

# 统一混沌系统的投影同步与控制\*

刘 杰<sup>1)†</sup> 陈士华<sup>1)†</sup> 陆君安<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

<sup>2)</sup> (咸宁学院数学系, 咸宁 437005)

(2002 年 10 月 8 日收到, 2002 年 11 月 26 日收到修改稿)

对单向耦合的统一混沌系统间的投影同步进行了研究与控制. 分析了投影同步现象的产生机理, 给出了一方案对投影同步的特征量进行控制. 该方案所需控制代价较小, 为设计适当的混沌信号源提供了一种理论依据. 在利用混沌电路系统进行保密通信方面有着一定的应用前景. 仿真实例表明理论分析的正确性和实际控制方案的有效性.

关键词: 统一混沌系统, 投影同步, 混沌控制, 单向耦合

PACC: 0545

## 1. 引 言

自 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>做出关于耦合混沌系统同步性质研究的开创性工作以来, 混沌系统的同步研究成为热门课题. 现有的文献中, 对混沌系统的同步现象研究大致在以下几个方面: 混沌系统完全(精确)同步(complete synchronization)、混沌系统相同步(phase synchronization)、混沌系统互同步(mutual synchronization)(包括相同混沌振子的互同步、互相耦合的不同混沌系统间的混沌互同步等)、广义混沌同步(generalized synchronization)和混沌系统延迟同步(lag synchronization)等<sup>[2-4]</sup>. 最近, 文献[5-7]讨论了在研究部分线性混沌系统中观察到的一种新的同步现象: 投影同步(projective synchronization), 即在耦合某些部分线性混沌系统时, 在一定条件下, 耦合的主从系统状态的输出不仅相位是锁定的, 而且各对应状态的振幅还按某一比例因子关系演化(类似广义同步的一种特定情形). 但与此同时, 值得注意的是, 这种同步既不同于前述的广义混沌同步的范畴, 因为, 与驱动系统状态保持投影同步的响应系统状态此时并非渐进稳定的<sup>[5,6]</sup>(响应系统最大 Lyapunov 指数仍为正), 它也不同于混沌系统间的相同步, 因为相同步的混沌系统的状态变量振幅一般并不相关, 而投影同步的混沌系统的状态则会保持一定的固定比例关系. 因此, 对此类同步现象的产

生机理及其应用前景的研究将成为混沌系统同步研究的一个新分支. 本文在研究了单向耦合的统一系统的投影同步现象产生机理后, 提出一种基于统一混沌系统内在性质(投影同步)的调整该混沌系统状态输出(振幅)的实用方案. 该方案适用于目前在混沌保密通信中广泛使用的经典 Lorenz 混沌(电路)系统(包括一些改进的 Lorenz 混沌系统)、新近发现的 Chen's 混沌(电路)系统等. 因此, 对基于上述混沌电路系统的许多原有保密通信方案可直接进行改进, 所给调整方案所需物理代价小, 具有良好的应用前景.

## 2. 统一系统的投影同步与控制

统一混沌系统(unified system)的数学模型如下<sup>[8,9]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \frac{\alpha + 8}{3}x_3, \end{cases}$$

其中  $\forall \alpha \in [0, 1]$  为系统参数. 该系统具备一系列良好的性质, 为利用混沌系统进行保密通信等方面的研究提供了又一个具有广泛应用价值的新的混沌模型. 特别地, 该模型仅含一个关键参数, 且通过计算连续 Lyapunov 指数谱发现在给定的参数区间内该

\* 国家自然科学基金(批准号 69874029)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: shcheng@wuhee.edu.cn.

系统均呈现混沌态. 取其参数值的两种极端情形又恰好代表了经典的 Lorenz 混沌系统<sup>[1,9]</sup>和在混沌反控制中发现的 Chen's 混沌系统<sup>[10,11]</sup>. 这两种并不拓扑等价的混沌系统, 这一性质使其可能被广泛地应用于保密通信等领域. 又该系统为部分线性混沌系统<sup>[5,6]</sup>, 即可以改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = M(x_3)x_1, \\ \dot{x}_3 = g(x_1, x_3) \end{cases}$$

