第 52 卷 第 8 期 2003 年 8 月
1000-3290/2003/52(08)/1827-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52, No.8, August, 2003

高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程的孤波解*

赵熙强[1)2)] 唐登斌[1)] 王利民[2)] 张耀明[2)]

[1)] (南京航空航天大学空气动力学系，南京 210016)

[2)] (山东理工大学，淄博 255049)

(2002 年 11 月 1 日收到；2002 年 12 月 13 日收到修改稿)

利用一个简单的变换将高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程变为一个简单的方程，并且结合齐次平衡法给出了高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程的一些新的孤子解. 这一方法可应用于其他非线性物理模型.

关键词：Broer-Kaup 方程，(2+1)维，孤子解，齐次平衡法

PACC：0230，0340

1. 引 言

寻求非线性演化方程的精确解在非线性问题中占有十分重要的地位. 目前已创立了许多行之有效的方法，如逆散射变换法、双线性方法、Bäcklund 和 Darboux 变换法、对称约化法及齐次平衡法等，其中齐次平衡法[1—11]提供了一种构造非线性演化模型精确解的便利的分析方法，是一种十分有效的新方法. 本文利用一个简单的变换并结合齐次平衡法研究了高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程[7,11—16]

$$H_{ty} = H_{xxy} - 2(HH_x)_y - 2G_{xx}, \tag{1}$$

$$G_t = -G_{xx} - 2(GH)_x \tag{2}$$

的精确解.

方程(1)和(2)是经过对称约化从 KP 方程中约化得到的[13]，它在统计物理、非线性光纤通讯、等离子体物理等许多领域有着广泛的应用，它丰富的局域相干结构[7]、Painlevé 性质和具有任意时间变量 t 或空间变量 y 的无穷多对称[13]已被讨论过.

2. 经一个简单变换求精确解

为了求解方程(1)和(2)，作变换

$$G = aH_y + b, \tag{3}$$

式中 a 和 b 为待定系数.

将(3)式代入方程(1)和(2)，整理后分别得

$$H_{ty} = (1-2a)H_{xxy} - 2(HH_x)_y, \tag{4}$$

$$aH_{ty} = -aH_{xxy} - 2a(HH_y)_x - 2bH_x. \tag{5}$$

令 $\frac{1}{a} = \frac{1-2a}{-a} = \frac{-2}{-2a}$，$b=0$，即 $a=1$，$b=0$ 时，若函数 H 满足下列方程：

$$H_{xx} + 2HH_x + H_t = 0, \tag{6}$$

则方程(4)和方程(5)成立. 由此可知，只要求出方程(6)的精确解，然后利用(3)式即可得到高阶(2+1)维 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的精确解.

设

$$H = H(\xi), \qquad \xi = kx + ly + ct + d, \tag{7}$$

式中 k, l, c, d 为常数. 将(7)式代入方程(6)得

$$k^2 H'' + 2kHH' + cH' = 0 \qquad \left(H' = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi}\right). \tag{8}$$

(i) 设方程(8)有解 $H = \sum_{i=0}^{n} a_i \tanh^i \xi$，平衡次数可知 $n=1$，从而 $H = a_0 + a_1 \tanh \xi$，代入方程(8)，计算并得到精确解 $H = -\frac{c}{2k} + k\tanh\xi$，再利用(3)式得到 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的孤波解，

$$H = -\frac{c}{2k} + k\tanh(kx + ly + ct + d), \tag{9}$$

$$G = kl\,\mathrm{sech}^2(kx + ly + ct + d). \tag{10}$$

(ii) 设方程(8)有解[7]

$$H = \sum_{i=0}^{m} (a_i f^i + b_i f^{i-1} g),$$

式中 $f(\xi) = \frac{1}{\cosh\xi + r}$，$g(\xi) = \frac{\sinh\xi}{\cosh\xi + r}$，$\xi = kx +$

* 国家自然科学基金(批准号：19972026，10272068)资助的课题.

