第 52 卷 第 8 期 2003 年 8 月
1000-3290/2003/52(08)/1837-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.8, August, 2003

Lamé 函数和非线性演化方程的扰动方法*

刘式适[1)] 付遵涛[1)] 王彰贵[2)] 刘式达[1)]

[1)] (北京大学物理学院, 北京 100871)

[2)] (国家海洋局海洋环境预报中心, 北京 100081)

(2002 年 11 月 6 日收到; 2002 年 12 月 22 日收到修改稿)

利用小扰动方法对非线性演化方程作展开得到原始方程的各级近似方程. 应用 Jacobi 椭圆函数展开法求得了零级近似方程的准确解, 并由此得到一级近似方程和二级近似方程分别满足齐次 Lamé 方程和非齐次 Lamé 方程, 应用 Lamé 函数和 Jacobi 椭圆函数展开法可以分别求得一级近似方程和二级近似方程的准确解. 这样, 就求得了非线性演化方程的多级准确解.

关键词: Jacobi 椭圆函数, Lamé 函数, 多级准确解, 非线性演化方程, 扰动方法

PACC: 0340K

1. 引 言

寻找非线性演化方程的准确解在非线性问题中占有很重要的地位. 应用求解非线性演化方程准确解的新方法, 如齐次平衡法[1—3]、双曲正切函数展开法[4]、非线性变换法[5,6]、试探函数法[7,8]、sine-cosine 方法[9]和 Jacobi 椭圆函数展开法[10—12]等, 求得的非线性演化方程的解主要有孤立波解、冲击波解[1—9,13—21]和椭圆函数解[10—12,22—24]. 为了讨论这些解的稳定性, 必须在这些解的基础上叠加一个小扰动[26,27], 并分析小扰动的演化. 这种做法实质上是将非线性演化方程的解展开为小参数 ε 的幂级数, 并力求获得它的各级准确解. 本文在 Jacobi 椭圆函数展开法的基础上, 应用 Lamé 函数[25]求得了某些非线性演化方程的多级准确解.

2. Lamé 函数

函数 $y(x)$ 的 Lamé 方程[25]通常可以写为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda - n(n+1)m^2 \mathrm{sn}^2 x] y = 0, \tag{1}$$

其中 λ 为本征值, n 通常为正整数, $\mathrm{sn}x$ 为 Jacobi 椭圆正弦函数[25,26], m 为模数($0<m<1$).

若作自变量变换

$$\eta = \mathrm{sn}^2 x, \tag{2}$$

则 Lamé 方程(1)化为

$$\frac{d^2 y}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta - 1} + \frac{1}{\eta - h}\right)\frac{dy}{d\eta} - \frac{\mu + n(n+1)\eta}{4\eta(\eta-1)(\eta-h)} y = 0, \tag{3}$$

其中

$$h = m^{-2} > 1, \qquad \mu = -h\lambda. \tag{4}$$

方程(3)是包含 4 个正则奇点的 $\eta = 0, 1, h$ 和 ∞ 的 Fuch 型方程, 它的解称为 Lamé 函数.

例如, 当 $n=3, \lambda = 4(1+m^2)$, $[\mu = -4(1+m^{-2})]$ 时, Lamé 函数为

$$L_3(x) = \eta^{1/2}(1-\eta)^{1/2}(1-h^{-1}\eta)^{1/2} = \mathrm{sn}x\,\mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x. \tag{5}$$

而当 $n=2, \lambda = 1+m^2$, $[\mu = -(1+m^{-2})]$ 时, Lamé 函数为

$$L_2(x) = (1-\eta)^{1/2}(1-h^{-1}\eta)^{1/2} = \mathrm{cn}x\,\mathrm{dn}x. \tag{6}$$

在(5), (6)式中, $\mathrm{cn}x$ 和 $\mathrm{dn}x$ 分别为 Jacobi 椭圆余弦函数和第三类 Jacobi 椭圆函数.

