

时滞双向联想记忆神经网络的全局稳定性*

张 强¹⁾ 高 琳¹⁾ 王 超¹⁾ 许 进²⁾

¹⁾ 西安电子科技大学电子工程研究所, 西安 710071)

²⁾ 华中科技大学控制科学与工程系, 武汉 430074)

(2002 年 5 月 19 日收到, 2002 年 11 月 26 日收到修改稿)

通过构造一个合适的 Lyapunov 泛函及应用不等式的分析技巧研究了具有时滞的双向联想记忆神经网络的平衡点的全局稳定性问题. 在对神经元激励函数较宽松的假设条件下(可以不满足 Lipschitz 条件), 获得了一个新的保证全局渐近稳定性的判定准则. 结果可应用于包含非 Lipschitz 的一类更加广泛的神经元激励函数的神经网络的设计中.

关键词: Lyapunov 泛函, 时滞, 双向联想记忆神经网络, 全局渐近稳定性

PACC: 0545

1. 引 言

近些年来, 人们提出了许多种神经网络模型并且深入地研究了它们的动态特性^[1-5, 8-11]. 其中, 联想记忆网络是一种常用的模型, 具有信息记忆和信息联想的特点. 由于信息的分布式存储, 利用适当的编码方法可实现有效的异联想, 该模型能够从一个不完整的或模糊的模式中联想出存储在记忆中的某个完整的清晰的模式. 目前已经涌现了各种联想记忆神经网络模型. 1987 年 Kosko^[1]将单层单向联想记忆网络推广到一种双层双向结构, 即双向联想记忆(BAM)网络, 并证明了其稳定性. 由于这种网络在模式识别、联想记忆等方面良好的应用潜力, 从那时起, 人们对 BAM 网络的稳定性做了大量研究, 获得了一些有意义的结果. 在神经网络的硬件实现时, 由于组成神经元的核心部件——放大器的开关速度有限以及神经元之间信号传递的时延, 因而不可避免地存在时滞, 而时滞的存在可能导致网络不稳定. 因而研究具有时滞的 BAM 网络的稳定性对于硬件实现有重要意义. 目前对于具有时滞的 BAM 网络的稳定性研究较少^[1-4], 而且基本上都是在假设神经元的激励函数满足 Lipschitz 条件下进行的. 然而, 生物

神经网络中存在一些脉动现象, 这些脉动信号不满足 Lipschitz 条件, 例如^[5]人体血液循环中突发的指数加权平均的阶跃信号等. 此时, 已有的结论不再适用. 本文即针对具有这种脉动特性的神经网络模型讨论其平衡点的全局渐近稳定性问题, 它不仅对 BAM 网络的系统综合具有重要意义, 而且对于 BAM 网络的理论及应用也具有重要影响.

2. 模型描述

具有时滞的 BAM 神经网络的数学模型可用下述时延微分方程描述^[2]:

$$\begin{aligned} u'_i(t) &= -c_i u_i(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j(v_j(t - \tau_{ij})) + I_i, \\ & i = 1, 2, \dots, n, \\ v'_j(t) &= -d_j v_j(t) + \sum_{i=1}^n b_{ji} g_i(u_i(t - \sigma_{ji})) + J_j, \\ & j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

或者等价地

$$\begin{aligned} u'(t) &= -Cu(t) + Af(u(t - \tau)) + I, \\ v'(t) &= -Dv(t) + Bg(v(t - \sigma)) + J, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $C = \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$, $c_i > 0$, $d_j > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$), u

* 国家自然科学基金(批准号 69971018 和 60071026)资助的课题.

$= (u_1, u_2, \dots, u_n)^T, v = (v_1, v_2, \dots, v_m)^T$ 为神经元的状态, $A = (a_{ij})_{n \times m}, B = (b_{ji})_{m \times n}$ 为神经元之间的连接权矩阵, I, J 为外部输入,

$$f(u) = (f_1(u_1), f_2(u_2), \dots, f_n(u_n))^T,$$

$$g(v) = (g_1(v_1), g_2(v_2), \dots, g_m(v_m))^T$$

表示神经元的激励函数. 系统 (1) 的初始条件为

$$u_i(s) = x_i(s), \quad s \in [-\sigma, 0],$$

$$\sigma = \max\{\sigma_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$v_j(s) = y_j(s), \quad s \in [-\tau, 0],$$

$$\tau = \max\{\tau_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

其中假设函数 $x_i \in C[-\sigma, 0], R, \forall i = 1, 2, \dots, n$

以及 $y_j \in C[-\tau, 0], R, \forall j = 1, 2, \dots, m$.