形式, 其中

$$M(x_3) = \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10) & (25\alpha + 10) \\ (28 - 35\alpha - x_3) & (29\alpha - 1) \end{pmatrix},$$

$$x = (x_1, x_3)^T.$$

依照如下方式耦合统一系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m} = (25\alpha + 10)(x_{2m} - x_{1m}), \\ \dot{x}_{2m} = (28 - 35\alpha)x_{1m} - x_{1m}x_{3m} + (29\alpha - 1)x_{2m}, \\ \dot{x}_{3m} = x_{1m}x_{2m} - \frac{\alpha + 8}{3}x_{3m}, \\ \dot{x}_{1s} = (25\alpha + 10)(x_{2s} - x_{1s}), \\ \dot{x}_{2s} = (28 - 35\alpha)x_{1s} - x_{1s}x_{3m} + (29\alpha - 1)x_{2s}, \end{cases} \quad (1)$$

定义误差函数  $e_p = x_{1m}x_{2s} - x_{1s}x_{2m}$ , 选取正定 Lyapunov 函数  $V = \frac{1}{2}e_p^2$ , 计算其沿(1)式对时间的导数, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_p \dot{e}_p = e_p [ \dot{x}_{1m}x_{2s} + x_{1m}\dot{x}_{2s} - \dot{x}_{1s}x_{2m} - x_{1s}\dot{x}_{2m} ] \\ &= (4\alpha - 11)e_p^2 = (8\alpha - 22)V, \end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned} V(t) &= V(0)\exp[(8\alpha - 22)t] \rightarrow 0 \\ (t \rightarrow \infty, \forall \alpha \in [0, 1]), \end{aligned}$$

由此可见

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (x_{1m}x_{2s} - x_{1s}x_{2m}) = 0. \quad (2)$$

一般地, 对一定的初始条件, 如果驱动、响应耦合结构混沌系统演化一段时间后, 响应系统与驱动系统的振幅满足  $\|\theta x_m - x_s\| \rightarrow 0$ , 其中  $\theta$  为一常量 (仅依赖于耦合系统的初始条件), 那么就称耦合的两混沌系统间发生了投影同步<sup>[5-7]</sup>.

事实上, 对于统一混沌系统, 引入柱坐标进行分析, 由  $x_1 = r \cos \phi, x_2 = r \sin \phi, x_3 = x_3$ , 代入(2)式有  $\lim_{t \rightarrow \infty} r_s r_m (\cos \phi_m \sin \phi_s - \cos \phi_s \sin \phi_m) = r_s r_m \sin(\phi_s - \phi_m) = 0$ , 由于  $r_s r_m$  不恒等于零, 因而必有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(\phi_s - \phi_m) = 0$  成立. 可见, 耦合系统演化一段时间后, 出现了锁频现象, 即响应系统与驱动系统的相位保持一

致或相差  $K\pi, K \in Z$ . 进一步地, 为排除几种奇异情况, 首先定义(1)  $\theta(t) = r_s/r_m = \infty$ , 当  $r_m = 0, r_s \neq 0$ , (2)  $\theta(t) = r_s/r_m = 0$ , 当  $r_s = 0, r_m \neq 0$  (3) 如  $r_m = 0, r_s = 0, \theta(t)$  为任意值 (后面将发现, 这样定义与整个分析过程并不冲突), 再考察  $\theta(t) = r_s/r_m$  随时间的变化率, 易见

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \theta(\dot{r}_s/r_s - \dot{r}_m/r_m) \\ &= \theta[(54\alpha - 9)\sin(\phi_m + \phi_s) \\ &\quad + (38 - 10\alpha - x_{3m})\cos(\phi_m \\ &\quad + \phi_s)]\sin(\phi_s - \phi_m) \\ &= \theta h(x_{3m}, \phi_m, \phi_s). \end{aligned}$$

注意到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(\phi_s - \phi_m) = 0$ , 显见  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d(r_s/r_m)}{dt} = 0$ , 即响应、驱动系统的“振幅比变化率”趋于零, 亦即“振幅比”趋于常数:  $\lim_{t \rightarrow \infty} r_s/r_m = \bar{\theta}$ , 发生了投影同步. 我们发现此常数因子不可预测, 事实上, 求解关于该比例因子的微分方程, 得

$$\theta(t) = \theta(0)\exp\left(\int_0^t h(x_{3m}, \phi_m, \phi_s) d\tau\right).$$

