第 52 卷 第 7 期 2003 年 7 月
1000-3290/2003/52(07)/1574-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 52, No. 7, July, 2003

两类非线性方程的精确解*

张金良[1)] 王跃明[2)] 王明亮[2)3)] 方宗德[1)]

[1)] (西北工业大学机电工程学院,西安 710072)

[2)] (河南科技大学数理系,洛阳 471039)

[3)] (兰州大学数学系,兰州 730000)

(2002 年 9 月 30 日收到;2002 年 11 月 8 日收到修改稿)

利用行波约化方法,并借助于一维立方非线性 Klein-Gordon 方程的精确解,求出了(1+1)维 Zakharov 方程组、变系数 Korteweg-de Vries 方程的一些精确解.

关键词:行波约化方法,一维立方非线性 Klein-Gordon 方程,(1+1)维 Zakharov 方程组,变系数 Korteweg-de Vries 方程

PACC:0340K,0290,0365G

1. 引 言

随着自然科学与社会科学的快速发展,非线性问题越来越引起人们的重视,特别是非线性数学物理问题更是被众多数学家和物理学家所关注.在非线性数学物理问题中,由于孤子理论被广泛应用于光纤通讯、流体力学、等离子体物理、超导、量子场论等物理领域以及化学、生物学等学科,因此,该理论的研究一直是最活跃的领域之一.近年来,非线性数学物理问题的研究成果不断涌现,尤其是新的精确解的求解方法更是层出不穷,如反散射方法[1—3]、Miura 变换法[2]、Hirota 方法[3]、Painlevé 展开方法[3]、Bäcklund 变换法[3]、截断展开法[4]、形式变量分离法[5]、Jacobi 椭圆函数展开法[6],阶分析法[7],齐次平衡方法[8—17]等等.

文献[18]采用行波法约化方程,建立一种非线性变换关系,将求解(3+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov(NNV)方程的解转化为求解一维非线性 Klein-Gordon 方程的解,从而得到(3+1)维 NNV 方程的孤子解和周期解.这是一种非常有效的求精确解的方法.本文将上述方法推广为一般形式,即将行波约化后所得到的常微分方程的精确解假设为一有限级数形式.修改后的方法简述如下:

考虑非线性数学物理方程

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

其中等号左边为 u 及 u 的各阶导数的一个多项式.

1)假定

$$u = u(\xi) = u(kx + lt + \xi_0), \tag{2}$$

其中 k, l 为待定常数,ξ_0 为任意常数.

将(2)式代入(1)式,则(1)式约化成一常微分方程(ODE),

$$F(u, lu', ku', l^2 u'', k^2 u'', \cdots) = 0. \tag{3}$$

2)令

$$u = \sum_{i=0}^{N} A_i \phi^i, \tag{4}$$

其中 $\phi(\xi)$ 满足一维立方非线性 Klein-Gordon 方程,

$$\begin{cases} \phi_\xi^2 = c_0 + \lambda\phi^2 + \dfrac{1}{2}\mu\phi^4, \\ \phi_{\xi\xi} = \lambda\phi + \mu\phi^3, \end{cases} \tag{5}$$

$A_i\ (i=0,1,\cdots,n), c_0, c_1, \lambda, \mu$ 为待定参数,N 由平衡方程(3)中的非线性项与最高阶导数项来确定.

3)将(4)和(5)式代入(3)式,按 $\phi(\xi)$ 的幂次合并,令 $\phi(\xi)$ 的各幂次项的系数为零,得到一关于待定参数的非线性代数方程组.

4)借助于 Mathematica 或者 Maple,求解 3)中得到的非线性代数方程组,则可求得待定参数,由一维立方非线性 Klein-Gordon 方程的各种精确解以及(4)式,可推得(1)式的精确解.

* 河南省自然科学基金(批准号:0111050200)和河南省教育委员会自然科学基金(批准号:2000110008)资助的课题.