定义 向量 $(u^*, v^*) = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*, v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*)$ 称为系统 (1) 的一个平衡点, 如果下面的方程成立:

$$c_i u_i^* = \sum_{j=1}^m a_{ij} f_j(v_j^*) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$d_j v_j^* = \sum_{i=1}^n b_{ji} g_i(u_i^*) + J_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

设 (u^*, v^*) 为系统 (1) 的一个平衡点, 利用坐标变换 $x(t) = u(t) - u^*, y(t) = v(t) - v^*$, 系统 (1) 可以写为

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m a_{ij} \varphi_j(y_j(t - \tau_{ij})),$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

$$y'_j(t) = -d_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n b_{ji} \psi_i(x_i(t - \sigma_{ji})),$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

其中

$$\varphi_j(y_j) = f_j(y_j + v_j^*) - f_j(v_j^*), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$\psi_i(x_i) = g_i(x_i + u_i^*) - g_i(u_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

显然 $(0, 0, \dots, 0)$ 是系统 (3) 的一个平衡点且系统 (1) 稳定当且仅当系统 (3) 稳定.

本文对 $\varphi_j, \psi_i (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$ 作以下假设:

(H)

$$y_j \varphi_j(y_j) > \alpha (y_j \neq 0);$$

$$x_i \psi_i(x_i) > \alpha (x_i \neq 0),$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m;$$

$$m_j = \sup_{y_j \neq 0} \frac{\varphi_j(y_j)}{y_j},$$

$$n_i = \sup_{x_i \neq 0} \frac{\psi_i(x_i)}{x_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m,$$

其中用假设 (H) 来代替目前大多数文献中所要求的可导性^[2]假设或者满足 Lipschitz 条件^[3]假设, 值得注意的是 (H) 要弱于 Lipschitz 假设, 而且当函数 φ_j, ψ_i 满足 Lipschitz 条件时, m_j, n_i 可分别用相应的 Lipschitz 常数来替代. 有关方程 (1) 在这类函数下解的性质可参见文献 [5].

3. 全局稳定性分析

在进行稳定性分析之前, 先将有关引理阐述如下:

引理^[6] 设 $a_k \geq 0, p_k > \alpha (k = 1, 2, \dots, m+1), r > 0, P_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} p_k$, 则有以下不等式成立:

$$\left(\prod_{k=1}^{m+1} a_k^{p_k}\right)^{1/P_{m+1}} \leq \left(\sum_{k=1}^{m+1} p_k a_k^r\right)^{1/r} P_{m+1}^{-1/r}. \quad (4)$$

在不等式 (4) 中, 令 $P_{m+1} = 1, r = P_{m+1} = \sum_{k=1}^m p_k + 1$, 则有不等式 (5) 成立:

$$\left(\prod_{k=1}^m a_k^{p_k}\right) a_{m+1} \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^m p_k a_k^r\right) + \frac{1}{r} a_{m+1}^r. \quad (5)$$

定理 系统 (1) 的平衡点是全局渐近稳定的, 若激励函数满足假设 (H) 且存在实常数 $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \xi_{ij}, \eta_{ij} (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m), p_k > \alpha (k = 1, 2, \dots, L_1), q_k > \alpha (k = 1, 2, \dots, L_2), \omega_i > 0, \gamma_j > \alpha (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m)$ 使得下列不等式成立:

$$\begin{aligned} & -c_i \omega_i + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{L_1} \omega_i p_k m_j^{r_{ij}/p_k} |a_{ij}|^{r_{ij}/p_k} \right. \\ & \left. + \gamma_j n_i^{\xi_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} \right) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & -d_j \gamma_j + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{L_2} \gamma_j q_k n_i^{\xi_{ij}^*/q_k} |b_{ji}|^{r_{ij}^*/q_k} \right. \\ & \left. + \omega_i m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} \right) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

其中

$$r = \sum_{k=1}^{L_1} p_k + 1 = \sum_{k=1}^{L_2} q_k + 1,$$

$$L_1 \alpha_{ij} + \alpha_{ij}^* = 1, \quad L_1 \beta_{ij} + \beta_{ij}^* = 1,$$

$$L_2 \xi_{ij} + \xi_{ij}^* = 1, \quad L_2 \eta_{ij} + \eta_{ij}^* = 1,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m.$$