$ly+ct+d$，r 为常数，则

$$f'(\xi)=-f(\xi)g(\xi),$$
$$g'(\xi)=1-g^2(\xi)-rf(\xi),$$
$$g^2(\xi)=1-2rf(\xi)+(r^2-1)f^2(\xi),\tag{11}$$

平衡方程(8)中项 H' 与 HH' 得 $n=1$，即取

$$H=a_0+a_1f+b_1g.\tag{12}$$

将(12)式代入(8)式，用(11)式整理并借助 Mathematica计算得到(8)式的一个解

$$H=-\frac{c}{2k}+\frac{k}{2}\frac{\sinh\xi}{\cosh\xi+1},\tag{13}$$

再由(3)式得 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的一组精确解

$$H=-\frac{c}{2k}+\frac{k}{2}\frac{\sinh(kx+ly+ct+d)}{\cosh(kx+ly+ct+d)+1},\tag{14}$$

$$G=\frac{kl}{2}\frac{\cosh(kx+ly+ct+d)}{[\cosh(kx+ly+ct+d)+1]^2}.\tag{15}$$

(iii)设方程(8)有解[10]

$$H=B_0+\frac{B\exp(b\xi)}{1+\exp(a\xi)},\tag{16}$$

式中 a,b,B,B_0 为待定常数.

将(16)式代入方程(8)，经过计算并利用(3)式，得到 Broer-Kaup 方程(1)和(2)下列两组孤波解：

$$H=B_0-\frac{1}{k}(2B_0k+c)\frac{1}{1+\exp\left[\frac{1}{k^2}(2B_0k+c)(kx+ly+ct+d)\right]},\tag{17}$$

$$G=\frac{l(2B_0k+c)^2}{k^3}\frac{\exp\left[\frac{1}{k^2}(2B_0k+c)(kx+ly+ct+d)\right]}{\left\{1+\exp\left[\frac{1}{k^2}(2B_0k+c)(kx+ly+ct+d)\right]\right\}^2}\tag{18}$$

和

$$H=-\frac{2B_0k+c}{2k}\tanh\left[-\frac{2B_0k+c}{2k^2}(kx+ly+ct+d)\right]-\frac{c}{2k},\tag{19}$$

$$G=\frac{(2B_0k+c)^2l}{4k^3}\operatorname{sech}^2\left[-\frac{2B_0k+c}{2k^2}(kx+ly+ct+d)\right],\tag{20}$$

其中 $B_0,k\neq0,l,c,d$ 为任意常数.

(iv)设方程(8)有解[4]

$$H=\sum_{i=0}^{n}a_i\eta^i,$$

式中

$$\eta'=\lambda+\eta^2.\tag{21}$$

通过平衡 H'' 与 HH' 得 $n=1$，故设

$$H=a_0+a_1\eta.\tag{22}$$

将(22)式代入方程(8)，比较系数得 $a_0=-\frac{c}{2k}$，$a_1=-k$.而 Riccati 方程(21)有解，

$$\eta=\begin{cases}-\sqrt{-\lambda}\tanh(\sqrt{-\lambda}\xi), & \lambda<0,\\ -\frac{1}{\xi}, & \lambda=0,\\ \sqrt{\lambda}\tan(\sqrt{\lambda}\xi), & \lambda>0.\end{cases}$$

再由(3)式得到下列 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的精确行波解：

当 $\lambda<0$ 时，

$$H=-\frac{c}{2k}+k\sqrt{-\lambda}\tanh[\sqrt{-\lambda}(kx+ly+ct+d)],\tag{23}$$

$$G=-kl\lambda\operatorname{sech}^2(\sqrt{-\lambda}(kx+ly+ct+d)].\tag{24}$$

特别当 $\lambda=-1$，(23)和(24)式分别为(9)和(10)式.