本文以(1+1)维 Zakharov 方程组、变系数 Korteweg-de Vries(KdV)方程为例来说明上述方法.

2. (1+1)维 Zakharov 方程组

首先考虑如下形式的(1+1)维 Zakharov 方程组:

$$\begin{cases} u_{tt} - c_s^2 u_{xx} - \beta(|v|^2)_{xx} = 0, \\ \mathrm{i}v_t + \alpha v_{xx} - \delta uv = 0, \end{cases} \tag{6}$$

其中 α, β, δ, c_s 为常数.在文献[19]中,刘式达等人利用 Jacobi 椭圆函数展开法求出该方程的包络周期解.这里利用引言中所给出的方法求解方程组(6),得到了除 Jacobi 椭圆函数形式解之外的其他形式解.

令

$$v = \exp(\mathrm{i}\eta)w(\xi), \tag{7}$$

$$u = u(\xi), \tag{8}$$

其中 $\xi = x - \gamma t + \xi_0$, $\eta = ax + bt + \eta_0$, a, b, γ 为待定常数, ξ_0, η_0 为常数.

将(7)和(8)式代入方程(6),经整理,得到

$$2a\alpha w' - \gamma w' = 0, \tag{9}$$

$$\alpha w'' - \delta wu - (b + a^2\alpha)w = 0, \tag{10}$$

$$(\gamma^2 - c_s^2)u'' - \beta(w^2)'' = 0, \tag{11}$$

其中 u'', w', w'' 分别为 u, w 对 ξ 的一阶、二阶导数.

由(11)式可以推得

$$u = \frac{\beta}{\gamma^2 - c_s^2}w^2. \tag{12}$$

将(12)式代入(10)式,并整理(9)和(10)式,得到

$$\gamma = 2a\alpha, \tag{13}$$

$$\alpha w'' - \frac{\delta\beta}{\gamma^2 - c_s^2}w^3 - (b + a^2\alpha)w = 0. \tag{14}$$

平衡方程(14)中的非线性项与最高阶导数项,于是令

$$w = d_0 + d_1\phi, \tag{15}$$

其中 $\phi(\xi)$ 满足方程(5), d_0, d_1 为待定常数.

将(15)和(5)式代入方程(14)等号左边,经整理得到一关于 $\phi(\xi)$ 的多项式,令 $\phi(\xi)$ 的各幂次项系数为零,得到一代数方程组

$$\mu\alpha d_1 - \frac{\delta\beta}{\gamma^2 - c_s^2}d_1^3 = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\delta\beta}{\gamma^2 - c_s^2}d_0 d_1^2 = 0, \tag{17}$$

$$\alpha\lambda d_1 - 3\frac{\delta\beta}{\gamma^2 - c_s^2}d_0^2 d_1 - (b + a^2\alpha)d_1 = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\delta\beta}{\gamma^2 - c_s^2}d_0^3 + (b + a^2\alpha)d_0 = 0. \tag{19}$$

解上述方程组,得到

$$d_0 = 0, \tag{20}$$

$$b = \alpha(\lambda - a^2), \tag{21}$$

$$d_1^2 = \frac{\mu\alpha(\gamma^2 - c_s^2)}{\delta\beta}. \tag{22}$$

于是方程组(6)的解为

$$u = \frac{\mu\alpha}{\delta}\phi^2(\xi), \tag{23}$$

$$v = \exp(\mathrm{i}\eta)d_1\phi(\xi), \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} \xi &= x - \gamma t + \xi_0, \\ \eta &= ax + \alpha(\lambda - a^2)t + \eta_0, \end{aligned} \tag{25}$$

a, γ, ξ_0, η_0 为任意常数, $\phi(\xi)$ 为方程(5)的一个解.

这样,利用文献[22]所给的一维立方非线性 Klein-Gordon 方程的各种精确解,可得到方程组(6)的精确解.下面写出方程组(6)的几种精确解.