证明 由系统 (3) 可知

$$\begin{aligned}
D^+ |x_i(t)| &\leq -c_i |x_i(t)| \\
&+ \sum_{j=1}^m |a_{ij}| m_j |y_j(t - \tau_{ij})|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
D^+ |y_j(t)| &\leq -d_j |y_j(t)| \\
&+ \sum_{i=1}^n |b_{ji}| n_i |x_i(t - \sigma_{ji})|, \quad j = 1, 2, \dots, m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times |a_{ij}|^{r_{ij}^*} \int_{t-\tau_{ij}}^t |y_j(s)|^r ds \Big\} \\
&+ \sum_{j=1}^m \gamma_j \left\{ \frac{1}{r} |y_j(t)|^r + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n n_i^{r_{ij}^*} \right. \\
&\times |b_{ji}|^{r_{ij}^*} \int_{t-\sigma_{ji}}^t |x_i(s)|^r ds \Big\}.
\end{aligned}$$

估计上式沿方程(3)的解的导数为

其中 D^+ 表示右上导数. 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V(x, y, \chi(t)) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \frac{1}{r} |x_i(t)|^r + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m m_j^{r_{ij}^*} \right.$$

$$\begin{aligned}
D^+ V(x, y, \chi(t)) &= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ |x_i(t)|^{r-1} D^+ |x_i(t)| + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} (|y_j(t)|^r - |y_j(t - \tau_{ij})|^r) \right\} \\
&+ \sum_{j=1}^m \gamma_j \left\{ |y_j(t)|^{r-1} D^+ |y_j(t)| + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n n_i^{r_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} (|x_i(t)|^r - |x_i(t - \sigma_{ji})|^r) \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ -c_i |x_i(t)|^r + \sum_{j=1}^m m_j |a_{ij}| |x_i(t)|^{r-1} |y_j(t - \tau_{ij})| + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} \right. \\
&\times (|y_j(t)|^r - |y_j(t - \tau_{ij})|^r) \Big\} + \sum_{j=1}^m \gamma_j \left\{ -d_j |y_j(t)|^r + \sum_{i=1}^n n_i |b_{ji}| |y_j(t)|^{r-1} |x_i(t - \sigma_{ji})| \right. \\
&+ \left. \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n n_i^{r_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} (|x_i(t)|^r - |x_i(t - \sigma_{ji})|^r) \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ -c_i |x_i(t)|^r + \sum_{j=1}^m \prod_{k=1}^{L_1} (m_j^{r_{ij}^* / p_k} |a_{ij}|^{r_{ij}^* / p_k} |x_i(t)|)^{p_k} m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} |y_j(t - \tau_{ij})| \right. \\
&+ \left. \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} (|y_j(t)|^r - |y_j(t - \tau_{ij})|^r) \right\} \\
&+ \sum_{j=1}^m \gamma_j \left\{ -d_j |y_j(t)|^r + \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^{L_2} (n_i^{r_{ij}^* / q_k} |b_{ji}|^{r_{ij}^* / q_k} |y_j(t)|)^{q_k} n_i^{r_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} |x_i(t - \sigma_{ji})| \right. \\
&+ \left. \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n n_i^{r_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} (|x_i(t)|^r - |x_i(t - \sigma_{ji})|^r) \right\}.
\end{aligned}$$