显然, 由于  $h(x_{3m}, \phi_m, \phi_s)$  含有因子  $\sin(\phi_s - \phi_m)$ , 依上述分析, 随时间演化,  $\sin(\phi_s - \phi_m)$  将趋于零, 亦即响应、驱动系统将在某一临界时刻  $T_c$  处达到相同步, 振幅比稳定在某一固定值, 且此后该值不再发生

变化, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta(0)\exp\left(\int_0^{T_c} h(x_{3m}, \phi_m, \phi_s) d\tau\right) = \theta(0)e^c = \bar{\theta}$ . 由于  $\bar{\theta}$  与混沌驱动信号  $x_{3m}(t)$  及驱动、响应系统的初始值均有密切关系, 因而不可预测, 但进一步的研究已表明该值是可控的.

以下给出对  $\theta(t)$  演化进行控制的一个方案. 为充分利用此类耦合混沌系统间的相同步性质, 可按如下方式控制: 取  $\dot{\theta}(t) = \theta(t)[h(x_{3m}, \phi_m, \phi_s) + \gamma(t)]$ , 设计控制函数如下:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } t < T_c, \\ \epsilon(\theta^* - \theta) & \text{如果 } t \geq T_c, \end{cases}$$

其中  $\bar{\theta}, \theta^*$  分别为施加控制时投影同步形成的振幅比例因子、欲控制到的目标因子值. 在临界时间 (一般可通过数值实验简单估计) 达到后, 由于  $h(x_{3m}, \phi_m, \phi_s) = 0$ , 必有  $\dot{\theta}(t) = \theta(t)[\epsilon(\theta^* - \theta)]$ . 解此方程得到

$$\theta(t) = \theta^* \left[ 1 + \left( \frac{\theta}{\theta^*} - 1 \right) \exp(-\epsilon\theta^*(t - T_c)) \right]^{-1}. \quad (3)$$

将控制策略转化为直角坐标系情形,则达到投影同步后,调整投影同步特征量为  $\theta^*$  的完整控制系统可表述为

$$\begin{cases} \dot{x}_{1m} = (25\alpha + 10\gamma)(x_{2m} - x_{1m}) + \epsilon(x_{1s} - \theta^* x_{1m}), \\ \dot{x}_{2m} = (28 - 35\alpha)x_{1m} - x_{1m}x_{3m} \\ \quad + (29\alpha - 1)x_{2m} + \epsilon(x_{2s} - \theta^* x_{2m}), \\ \dot{x}_{3m} = x_{1m}x_{2m} - \frac{\alpha + 8}{3}x_{3m}, \\ \dot{x}_{1s} = (25\alpha + 10\gamma)(x_{2s} - x_{1s}), \\ \dot{x}_{2s} = (28 - 35\alpha)x_{1s} - x_{1s}x_{3m} + (29\alpha - 1)x_{2s}. \end{cases} \quad (4)$$

由(3)式可见,要达到控制目标,  $\epsilon, \theta^*$  应保持同号。

综上所述,对  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ,按上述方式耦合的统一混沌系统间不仅总存在稳定的投影同步现象发生,而且可以对投影同步比例因子的值进行控制,获得任意比例于原驱动系统混沌输出的混沌信号,从而达到任意调整混沌系统输出信号振幅的目的。

实际应用时,可设计如下调整方案:首先,构造形如(1)式的五维耦合混沌系统观察系统的演化,并估计达到稳定投影同步的临界时刻,记之为  $T_c$ ;然后在  $t \geq T_c$  时,对驱动系统引入反馈控制,得到控制系统(4)式(要求  $\epsilon$  与  $\theta^*$  取值同号);在控制作用下,驱动与响应系统将迅速稳定到新的投影同步,且投影同步的特征量由  $\bar{\theta}$  变为新的设定值  $\theta^*$ ,再记达到新的投影同步时刻为  $T_{cl}$ ;进一步地,如果需要将调整目标变为  $\theta^{**}$ ,则在  $t \geq T_{cl}$  时重复类似的控制过程。