若设

1) $\lambda = -2$, $u = 2$, $c_0 = 1$,则有

$$\xi_1 = x - \gamma t + \xi_0,$$

$$\eta_1 = ax - \alpha(2 + a^2)t + \eta_0,$$

$$d_1^2 = \frac{2\alpha(\gamma^2 - c_s^2)}{\delta\beta} \quad \left(\text{当}\frac{\alpha(\gamma^2 - c_s^2)}{\delta\beta} > 0\text{时}\right),$$

于是

$$u = \frac{2\alpha}{\delta}\mathrm{th}^2(\xi_1),$$

$$v = d_1\exp(\mathrm{i}\eta_1)\mathrm{th}(\xi_1),$$

其中 a, γ, ξ_0, η_0 为任意常数.

2) $\lambda = 2$, $\mu = 2$, $c_0 = 1$,则有

$$\eta_2 = ax + \alpha(2 - a^2)t + \eta_0,$$

于是

$$u = \frac{2\alpha}{\delta}\tan^2(\xi_1),$$

$$v = d_1\exp(\mathrm{i}\eta_2)\tan(\xi_1),$$

其中 a, η_0 为任意常数.

3) $\lambda = 2k^2 - 1$, $\mu = -2k^2$, $c_0 = 1 - k^2$,则有

$$\eta_3 = ax + \alpha(2k^2 - 1 - a^2)t + \eta_0,$$

于是

$$u = -\frac{2k^2\alpha}{\delta}\mathrm{cn}^2\xi_1,$$

$$v = d_1\exp(\mathrm{i}\eta_3)\mathrm{cn}(\xi_1),$$

其中 a，η_0 为任意常数.

限于篇幅，其他精确解在此不再一一列出.

3. 变系数 KdV 方程

这里讨论如下形式的变系数 KdV 方程：

$$u_t + [\theta(t) + \omega(t)x]u_x + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} + \upsilon(t)u = 0, \tag{26}$$

其中 $\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\omega(t)$，$\theta(t)$，$\upsilon(t)$ 为 t 的单变元函数. 方程(26)已被许多学者研究过，并做出了许多成果. 文献[20]用一个特殊函数变换获得了方程(26)的钟状孤子解. 文献[21]采用椭圆函数展开法讨论了方程(26)的精确解. 本文借助于一维立方非线性 Klein-Gordon 方程讨论方程(26)，并由此得到除椭圆函数形式之外的其他形式精确解.

令

$$u = u(\xi) = \sum_{j=0}^{N} a_j(t)\phi^j(\xi), \tag{27}$$

其中 $\xi = f(t)x + g(t) + \xi_0$，$a_j(t)\ (j = 0,1,\cdots,N)$，$f(t)$，$g(t)$ 为待定函数，ξ_0 为任意常数，$\phi(\xi)$ 满足方程(5).

平衡方程(26)中的非线性项与最高导数项，于是，可令方程(26)形如

$$u = a_0(t) + a_1(t)\phi(\xi) + a_2(t)\phi^2(\xi). \tag{28}$$

将(28)和(5)式代入方程(26)，经整理，推得

$$\begin{aligned}&[a'_0 + a_0\upsilon] + [a'_1 + a_1\upsilon]\phi + [a'_2 + a_2\upsilon]\phi^2 \\ &+ \{a_1[f' + \omega f]x + a_1[g' + \theta f + \alpha a_0 f + \lambda\beta f^3]\}\phi' \\ &+ \{2a_2[f' + \omega f]x + 2a_2[g' + \theta f + a_0\alpha f + 4\lambda\beta f^3] \\ &+ \alpha a_1^2 f\}\phi\phi' + \{3a_1[\alpha a_2 f + \mu\beta f^3]\}\phi^2\phi' \\ &+ \{2a_2[\alpha a_2 + 6\beta\mu f^2]\}\phi^3\phi' = 0.\end{aligned} \tag{29}$$