由不等式(5),有

$$\begin{aligned}
D^+ V(x, y, \chi(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ -c_i |x_i(t)|^r + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} (|y_j(t)|^r - |y_j(t - \tau_{ij})|^r) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{L_1} p_k m_j^{r_{ij}^* / p_k} |a_{ij}|^{r_{ij}^* / p_k} |x_i(t)|^r + m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} |y_j(t - \tau_{ij})|^r \right) \right\} \\
&+ \sum_{j=1}^m \gamma_j \left\{ -d_j |y_j(t)|^r + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n n_i^{r_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} (|x_i(t)|^r - |x_i(t - \sigma_{ji})|^r) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{L_2} q_k n_i^{r_{ij}^* / q_k} |b_{ji}|^{r_{ij}^* / q_k} |y_j(t)|^r + n_i^{r_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} |x_i(t - \sigma_{ji})|^r \right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ -c_i |x_i(t)|^r + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{L_1} p_k m_j^{r_{ij}^* / p_k} |a_{ij}|^{r_{ij}^* / p_k} |x_i(t)|^r + m_j^{r_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{ij}^*} |y_j(t - \tau_{ij})|^r \right) \right\} \\
&+ \sum_{j=1}^m \gamma_j \left\{ -d_j |y_j(t)|^r + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{L_2} q_k n_i^{r_{ij}^* / q_k} |b_{ji}|^{r_{ij}^* / q_k} |y_j(t)|^r + n_i^{r_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{ij}^*} |x_i(t - \sigma_{ji})|^r \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -c_i \omega_i + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{L_1} \omega_i p_k m_j^{\alpha_{ij}^* / p_k} |a_{ij}|^{r_{\beta_{ij}^* / p_k}} + \gamma_j n_i^{\xi_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{\eta_{ij}^*}} \right) \right\} |x_i(t)|^r \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \left\{ -d_j \gamma_j + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{L_2} \gamma_j q_k n_i^{\xi_{ij}^* / q_k} |b_{ji}|^{r_{\eta_{ij}^* / q_k}} + \omega_i m_j^{\alpha_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{\beta_{ij}^*}} \right) \right\} |y_j(t)|^r \\
&\leq -\mu \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^r - \lambda \sum_{j=1}^m |y_j(t)|^r,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
-\mu &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ -c_i \omega_i + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{L_1} \omega_i p_k m_j^{\alpha_{ij}^* / p_k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times |a_{ij}|^{r_{\beta_{ij}^* / p_k}} + \gamma_j n_i^{\xi_{ij}^*} |b_{ji}|^{r_{\eta_{ij}^*}} \right) \right\}, \\
-\lambda &= \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ -d_j \gamma_j + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{L_2} \gamma_j q_k n_i^{\xi_{ij}^* / q_k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times |b_{ji}|^{r_{\eta_{ij}^* / q_k}} + \omega_i m_j^{\alpha_{ij}^*} |a_{ij}|^{r_{\beta_{ij}^*}} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

根据泛函微分方程中的 Lyapunov 型判稳定理,例如参见文献 [7],可知系统 (3) 的平衡点是全局渐近稳定的,即系统 (1) 的平衡点是全局渐近稳定的.

推论 若下列条件之一满足,则系统 (1) 的平衡点是全局渐近稳定的:

- (a) $\sum_{j=1}^m (m_j |a_{ij}|) \mathfrak{Y} + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{\omega_i} < 2c_i,$
 $\sum_{i=1}^n (n_i |b_{ji}|) \mathfrak{Y} + \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\gamma_j} < 2d_j;$
- (b) $L \sum_{j=1}^m (m_j |a_{ij}|) + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{\omega_i} (n_i |b_{ji}|) < (L+1)c_i,$
 $L \sum_{i=1}^n (n_i |b_{ji}|) + \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\gamma_j} (m_j |a_{ij}|) < (L+1)d_j;$
- (c) $\sum_{j=1}^m (m_j^{2\alpha_{ij}^*} |a_{ij}|^{2\beta_{ij}^*}) + \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{\omega_i} (n_i^{2\xi_{ij}^*} |b_{ji}|^{2\eta_{ij}^*}) < 2c_i,$
 $\sum_{i=1}^n (n_i^{2\xi_{ij}^*} |b_{ji}|^{2\eta_{ij}^*}) + \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{\gamma_j} (m_j^{2\alpha_{ij}^*} |a_{ij}|^{2\beta_{ij}^*}) < 2d_j,$

其中

$$\begin{aligned}
L_1 \alpha_{ij} + \alpha_{ij}^* &= 1, & L_1 \beta_{ij} + \beta_{ij}^* &= 1, \\
L_2 \xi_{ij} + \xi_{ij}^* &= 1, & L_2 \eta_{ij} + \eta_{ij}^* &= 1, \\
i &= 1, 2, \dots, n, & j &= 1, 2, \dots, m;
\end{aligned}$$

- (d) $-c_i \omega_i + \sum_{j=1}^m \gamma_j n_i |b_{ji}| < 0,$
 $-d_j \gamma_j + \sum_{i=1}^n \omega_i m_j |a_{ij}| < 0;$

$$\begin{aligned}
(e) \quad \Delta_1 &= \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{m_j}{d_j} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} < 1, \\
\Delta_2 &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{n_i}{c_i} \sum_{j=1}^m |b_{ji}| \right\} < 1.
\end{aligned}$$