3. $n=3, \lambda = 4(1+m^2)$ 的多级准确解

当 $n=3, \lambda=4(1+m^2)$ 时, Lamé 方程(1)化为

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [4(1+m^2) - 12m^2 \mathrm{sn}^2 x] y = 0. \tag{7}$$

---

* 国家自然科学基金(批准号: 40175016)、教育部博士点基金(批准号: 2000000156)和国家重点基础研究发展规划(批准号: G1999043809)资助的课题.

它的解为(5)式.

下面将予以举例说明.

3.1. KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{8}$$

设它的行波解为

$$u = u(\xi),\quad \xi = k(x - ct), \tag{9}$$

其中 k 和 c 分别为波数和波速.

将(9)式代入方程(8),求得

$$\beta k^2\frac{d^3u}{d\xi^3} + u\frac{du}{d\xi} - c\frac{du}{d\xi} = 0. \tag{10}$$

将(10)式对 ξ 积分一次,取积分常数为零,得到

$$\beta k^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{1}{2}u^2 - cu = 0. \tag{11}$$

设

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots, \tag{12}$$

其中 ε 为小参数($0<\varepsilon\ll 1$),u_0,u_1,u_2,…,分别代表 u 的零级、一级、二级等各级解.

将(12)式代入方程(11),求得它的零级方程、一级方程和二级方程分别为

ε^0:

$$\beta k^2\frac{d^2u_0}{d\xi^2} + \frac{1}{2}u_0^2 - cu_0 = 0, \tag{13}$$

ε^1:

$$\beta k^2\frac{d^2u_1}{d\xi^2} + (u_0 - c)u_1 = 0, \tag{14}$$

ε^2:

$$\beta k^2\frac{d^2u_2}{d\xi^2} + (u_0 - c)u_2 = -\frac{1}{2}u_1^2. \tag{15}$$

对于零级方程(13),应用 Jacobi 椭圆正弦函数展开法,令

$$u_0 = a_0 + a_1\operatorname{sn}\xi + a_2\operatorname{sn}^2\xi \tag{16}$$

代入方程(13),很容易定得

$$a_0 = c + 4(1+m^2)\beta k^2,\quad a_1 = 0,\quad a_2 = -12m^2\beta k^2,\quad c^2 = 16(1 - m^2 + m^4)\beta^2k^2. \tag{17}$$

因而,KdV 方程(8)的零级准确解为

$$u_0 = c + 4(1+m^2)\beta k^2 - 12m^2\beta k^2\operatorname{sn}^2\xi. \tag{18}$$

对于一级方程(14),将(18)式代入得到

$$\frac{d^2u_1}{d\xi^2} + [4(1+m^2) - 12m^2\operatorname{sn}^2\xi]u_1 = 0. \tag{19}$$

这正是 $n=3$,$\lambda = 4(1+m^2)$ 的 Lamé 方程(7),因此,KdV 方程(8)的一级准确解为

$$u_1 = AL_3(\xi) = A\operatorname{sn}\xi\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi, \tag{20}$$

其中 A 为任意常数.

对于二级方程(15),用(20)式代入得到

$$\frac{d^2u_2}{d\xi^2} + [4(1+m^2) - 12m^2\operatorname{sn}^2\xi]u_2 = -\frac{A^2}{2\beta k^2}\operatorname{sn}^2\xi\operatorname{cn}^2\xi\operatorname{dn}^2\xi. \tag{21}$$

考虑 $\operatorname{cn}^2\xi = 1 - \operatorname{sn}^2\xi$,$\operatorname{dn}^2\xi = 1 - m^2\operatorname{sn}^2\xi$,则二级方程(21)可以写为

$$\frac{d^2u_2}{d\xi^2} + [4(1+m^2) - 12m^2\operatorname{sn}^2\xi]u_2 = -\frac{A^2}{2\beta k^2}[\operatorname{sn}^2\xi - (1+m^2)\operatorname{sn}^4\xi + m^2\operatorname{sn}^6\xi]. \tag{22}$$