显然,按照上述步骤总可以实现“将原混沌系统的状态输出调整为相位保持一致(同相或反相),振幅变为原来振幅的  $\theta^*$  倍的状态输出”的目标。

### 3. 数值仿真

接下来,给出对统一系统的特款( $\alpha = 1$  时),即混沌系统为新近提出的 Chen's 混沌系统<sup>[9, 13-16]</sup>进行控制的实例,所有数值实验均是基于 Matlab 的龙格-库塔四阶方法进行的,实验中选取的控制参数及初值分别为  $\epsilon = 0.1, \theta^* = 20.0, \theta^{**} = 10.0, X_0 = (x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}, x_{1s}, x_{2s})^T = (-1.0, 1.0, 10.0, 1.0, 2.0)^T; X_0^* = (x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}, x_{1s}, x_{2s})^T = (2.0, 1.0, 10.0, 1.0, 2.0)^T$ 。本文分别给出取不同初值  $X_0, X_0^*$  时最初形成稳定投影同步相应的投影同步比例因子

变化图(图 1 显示未加控制时,耦合系统取不同初值获得不同比例因子,表明了投影同步比例因子的不确定性);取初值  $X_0^*$  时,0—5s 内,耦合系统对应状态输出的变化示意图(图 2),耦合系统演化的平面和空间相图(图 3 和图 4);及以  $X_0^*$  为初值 5s 时刻将投影同步特征量设定为新的特征量  $\theta^* = 20.0$  后,再次形成稳定投影同步相应的投影同步比例因子变化示意图、耦合系统对应状态输出的变化示意图(图 5 和图 6);以及再将投影同步特征量变为另一新的设定量  $\theta^{**} = 10.0$  后,再次形成稳定投影同步的投影同步比例因子变化示意图、耦合系统对应状态输出的变化示意图(图 7 和图 8)。结果表明,每次在新的投影同步实现后(图中分别为 8 和 18s 左右时),如果改变控制器中的设定值  $\theta^*$ ,新的控制目标因子值均能够迅速达到(3s 左右时长)。本处给出的是同相同步,反相的例子可类似地给出。

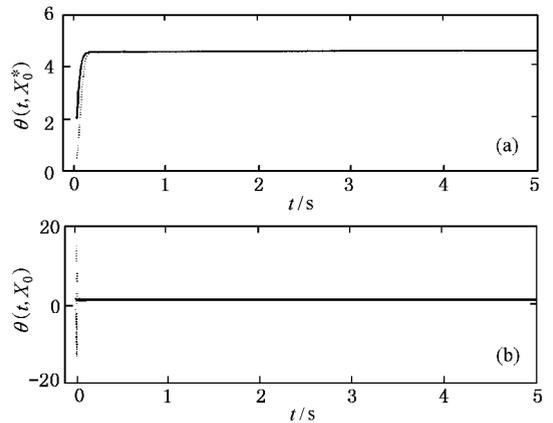


图 1 取不同初值时相应的投影同步比例因子变化

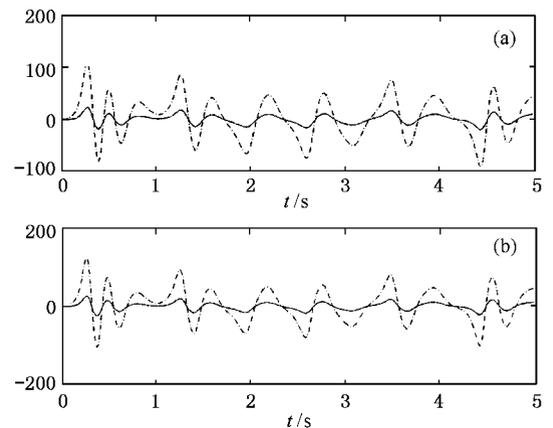


图 2 初值为  $X_0^*$  时对应状态变化 (a)为  $x_{1m}(t), x_{1s}(t)$  (b)为  $x_{2m}(t), x_{2s}(t)$ 。实线为驱动系统,虚线为响应系统

