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[6] Zhang J F 1999 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **16** 4

[7] Fan E G 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409(in Chinese)[范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[8] Zhang J F and Wu F M 1999 *Acta Phys*. *Sin*. (Overses Edition) **8** 326

[9] Zhang J F 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 1

[10] Zhang J F 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 893

[11] Bai C L 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 1091

[12] Naranmandula and Chen B T 2001 *Mech*. *Engineer*. **23** 33(in Chinese)[那仁满都拉、陈巴特 2001 力学与实践 **23** 33]

[13] Chen S L and Hou W G 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1842(in Chinese)[陈松林、侯为根 2001 物理学报 **50** 1842]

[14] Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 425

[15] Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 651

[16] Zhang J F 2000 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **33** 577

[17] Zhang J F and Han P 2001 *Chin*. *J*. *Atomic Molecular Phys*. **18** 216 (in Chinese)[张解放、韩 平 2001 原子与分子物理学报 **18** 216]

[18] Naranmandula 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1671(in Chinese)[那仁满都拉 2002 物理学报 **51** 1671]

Multisoliton-like solutions for (2+1)-dimensional dispersive long wave equations and (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations*

Naranmandula[1)2)] Wang Ke-Xie[1)]

[1)] (*College of Physical Science*, *Jilin University*, *Changchun* 130023, *China*)

[2)] (*College of Physics and Electromechanics*, *Inner Mongolia University for Nationalities*, *Tongliao* 028043, *China*)

(Received 17 July 2002; revised manuscript received 31 October 2002)

Abstract

By extending homogeneous balance method and improving some of its procedures, we have obtained new multi-soliton-like solutions for (2+1)-dimensional dispersive long-wave equations and (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations. The solution we obtained presents generality, because it contain some multisoliton-like solutions which are given in other papers.

Keywords: homogeneous balance method, multi-soliton-like solutions, (2+1)-dimensional dispersive long-wave equations, (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40074032).