令方程(29)中各项系数为零，得到如下形式的非线性方程组：

$$\begin{aligned}&a'_0 + a_0\upsilon = 0,\\ &a'_1 + a_1\upsilon = 0,\\ &a'_2 + a_2\upsilon = 0,\\ &a_1[f' + \omega f]x + a_1[g' + \theta f + \alpha a_0 f \\ &\qquad + \lambda\beta f^3] = 0,\\ &2a_2[f' + \omega f]x + 2a_2[g' + \theta f + a_0\alpha f \\ &\qquad + 4\lambda\beta f^3] + \alpha a_1^2 f = 0,\\ &3a_1[\alpha a_2 f + \mu\beta f^3] = 0,\\ &2a_2[\alpha a_2 + 6\beta\mu f^2] = 0.\end{aligned}$$

解上述方程组，可得到

$$a_0 = M_0\exp\left[-\int_0^t \upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right], \tag{30}$$

$$a_1(t) = 0, \tag{31}$$

$$a_2 = M_2\exp\left[-\int_0^t \upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right], \tag{32}$$

$$f = f_0\exp\left[-\int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right], \tag{33}$$

其中 M_0，M_2，f_0 为积分常数，

$$a_2 = \frac{6\mu\beta f^2}{\alpha} = 6\mu f_0^2\frac{\beta}{\alpha}\exp\left[-\int_0^t 2\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right], \tag{34}$$

$$\begin{aligned}g = -\int_0^t [&\theta(\tau)f(\tau) + a_0(\tau)\alpha(\tau)f(\tau) \\ &+ 4\lambda\beta(\tau)f^3(\tau)]\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{35}$$

由方程(32)和(34)，得到

$$\beta = M_3\alpha, \quad \upsilon = 2\omega,$$

其中 M_3 为常数.

于是，方程(26)的解可表示为

$$\begin{aligned}u = &M_0\exp\left[-\int_0^t \upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \\ &+ M_2\exp\left[-\int_0^t \upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\phi^2(\xi),\end{aligned} \tag{36}$$

其中

$$\xi = fx + g + \xi_0,$$

f，g 满足方程(33)和(35)，且 $\beta = M_3\alpha$，$\upsilon = 2\omega$，$\phi(\xi)$ 满足方程(5).

由文献[22]，可以得到方程(26)的一些解(包括文献[21]给出的椭圆函数形式解). 限于篇幅，下面只给出方程(26)的三种精确解.

若设

1) $\lambda = -2$，$\mu = 2$，$c_0 = 1$，则有

$$a_0 = M_0\exp\left[-\int_0^t \upsilon(\tau)\mathrm{d}\tau\right],$$

$$a_2 = 12f_0^2\frac{\beta}{\alpha}\exp\left[-\int_0^t 2\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right],$$

$$f = f_0\exp\left[-\int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right],$$

$$\begin{aligned}g_1 = -\int_0^t [&\theta(\tau)f(\tau) + a_0(\tau)\alpha(\tau)f(\tau) \\ &- 8\beta(\tau)f^3(\tau)]\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

$$\xi_1 = f(t)x + g_1(t) + \xi_0,$$

于是

$$u = a_0 + a_2\mathrm{th}^2(\xi_1).$$

2) $\lambda = 2$，$\mu = 2$，$c_0 = 1$，则有

$$g_2 = -\int_0^t [\theta(\tau)f(\tau) + a_0(\tau)\alpha(\tau)f(\tau)$$

$$+ 8\beta(\tau)f^3(\tau)]\mathrm{d}\tau,$$

$$\xi_2 = f(t)x + g_2(t) + \xi_0,$$

于是

$$u_2 = a_0 + a_2\tan^2(\xi_2).$$

3）$\lambda = 2k^2 - 1$，$\mu = -2k^2$，$c_0 = 1 - k^2$，则有

$$g_3 = -\int_0^t [\theta(\tau)f(\tau) + a_0(\tau)\alpha(\tau)f(\tau) + 4(2k^2 - 1)\beta(\tau)f^3(\tau)]\mathrm{d}\tau,$$