证明 在定理中分别令

- a) $p_k = \frac{1}{L_1} (k = 1, 2, \dots, L_1),$
 $q_k = \frac{1}{L_2} (k = 1, 2, \dots, L_2),$
 $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \frac{1}{L_1}, \quad \xi_{ij} = \eta_{ij} = \frac{1}{L_2};$
- b) $L_1 = L_2 = L, \quad p_k = q_k = 1,$
 $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = \xi_{ij} = \eta_{ij} = \frac{1}{L+1};$
- c) $L_1 = L_2 = 1, \quad p_k = q_k = 1;$
- d) $r = 1, \quad \alpha_{ij}^* = \beta_{ij}^* = \xi_{ij}^* = \eta_{ij}^* = 1,$
 规定 $0/0 = 0;$
- e) 在推论 (d) 中令 $\omega_i = 1 (i = 1, 2, \dots, n),$
 $\gamma_j = 1 (j = 1, 2, \dots, m).$

即可获得结论.

注: 若神经元的激励函数满足 Lipschitz 条件,则推论 (d) 成为文献 [3] 的定理 3.2;若神经元的激励函数可导,则推论 (e) 成为文献 [4] 的定理 1.

4. 例子

下面给出一个例子来验证本文结论的正确性.考虑由 (1) 式定义的时滞 BAM 神经网络:

$$\begin{aligned}
u'_1(t) &= -c_1 u_1(t) + a_{11} f_1(v_1(t - \tau_{11})) \\
&\quad + a_{12} f_2(v_2(t - \tau_{12})) + I_1, \\
u'_2(t) &= -c_2 u_2(t) + a_{21} f_1(v_1(t - \tau_{21})) \\
&\quad + a_{22} f_2(v_2(t - \tau_{22})) + I_2, \\
v'_1(t) &= -d_1 v_1(t) + b_{11} g_1(u_1(t - \sigma_{11})) \\
&\quad + b_{12} g_2(u_2(t - \sigma_{12})) + J_1, \\
v'_2(t) &= -d_2 v_2(t) + b_{21} g_1(u_1(t - \sigma_{21})) \\
&\quad + b_{22} g_2(u_2(t - \sigma_{22})) + J_2. \tag{6}
\end{aligned}$$

在系统(6)中函数 f_1, f_2 取为

$$f_i(t) = \int_{-\infty}^t h_i(s) e^{s-t} ds \quad (i = 1, 2),$$

其中 $h_i(s)$ 为阶跃信号, 函数 g_1, g_2 都为 $S(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$. 显然, 函数 f_1, f_2 不满足 Lipschitz 条件, 因此, 现有文献中的结论无法判别系统(6)的稳定性.

另一方面, 易知此时 $m_i = 1, n_i = \frac{1}{4}$ (6) 式中各参数如下:

$$\begin{aligned} d_1 &= 2.5, & d_2 &= 4, \\ c_1 &= 0.5, & c_2 &= 1, \\ I_1 &= 2, & I_2 &= -5, \\ J_1 &= 1.5, & J_2 &= 3, \\ A &= \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.5 & -2 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ -0.2 & 1.5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

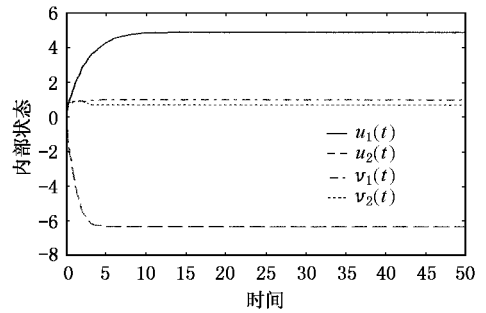
容易验证, 在上述参数下, 推论(e)中 $\Delta_1 = 0.8 < 1, \Delta_2 = 0.6 < 1$. 因此(6)式的平衡点是全局渐近稳定的.