由于方程(22)的齐次方程与(19)式的形式相同,所以,二级方程(22)为非齐次的 Lamé 方程,关键在于方程(22)中非齐次项的特解.考虑方程(22)中的非齐次项的形式,我们设

$$u_2 = b_0 + b_2\operatorname{sn}^2\xi + b_4\operatorname{sn}^4\xi. \tag{23}$$

将(23)式代入方程(22),定得

$$b_0 = -\frac{A^2}{48m^2\beta k^2},\quad b_2 = \frac{(1+m^2)A^2}{24m^2\beta k^2},\quad b_4 = -\frac{A^2}{16\beta k^2}. \tag{24}$$

因而求得 KdV 方程的二级准确解为

$$u_2 = -\frac{A^2}{48m^2\beta k^2} + \frac{(1+m^2)A^2}{24m^2\beta k^2}\operatorname{sn}^2\xi - \frac{A^2}{16\beta k^2}\operatorname{sn}^4\xi. \tag{25}$$

3.2. 非线性 Klein-Gordon 方程(Ⅰ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u - \beta u^2 = 0. \tag{26}$$

以行波解(9)式代入,求得

$$k^2(c^2 - c_0^2)\frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha u - \beta u^2 = 0. \tag{27}$$

将(12)式代入方程(27),求得零级、一级和二级方程分别为

ε^0:

$$k^2(c^2 - c_0^2)\frac{d^2u_0}{d\xi^2} - \beta u_0^2 + \alpha u_0 = 0, \tag{28}$$

ε^1:

$$k^2(c^2-c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\xi^2}+(\alpha-2\beta u_0)u_1=0, \tag{29}$$

ε^2：

$$k^2(c^2-c_0^2)\frac{d^2u_2}{d\xi^2}+(\alpha-\beta u_0)u_2=\beta u_1^2. \tag{30}$$

类似地，求解方程(28)，(29)和(30)，得到非线性 Klein-Gordon 方程(26)的零级、一级和二级准确解分别为

$$u_0=\frac{\alpha}{2\beta}-\frac{2(1+m^2)}{\beta}k^2(c^2-c_0^2)+\frac{6}{\beta}m^2k^2(c^2-c_0^2)\mathrm{sn}^2\xi, \tag{31}$$

$$u_1=AL_3(\xi)=A\,\mathrm{sn}\xi\,\mathrm{cn}\xi\,\mathrm{dn}\xi, \tag{32}$$

$$u_2=\frac{\beta A^2}{24m^2k^2(c^2-c_0^2)}\times[1-2(1+m^2)\mathrm{sn}^2\xi+3m^2\mathrm{sn}^4\xi]. \tag{33}$$

4. $n=2$，$\lambda=1+m^2$ 的多级准确解

当 $n=2$，$\lambda=1+m^2$ 时，Lamé 方程(1)化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+[(1+m^2)-6m^2\mathrm{sn}^2x]y=0. \tag{34}$$

它的解为(6)式.

下面将予以举例说明.

4.1. mKdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3u}{\partial x^3}=0. \tag{35}$$

将(9)式代入方程(35)，求得

$$\beta k^2\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}\xi^3}+\alpha u^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}-c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=0. \tag{36}$$

将上式对 ξ 积分一次，取积分常数为零，得到

$$\beta k^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{\alpha}{3}u^3-cu=0. \tag{37}$$

用(12)式代入方程(37)，求得它的零级、一级和二级方程分别为

ε^0：

$$\beta k^2\frac{\mathrm{d}^2u_0}{\mathrm{d}\xi^2}+\frac{\alpha}{3}u_0^3-cu_0=0, \tag{38}$$

ε^1：

$$\beta k^2\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\xi^2}+(\alpha u_0^2-c)u_1=0, \tag{39}$$

ε^2：

$$\beta k^2\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}\xi^2}+(\alpha u_0^2-c)u_2=-\alpha u_0u_1^2. \tag{40}$$

对于零级方程(38)，应用 Jacobi 椭圆函数展开法，令

$$u_0=a_0+a_1\mathrm{sn}\xi, \tag{41}$$

代入方程(38)，定得

$$a_0=0,\quad a_1=\pm\sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}}mk,\quad c=-(1+m^2)\beta k^2. \tag{42}$$