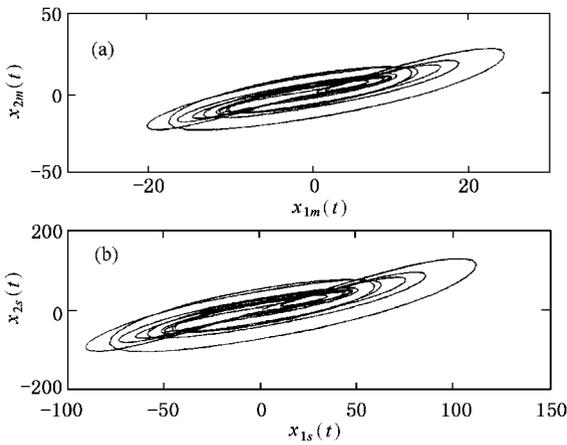


图 3 初值为  $X_0^*$  时 0—5s 内二维相图

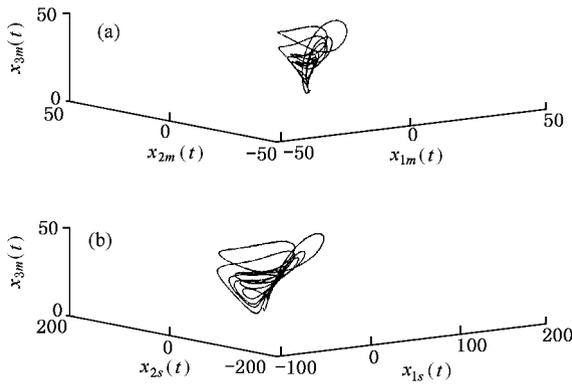


图 4 初值为  $X_0^*$  时 0—5s 内对应空间相图

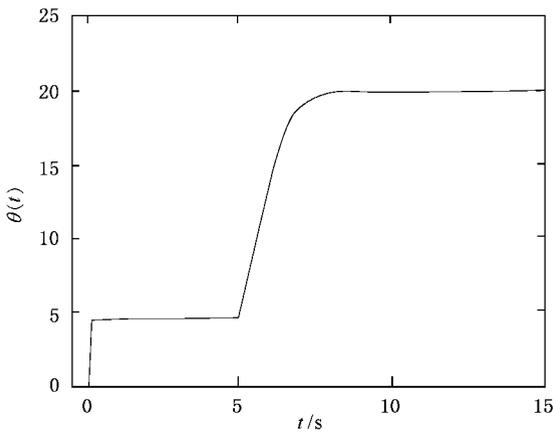


图 5 初值为  $X_0^*$  时控制比例因子到 20 实线为  $x_{1s}(t)$ 、 $x_{1m}(t)$ ; 虚线为  $x_{2s}(t)$ 、 $x_{2m}(t)$

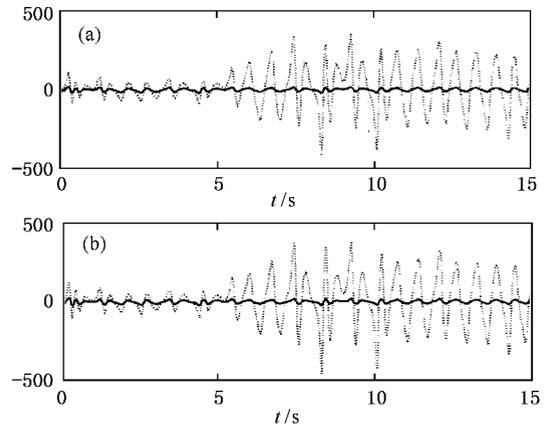


图 6 控制过程 (图 5) 中对应状态变化 (a) 为  $x_{1m}(t)$ 、 $x_{1s}(t)$ ; (b) 为  $x_{2m}(t)$ 、 $x_{2s}(t)$ . 实线为驱动系统; 虚线为响应系统

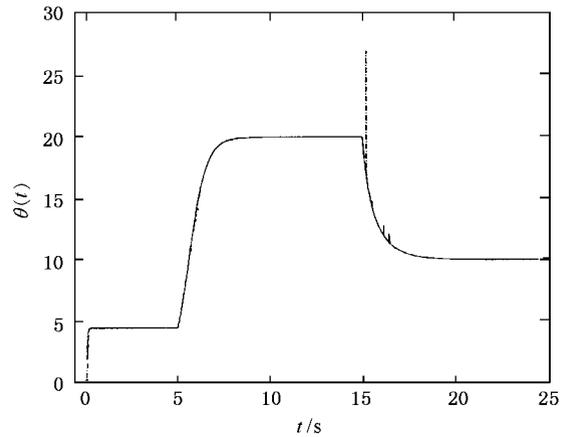


图 7 初值为  $X_0^*$  时先控制比例因子到 20, 再控制到 10 虚线为  $x_{1s}(t)$ 、 $x_{1m}(t)$ ; 实线为  $x_{2s}(t)$ 、 $x_{2m}(t)$