下面给出系统(6)的计算机仿真结果. 在以下仿真中, 取初始条件为 $u_1(0) = u_2(0) = 0.1, v_1(0) = v_2(0) = 0.2$. 系统(6)的平衡点满足下列非线性方程:

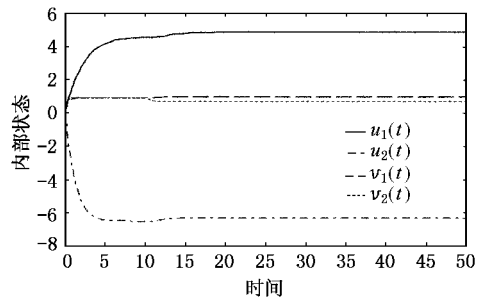
$$\begin{aligned} 0.5u_1^* &= 1.5f_1(v_1^*) - f_2(v_2^*) + 2, \\ u_2^* &= -0.5f_1(v_1^*) - 2f_2(v_2^*) - 5, \\ 2.5v_1^* &= g_1(u_1^*) + 0.5g_2(u_2^*) + 1.5, \\ 4v_2^* &= -0.2g_1(u_1^*) + 1.5g_2(u_2^*) + 3. \end{aligned}$$

利用 Matlab 5.3 软件中的优化工具箱求解上式, 可得系统(6)具有唯一的平衡点为(保留到四位小数) $(u_1^*, u_2^*, v_1^*, v_2^*)^T = (4.8855, -6.3235, 0.9974, 0.7010)^T$.

使用四阶 Runge-Kutta 法求解(6)式, 结果如图1所示. 图1(a)中时滞取为 $\tau_{ij} = 1, \sigma_{ij} = 2 (i = 1, 2, j = 1, 2)$. 图1(b)中时滞取为 $\tau_{ij} = 1, \sigma_{ij} = 10 (i = 1, 2, j = 1, 2)$.



(a) $\tau_{ij} = 1, \sigma_{ij} = 2$



(b) $\tau_{ij} = 1, \sigma_{ij} = 10$



图1 系统(6)的状态演化图

5. 结 论

研究表明, 生物体中存在大量的脉动现象, 例如心脏跳动、血液循环、脉冲频率的调节以及生物种群的生长等. 这种具有脉动信号的神经网络的动态特性不能用现有的结论来刻画. 基于这一考虑, 本文对时滞双向联想记忆神经网络的全局稳定性进行了分析, 在神经元激励函数更宽泛的假设下(例如可以包括脉冲信号的指数加权平均, 而它不满足 Lipschitz 条件), 获得了一个新的确保稳定性的充分条件, 由于含有许多可调参数, 因而应用范围更广、更灵活, 现有文献中已有的一些结论可以作为本文的特例, 数值仿真的例子证明了本文结论的正确性.

- [1] Kosko B 1987 *Appl. Opt.* **26** 4947
- [2] Liao X *et al* 1998 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **26** 219
- [3] Zhang J *et al* 2001 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **29** 185
- [4] Gopalsamy K *et al* 1994 *IEEE Trans. Neural Networks* **5** 998
- [5] Kosko B 1994 *Neural Networks and Fuzzy Systems—A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence* (New Delhi : Prentice-Hall of India)
- [6] Hardy G H , Littlewood J E and Polya G 1952 *Inequalities* 2nd ed (London : Cambridge University Press)
- [7] Hale J 1977 *Theory of Functional Differential Equations* (New York : Springer)
- [8] Wang H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2303 (in Chinese) 王宏霞等 2001 物理学报 **50** 2303]
- [9] He G *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2103 (in Chinese) 何国光等 2001 物理学报 **50** 2103]
- [10] Li L *et al* 2001 *Chin. Phys.* **10** 796
- [11] Zhang Q *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 22

Global stability of bidirectional associative memory neural networks with delays *

Zhang Qiang¹⁾ Gao Lin¹⁾ Wang Chao¹⁾ Xu Jin²⁾

¹⁾ *Institute of Electronic Engineering , Xidian University , Xi 'an 710071 , China)*

²⁾ *Department of Control Science and Engineering , Huazhong University of Science and Technology , Wuhan 430074 , China)*

(Received 19 May 2002 ; revised manuscript received 26 November 2002)

Abstract

The stability of the equilibrium point of bidirectional associative memory (BAM) neural networks with delays is studied by constructing a suitable Lyapunov functional and combining with some inequality analysis techniques. On the assumption that the activation functions of neurons are less restrictive than those in the literature (which may not satisfy Lipschitz condition) , a new sufficient condition ensuring the global asymptotic stability of BAM neural networks with delays is derived. The results presented here can be applied to the design of a wider class of neural networks including non-Lipschitz activation functions of neurons.

Keywords : Lyapunov functional , delays , bidirectional associative memory neural networks , global asymptotic stability

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 69971018 and 60071026).