因而 mKdV 方程(35)的零级准确解为

$$u_0=\pm\sqrt{-\frac{6\beta}{\alpha}}mk\,\mathrm{sn}\xi. \tag{43}$$

对于一级方程(39)，(43)式代入得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\xi^2}+[(1+m^2)-6m^2\mathrm{sn}^2\xi]u_1=0. \tag{44}$$

这正是 $n=2$，$\lambda=1+m^2$ 的 Lamé 方程(34). 因此 mKdV 方程(36)的一级准确解为

$$u_1=AL_2(\xi)=A\,\mathrm{cn}\xi\,\mathrm{dn}\xi, \tag{45}$$

其中 A 为任意常数.

对于二级方程(40)，用(45)式代入，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}\xi^2}+[(1+m^2)-6m^2\mathrm{sn}^2\xi]u_2=\pm\sqrt{-\frac{6\alpha}{\beta}}\frac{mA^2}{k}\mathrm{sn}\xi\,\mathrm{cn}^2\xi\,\mathrm{dn}^2\xi \tag{46}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}\xi^2}+[(1+m^2)-6m^2\mathrm{sn}^2\xi]u_2=\pm\sqrt{-\frac{6\alpha}{\beta}}\frac{mA^2}{k}[\mathrm{sn}\xi-(1+m^2)\mathrm{sn}^3\xi+m^2\mathrm{sn}^5\xi]. \tag{47}$$

这是 $n=2$，$\lambda=1+m^2$ 的非齐次 Lamé 方程，为此，设

$$u_2=b_1\mathrm{sn}\xi+b_3\mathrm{sn}^3\xi. \tag{48}$$

将(48)式代入(47)式，定得

$$b_1=\mp\frac{1+m^2}{12m}\sqrt{-\frac{6\alpha}{\beta}}\frac{A^2}{k},\quad b_3=\pm\frac{1}{6}\sqrt{-\frac{6\alpha}{\beta}}\frac{mA^2}{k}. \tag{49}$$

因此，mKdV 方程的二级准确解为

$$u_2=\mp\sqrt{-\frac{6\alpha}{\beta}}\frac{(1+m^2)A^2}{12mk}\mathrm{sn}\xi\left[1-\frac{2m^2}{1+m^2}\mathrm{sn}^2\xi\right]. \tag{50}$$

4.2. 非线性 Klein-Gordon 方程(Ⅱ)

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c_0^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\alpha u-\beta u^3=0. \tag{51}$$

将(9)式代入方程(51)，求得

$$k^2(c^2-c_0^2)\frac{d^2u}{d\xi^2}+\alpha u-\beta u^3=0. \quad (52)$$

将(12)式代入方程(52),求得它的零级、一级和二级方程分别为

ε^0:

$$k^2(c^2-c_0^2)\frac{d^2u_0}{d\xi^2}-\beta u_0^3+\alpha u_0=0, \quad (53)$$

ε^1:

$$k^2(c^2-c_0^2)\frac{d^2u_1}{d\xi^2}+(\alpha-3\beta u_0^2)u_1=0, \quad (54)$$

ε^2:

$$k^2(c^2-c_0^2)\frac{d^2u_2}{d\xi^2}+(\alpha-3\beta u_0^2)u_2=3\beta u_0u_1^2. \quad (55)$$

对于零级方程(53),应用(40)式,很容易求得

$$u_0=\pm\sqrt{\frac{2(c^2-c_0^2)}{\beta}}mk\,\mathrm{sn}\xi$$

$$\left(k^2=\frac{\alpha}{(1+m^2)(c^2-c_0^2)}\right). \quad (56)$$

这就是非线性 Klein-Gordon 方程(51)的零级准确解.

将(56)式代入一级方程(54),得到

$$\frac{d^2u_1}{d\xi^2}+[(1+m^2)-6m^2\mathrm{sn}^2\xi]u_1=0. \quad (57)$$

这正是 $n=2$ 的 Lamé 方程(34),所以

$$u_1=AL_2(\xi)=A\,\mathrm{cn}\xi\,\mathrm{dn}\xi. \quad (58)$$

这就是非线性 Klein-Gordon 方程(51)的一级准确解.