当 $\lambda=0$ 时，

$$H=-\frac{c}{2k}+\frac{k}{kx+ly+ct+d},\tag{25}$$

$$G=-\frac{kl}{(kx+ly+ct+d)^2}.\tag{26}$$

当 $\lambda>0$ 时，

$$H=-\frac{c}{2k}-k\sqrt{\lambda}\tan[\sqrt{\lambda}(kx+ly+ct+d)],\tag{27}$$

$$G=-kl\lambda\sec^2[\sqrt{\lambda}(kx+ly+ct+d)].\tag{28}$$

3．Broer-Kaup 方程的线性化

设

$$H=\frac{\partial}{\partial x}f(\omega)+u(x,y,t),\tag{29}$$

式中 $f(\omega)$，$u(x,y,t)$为待定函数.

将(29)式代入方程(6),整理后得到

$$\begin{aligned} & H_{xx} + 2HH_x + H_t \\ = & (f''' + 2f'f'')\omega_x^3 + f''(\omega_t\omega_x \\ & + 3\omega_x\omega_{xx} + 2u\omega_x^2) + 2(f')^2\omega_x\omega_{xx} \\ & + f'(\omega_{xt} + \omega_{xxx} + 2\omega_x u_x + 2u\omega_{xx}) \\ & + u_t + u_{xx} + 2uu_x \\ = & 0. \end{aligned} \tag{30}$$

在(30)式中,令 ω_x^3 的系数为零,得

$$f''' + 2f'f'' = 0. \tag{31}$$

由方程(31)可得一特解

$$f = \ln \omega. \tag{32}$$

由此可知,当 $u=0$ 时,(29)式就是 Burger 方程的 Hopf-Cole 变换,并且 $f''=-(f')^2$,此时方程(30)变为

$$\begin{aligned} & f''(\omega_t\omega_x + \omega_x\omega_{xx} + 2u\omega_x^2) \\ & + f'(\omega_{xt} + \omega_{xxx} + 2\omega_x u_x + 2u\omega_{xx}) \\ & + u_t + u_{xx} + 2uu_x = 0, \end{aligned}$$

令上式中 f',f'' 的系数为零,得

$$\omega_x\omega_t + \omega_x\omega_{xx} + 2u\omega_x^2 = 0, \tag{33}$$

$$\omega_{xt} + \omega_{xxx} + 2\omega_x u_x + 2u\omega_{xx} = 0, \tag{34}$$

$$u_t + u_{xx} + 2uu_x = 0. \tag{35}$$

由(35)式可知 u 为方程(1)和(2)的解,将(32)式代入(3)和(29)式得到 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的一个 Auto-Darboux 变换

$$H = \frac{\partial}{\partial x}\ln\omega + u, \tag{36}$$

$$G = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ln\omega + u_y, \tag{37}$$

其中 ω,u 由方程(33)—(35)确定.

下面利用 Auto-Darboux 变换(36)和(37)式考虑 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的精确解.

(i)当 $u=u(y)$为 y 的任意函数时,要使(33)—(35)式成立,只要 ω 满足

$$\omega_t + \omega_{xx} + 2u(y)\omega_x = 0. \tag{38}$$

利用文献[3]中的方法,得到 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的单孤子解

$$\begin{aligned} H = & -\frac{c+2ku(y)}{2k} \\ & \times \tanh\Big[-\frac{c+2ku(y)}{2k^2}(kx+ly \\ & + ct+d)\Big] - \frac{c}{2k}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} G = & \Big[\frac{u'(y)(c+2ku(y))(kx+ly+ct+d)}{2k^2} \\ & + \frac{l(c+2ku(y))^2}{4k^3}\Big]\mathrm{sech}^2\Big[-\frac{c+2ku(y)}{2k^2}(kx \\ & + ly+ct+d)\Big] - u'(y) \\ & \times \tanh\Big[-\frac{c+2ku(y)}{2k^2}(kx+ly \\ & + ct+d)\Big]. \end{aligned} \tag{40}$$