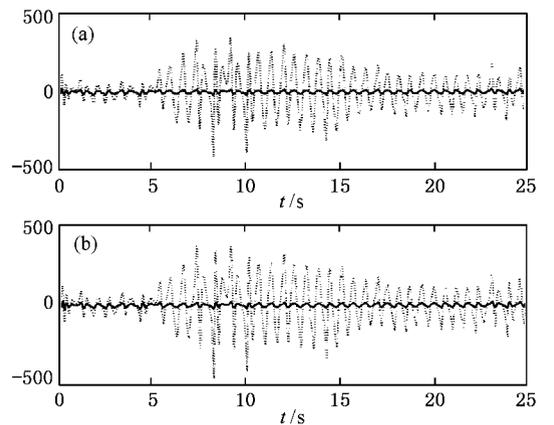


图 8 控制过程 (图 7) 中对应状态变化 (a) 为  $x_{1m}(t)$ 、 $x_{1s}(t)$ ; (b) 为  $x_{2m}(t)$ 、 $x_{2s}(t)$ . 实线为驱动系统; 虚线为响应系统

## 4. 结论与展望

本文对单向耦合后的参数不确定的统一混沌系统间的投影同步现象进行了研究,并对投影同步发生后的响应系统与驱动系统的状态比例因子进行简单控制.该控制方案所需控制代价较小,为设计合适的混沌信号源提供了实用、可靠的理论依据.仿真

实例表明本文所讨论的系统性质及控制方案在利用混沌(电路)系统进行数字信号保密通信方面有多方面的应用前景.本文指出,如果将正、反相投影同步交替使用时可以用于数字信号的加密传输;如果让投影同步的特征量  $\theta^*$  交替变化,也可以将此策略应用于数字信号的加密传输.这方面的研究结果将另文报道.

- [ 1 ] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Zheng Z G *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2320 [ 郑志刚等 2000 物理学报 **49** 2320 ]
- [ 3 ] Chen S H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 [ 陈士华等 2002 物理学报 **51** 749 ]
- [ 4 ] Chen S H, Liu J, Feng J W, Lü J H 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1257
- [ 5 ] Mainieri R and Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [ 6 ] Li Z G and Xu D L 2001 *Phys. Lett. A* **282** 175
- [ 7 ] Xu D L 2001 *Phys. Rev. E* **63** 27201
- [ 8 ] Tao C H *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 [ 陶朝海等 2002 物理学报 **51** 1497 ]
- [ 9 ] Lu J A, Tao C H, Lü J H and Liu M 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 632
- [ 10 ] Ueta T and Chen G 2000 *Int. J. Bifurc. Chaos* **10** 1917
- [ 11 ] Chen G and Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [ 12 ] Wang T B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1851 [ 王铁邦等 物理学报 **50** 1851 ]
- [ 13 ] Chen S H, Liu J, Xie J and Lu J A 2002 *Chin. Phys.* **11** 233
- [ 14 ] Lü J H *et al* 2002 *Chin. Phys.* **11** 12
- [ 15 ] Guan X P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 [ 关新平等 2001 物理学报 **50** 2108 ]
- [ 16 ] Yang L B and Yang T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1039 [ 杨林保、杨 涛 2000 物理学报 **49** 1039 ]

# Projective synchronization in a unified chaotic system and its control<sup>\*</sup>

Liu Jie<sup>1,2)</sup> Chen Shi-Hua<sup>1)</sup> Lu Jun-An<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>( School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China )

<sup>2)</sup>( Department of Mathematics, Xianning College, Xianning 437005, China )

( Received 8 October 2002 ; revised manuscript received 26 November 2002 )

## Abstract

Projective synchronization phenomenon in unidirectionally coupled unified systems is studied. A scheme is proposed to control the scaling factor formed in the projective synchronization. Under the control strategy, one can arbitrarily manipulate the scaling factor to a desired value. This special phenomenon and the control scheme can be used in some secure communication schemes. Illustrations are also given to show the rightness of the theoretical analysis and the effectiveness of the method proposed.

**Keywords** : unified chaotic system, projective synchronization, chaos control, unidirectional-couple

**PACC** : 0545

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 69874029 ).