将(58)式代入(55)式,求得二级方程为

$$\frac{d^2u_2}{d\xi^2}+[(1+m^2)-6m^2\mathrm{sn}^2\xi]u_2$$
$$=\pm3\sqrt{\frac{2\beta}{c^2-c_0^2}}\frac{mA^2}{k}\mathrm{sn}\xi\,\mathrm{cn}^2\xi\,\mathrm{dn}^2\xi. \quad (59)$$

将(48)式代入(59)式,定得

$$u_2=\mp\frac{1+m^2}{2mk}\sqrt{\frac{\beta}{2(c^2-c_0^2)}}A^2$$
$$\times\mathrm{sn}\xi\left[1-\frac{2m^2}{1+m^2}\mathrm{sn}^2\xi\right]. \quad (60)$$

5. 结 论

在本文中,我们把 Jacobi 椭圆函数和 Lamé 函数应用求解非线性演化方程,得到这些非线性演化方程的多级准确解.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[2] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[3] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[4] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[5] Hirota R 1973 *J. Math. Phys.* **14** 810

[6] Kudryashov N A 1990 *Phys. Lett.* A **147** 287

[7] Otwinowski M, Paul R, Laidlaw W G 1988 *Phys. Lett.* A **128** 483

[8] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Appl. Math. Mech.* **22** 326

[9] Yan C 1996 *Phys. Lett.* A **224** 77

[10] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]

[11] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10]

[12] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[13] Yan Z Y, Zhang H Q, Fan E G 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]

[14] Li Z B, Yao R X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2062 (in Chinese) [李志斌、姚若霞 2001 物理学报 **50** 2062]

[15] Lu K P, Shi T R, Duan W S *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石太仁、段文山等 2001 物理学报 **50** 2074]

[16] Zhang J F 1999 *Chin. Phys.* **8** 326

[17] Li Z B, Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese) [李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]

[18] Zhang J F 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1416 (in Chinese) [张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[19] Yan Z Y, Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1962 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[20] Yan Z Y, Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1957 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1957]

[21] Zhang J F, Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]

[22] Porubov A V 1996 *Phys. Lett.* A **221** 391

[23] Porubov A V, Velarde M G 1999 *J. Math. Phys.* **40** 884

[24] Porubov A V, Parker D F 1999 *Wave Motion* **29** 97

[25] Wang Z X, Guo D R 1989 *Special Functions* (Singapore: World Scientific)

[26] Liu S K, Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京 北京大学出版社)]

[27] Nayfeh A H 1973 *Perturbation Methods* (New York: John Wiley and Sons Inc.)

Lamé function and perturbation method to nonlinear evolution equations*

Liu Shi-Kuo[1)] Fu Zun-Tao[1)] Wang Zhang-Gui[2)] Liu Shi-Da[1)]

[1)]（*School of Physics*，*Peking University*，*Beijing* 100871，*China*）

[2)]（*National Marine Environmental Predicting Center*，*State Oceanic Administration*，*Beijing* 100081，*China*）

（Received 6 November 2002；revised manuscript received 22 December 2002）

Abstract

The perturbation method is applied to the multi-order exact solutions of nonlinear evolution equations. The exact solutions to the zeroth-order equation can be derived by Jacobi elliptic function expansion method，and then the first-order and the second-order equations can be rewritten as the homogeneous Lamé equation and inhomogeneous Lamé equation，respectively. They can be solved by using Lamé functions and the Jacobi elliptic function expansion method. Thus，the multi-order solutions are obtained to the nonlinear evolution equations.

Keywords：Lamé function，Jacobi elliptic function，nonlinear evolution equation，multi-order exact solution，perturbation method

PACC：0340K

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China（Grant No.40175016），Doctorate Foundation of the Ministry of Education of China（Grant No.2000000156）and the State Key Development Program for Basic Research of China（Grant No.G1999043809）.