当 u 为常数 p 时,(38)式变为

$$\omega_t + \omega_{xx} + 2p\omega_x = 0. \tag{41}$$

由(39)和(40)式可得 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的单孤子解

$$\begin{aligned} H = & -\frac{c+2kp}{2k}\tanh\Big[-\frac{c+2kp}{2k^2}(kx \\ & + ly+ct+d)\Big] - \frac{c}{2k}, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} G = & \frac{l(c+2kp)^2}{4k^3}\mathrm{sech}^2\Big[-\frac{c+2kp}{2k^2}(kx \\ & + ly+ct+d)\Big], \end{aligned} \tag{43}$$

式中 k,l,c,d 为常数(当 p 换为 u_0 时,(42)和(43)式即为(19)和(20)式),以及 Broer-Kaup 方程(1)和(2)的多孤子解

$$H = -\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i+2k_ip}{k_i}r_i}{1+\sum_{i=1}^{n}r_i} + p, \tag{44}$$

$$G = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(c_i+2k_ip)^2}{k_i^3}l_ir_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n}r_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i+2k_ip}{k_i}r_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i+2k_ip}{k_i^2}l_ir_i\right)}{\left(1+\sum_{i=1}^{n}r_i\right)^2}, \tag{45}$$

式中 $r_i = \exp\Big[-\frac{c_i+2k_ip}{k_i^2}(k_ix+l_iy+c_it+d_i)\Big]$,而 $k_i\neq 0$,l_i,c_i,d_i $(i=1,2,\cdots,n)$及 p 分别为任意常数.

当 $p=0$ 时,(38)式变为

$$\omega_t + \omega_{xx} = 0. \tag{46}$$

利用文献[3]中的方法,得到 Broer-Kaup 方程(1)和(2)下列精确解:

$$H = \frac{\theta_1}{\theta}, \tag{47}$$

$$G = \frac{\bar{\theta}_1 \theta - \theta_1 \bar{\theta}}{\theta^2}, \tag{48}$$

式中

$$\theta = \sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^{n-i}(n-i)!\binom{n}{n-i} \times \sum_{j=1}^{2(n+1-i)} a_j(y)\frac{x^{2(n+1-i)-j}}{(2(n+1-i)-j)!}\right]t^i,$$

$$\theta_1 = \sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^{n-i}(n-i)!\binom{n}{n-i} \times \sum_{j=1}^{2(n-i)+1} a_j(y)\frac{x^{2(n-i)+1-j}}{(2(n-i)+1-j)!}\right]t^i,$$

$$\bar{\theta} = \sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^{n-i}(n-i)!\binom{n}{n-i} \times \sum_{j=1}^{2(n+1-i)} a_j'(y)\frac{x^{2(n+1-i)-j}}{(2(n+1-i)-j)!}\right]t^i,$$

$$\bar{\theta}_1 = \sum_{i=0}^{n}\left[(-1)^{n-i}(n-i)!\binom{n}{n-i} \times \sum_{j=1}^{2(n-i)+1} a_j'(y)\frac{x^{2(n-i)+1-j}}{(2(n-i)+1-j)!}\right]t^i,$$

其中 $a_i(y)(j=1,2,\cdots,n)$ 为 y 的任意可导函数. 当 $a(y)$ 为有理函数时,则上述解为有理函数精确解.

(ii) 当 $u=p$ 为常数时,类似文献[8],得到 Broer-Kaup 方程(1)和(2)下列形式的多孤子解:

设方程(41)有解,

$$\omega = 1 + \sum_{i=1}^{n}\cosh(K_i x + L_i y + C_i t + D_i)\exp(k_i x + l_i y + c_i t + d_i). \tag{49}$$

将(49)式代入方程(41),经计算得

$$C_i = -2(p+k_i)K_i, \tag{50}$$

$$K_i = \pm\sqrt{-(k_i^2 + 2pk_i + c_i)}, \tag{51}$$

其中 p, k_i, c_i 为任意常数.