$$\xi_3 = f(t)x + g_3(t) + \xi_0,$$

于是

$$u_3 = a_0 + a_2\mathrm{cn}^2(\xi_3).$$

4. 结　　论

本文利用行波约化方法，并借助于一维立方非线性 Klein-Gordon 方程的精确解，求出了(1 + 1)维 Zakharov 方程组、变系数 KdV 方程的一些精确解. 本文所讨论的方法不但可以用来求非线性微分方程组的精确解，而且也可以用来求变系数非线性微分方程的精确解. 由此可见，上述方法是求非线性偏微分方程精确解的一种有效且简单的方法之一.

[1] Ablowitz M J and Clarkson P A 1991 *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Miura M R 1978 *Bäcklund Transformation* (Berlin: Springer-Verlag)

[3] Gu C H *et al* 1990 *Soliton Theory and Its Application* (Hangzhou: Zhejiang Publishing House of Science and Technology)

[4] Lou S Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1739 (in Chinese) [楼森岳 1998 物理学报 **47** 1739]

[5] Chen L L and Chen Z W 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 955 (in Chinese) [陈黎丽、陈伟中 2002 物理学报 **51** 955]

[6] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2001 物理学报 **50** 2068]

[7] Feng X 2000 *Intern. Theor. Phys.* **39** 207

[8] Senthilvelan M 2001 *Appl. Math. Comput.* **123** 381

[9] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Phys. Lett.* A **246** 403

[10] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[11] Wang M L 1996 *Phys. Lett.* A **213** 279

[12] Wang M L, Li Z B and Zhou Y B 1999 *J. Lanzhou University* **35** (3) 8

[13] Zhang J L, Wang Y M and Wang M L 2000 *J. Luoyang Institute Technology* **21** (3) 80 (in Chinese) [张金良、王跃明、王明亮 2000 洛阳工学院学报 **21** (3) 80]

[14] Wang M L 1998 *J. Nonlinear Math. Phys.* **5** 120

[15] Wang M L and Wang Y M 2001 *Phys. Lett.* A **287** 211

[16] Xia J N, Han S X and Wang M L 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 58

[17] Zhang J F 2002 *Chin. Phys.* **11** 425

[18] Li H M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 465 (in Chinese) [李画眉 2002 物理学报 **51** 465]

[19] Liu S D, Fu Z T, Liu S K and Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、傅遵涛、刘式适、赵　强 2002 物理学报 **51** 718]

[20] Liu X Q 1998 *Appl. Math. -J. Chinese University* B **13** 25

[21] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵　强 2002 物理学报 **51** 1923]

[22] Lou S Y and Ni G J 1989 *J. Math. Phys.* **30** 1614

Exact solutions to two nonlinear equations*

Zhang Jin-Liang[1] Wang Yue-Ming[2] Wang Ming-Liang[2)3] Fang Zong-De[1]

[1] (*School of Mechanical and Electronic Engineering, Northwestern Polytechnic University, Xi'an* 710072, *China*)

[2] (*Department of Mathematics and Physics, Henan University of Science and Technology, Luoyang* 471039, *China*)

[3] (*Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *China*)

(Received 30 September 2002; revised manuscript received 8 November 2002)

Abstract

By using the traveling wave reduction method, the exact solutions to the (1+1)-dimensional Zakharov equation, Korteweg-de Vries equation with variable coefficients are obtained with the aid of exact solutions to the cubic nonlinear Klein-Gordon equation.

Keywords: traveling wave reduction method, cubic nonlinear Klein-Gordon equation, (1+1)-dimensional Zakharov equations, Korteweg-de Vries equation with variable coefficients

PACC: 0340K, 0290, 0365G

* Project supported in part by the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 0111050200), and the Natural Science Foundation of Education Committee of Henan Province, China (Grant No. 2000110008).