由(36),(37),(49),(50)和(51)式得高阶(2+1)维Broer-Kaup方程(1)和(2)的多孤子解

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n}(K_i\sinh\zeta_i + k_i\cosh\zeta_i)\exp\xi_i}{1+\sum_{i=1}^{n}(\cosh\zeta_i\exp\xi_i)} + p, \tag{52}$$

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n}[L_i(K_i\cosh\zeta_i + k_i\sinh\zeta_i) + l_i(K_i\sinh\zeta_i + k_i\cosh\zeta_i)]\exp\xi_i}{1+\sum_{i=1}^{n}\cosh\zeta_i\exp\xi_i} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(K_i\sinh\zeta_i + k_i\cosh\zeta_i)\exp\xi_i\sum_{i=1}^{n}(L_i\sinh\zeta_i + l_i\cosh\zeta_i)\exp\xi_i}{\left(1+\sum_{i=1}^{n}\cosh\zeta_i\exp\xi_i\right)^2}, \tag{53}$$

式中

$$\zeta_i = K_i x + L_i y - 2(p+k_i)K_i t + D_i,$$

$$\xi_i = k_i x + l_i y + c_i t + d_i,$$

$$K_i = \pm\sqrt{-(k_i^2 + 2pk_i + c_i)},$$

其中 $p, k_i, l_i, c_i, d_i, L_i, D_i$ 为任意常数.

类似文献[8],(49)式也可设为

$$\omega = 1 + \sum_{i=1}^{n}\sinh(K_i x + L_i y + C_i t + D_i) \times \exp(k_i x + l_i y + c_i t + d_i),$$

$$\omega = 1 + \sum_{i=1}^{n}\sin(K_i x + L_i y + C_i t + D_i) \times \exp(k_i x + l_i y + c_i t + d_i),$$

$$\omega = 1 + \sum_{i=1}^{n}\cos(K_i x + L_i y + C_i t + D_i) \times \exp(k_i x + l_i y + c_i t + d_i).$$

对此,这里不作详细讨论.

感谢审稿者有建设性的意见.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169
[2] Wang M L 1996 *Phys*. *Lett*. A **216** 67
[3] Zhao X Q, Tang D B 2002 *Phys*. *Lett*. A **297** 59
[4] Fan E G 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 212
[5] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 0718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 0718]
[6] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]
[7] Zhang J F, Han P 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 705 (in Chinese) [张解放、韩 平 2002 物理学报 **51** 705]
[8] Na R 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1671 (in Chinese) [那仁满拉 2002 物理学报 **51** 1671]
[9] Guo G P, Zhang J F 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1159 (in Chinese) [郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]
[10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Appl*. *Math*. *Mech*. **22** 281 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 应用数学与力学 **22** 281]
[11] Lü K P, Shi Y R, Duan W S *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山等 2001 物理学报 **50** 2074]
[12] Zhang J F, Liu Y L 2002 *Appl*. *Math*. *Mech*. **23** 489 (in Chinese) [张解放、刘宇陆 2002 应用数学与力学 **23** 489]
[13] Ruan H Y, Chen Y X 1998 *Acta Phys*. *Sin*. (Over. Ed.) **7** 241
[14] Ruan H Y 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1781 (in Chinese) [阮航宇 1999 物理学报 **48** 1781]
[15] Ruan H Y *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 586 (in Chinese) [阮航宇等 2001 物理学报 **50** 586]
[16] Huang W H, Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 1

Some new soliton wave solutions for (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations*

Zhao Xi-Qiang[1)2)] Tang Deng-Bin[1)] Wang Li-Min[2)] Zhang Yiao-Ming[2)]

[1)] (*Department of Aerodynamics*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*)

[2)] (*Shandong University of Technology*, *Zibo* 255049, *China*)

(Received 1 November 2002; revised manuscript received 13 December 2002)

Abstract

By a simple transformation, (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations are turned to a simple equation. Some new soliton solutions are obtained by combining the transformation with the homogeneous balance method. The method given in this paper can be used to solve other nonlinear physical model.

Keywords: Broer-Kaup equation, (2+1)-dimensions, soliton solution, homogeneous balance method

PACC: 0230, 0340

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19972026, 10272068).