第 52 卷 第 8 期 2003 年 8 月
1000-3290/2003/52(08)/1858-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.8, August, 2003
©2003 Chin. Phys. Soc.

一类 n 维非球谐振子势的精确解

龙超云[1)]　陈明伦[2)]　蔡绍洪[1)]

[1)] (贵州大学物理系，贵阳　550025)

[2)] (贵州师范大学物理系，贵阳　550002)

(2002 年 9 月 30 日收到；2002 年 12 月 22 日收到修改稿)

严格求解一类 n 维非球谐振子势的定态薛定谔方程，获得了归一化径向波函数和能谱的精确解.在此基础上导出径向矩阵元 $\langle n_r, L_n | r^s | n_r', L_n' \rangle$ 的通项公式.

关键词：n 维非球谐振子，精确解，径向矩阵元，通项公式

PACC：0365

1. 引　　言

谐振子模型是量子力学中可严格求解的问题之一.然而，许多实际问题常常总是偏离谐振子模型的，因而非谐振子模型一直受到人们的广泛关注[1—11].文献[6—11]分别利用赝角动量、因式分解及 Riccati 变换等方法求解了一类一维非谐振子模型和三维非球谐振子模型，获得了归一化径向波函数和能谱的精确解.此外，文献[11]还给出了三维非球谐振子径向矩阵元的通项公式及递推关系.本文将文献[1—11]的这一类非谐振子势推广到 n 维非球谐振子势，

$$U(r) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{A}{2r^2}, \tag{1}$$

式中 $r = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$ 为超球半径.并严格求解与(1)式相应的定态薛定谔方程，获得了归一化径向波函数和能谱的精确解，在此基础上还导出径向矩阵元 $\langle n_r, L_n | r^s | n_r', L_n' \rangle$ 的通项公式.

2. n 维非球谐振子势的精确解

对于 n 维非球谐振子势，在自然单位中($\omega = \mu = \hbar = 1$)，其定态薛定谔方程为

$$\left[\nabla^2 - r^2 - \frac{A}{r^2} + 2E\right]\Psi(r,\Omega) = 0, \tag{2}$$

式中 ∇^2，Ω 和 r 分别为 n 维超球坐标系中的拉普拉斯算符、立体角和超球半径.令

$$\begin{aligned}\Psi(r,\Omega) &= R(r)\mathrm{Y}_{J_{n-2},J_{n-3},\cdots,J_0}(\theta_{n-2},\theta_{n-3},\cdots,\theta_0)\\ &= \chi(r)r^{-\frac{n-1}{2}}\\ &\quad\times \mathrm{Y}_{J_{n-2},J_{n-3},\cdots,J_0}(\theta_{n-2},\theta_{n-3},\cdots,\theta_0),\end{aligned} \tag{3}$$

式中 $\mathrm{Y}_{J_{n-2},J_{n-3},\cdots,J_0}(\theta_{n-2},\theta_{n-3},\cdots,\theta_0)$ 是 n 维超球坐标系中的球谐函数，$0 \leqslant |J_0| \leqslant J_1 \leqslant \cdots J_{n-2}$ ($J_0, J_1, \cdots, J_{n-2}$ 均为整数)，J_{n-2} 为与 SO_n 群的 Casimir 算子 l^2 相应的量子数.

应用 n 维超球坐标系中的分离变量法[12,13]，则可得 $\chi(r)$ 所满足的径向方程

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r^2}\left[J_{n-2}(J_{n-2}+n-2) + \frac{n-1}{2}\times\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\right] - r^2 - \frac{A}{r^2} + 2E\right\}\chi(r) = 0. \tag{4}$$

若令

$$L_n = \frac{\sqrt{(2J_{n-2}+n-2)^2+4A}-1}{2}, \tag{5}$$

则方程(4)可化为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{L_n(L_n+1)}{r^2} - r^2 + 2E\right\}\chi(r) = 0. \tag{6}$$

进一步作下列函数代换和变量代换：

$$\chi(r) = r^{L_n+1}\mathrm{e}^{-r^2/2}f(r),\quad t = r^2, \tag{7}$$

则方程(6)可写成

$$t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(t) + \left[\left(L_n+\frac{3}{2}\right) - t\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) - \left[\frac{1}{2}\left(L_n+\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}E\right]f(t) = 0. \tag{8}$$

(8)式为著名的合流超几何方程，满足条件 $\chi(0) = 0$ 的解为[14]

$$f(r^2) = f(t) = \mathrm{F}\left[\alpha, L_n + \frac{3}{2}, r^2\right],$$

式中 $\alpha = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{3}{2} - E\right)$,故由(7)式可得

$$\chi(r) = Cr^{L_n+1}\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{F}\left[\alpha, L_n + \frac{3}{2}, r^2\right]. \quad (9)$$

由于在 α 不等于零和负整数的情况下,下列合流超几何级数当自变量取大的正值时,其渐近行为

$$\mathrm{F}(\alpha, L_n + 3/2, r^2) \xrightarrow[r\to\infty]{} \mathrm{e}^{r^2}.$$

因此,对于束缚态,则要求 $\mathrm{F}(\alpha, L_n + 3/2, r^2)$ 中断为一个多项式,即要求

$$\alpha = -n_r = 0, -1, -2, -3, \cdots.$$

从而能谱方程为

$$E = 2n_r + L_n + \frac{3}{2}. \quad (10)$$

同时,从(3)式可得径向波函数为

$$R(r) = \chi(r)r^{-\frac{n-1}{2}} = Cr^{L_n+\frac{3-n}{2}}\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{F}\left[-n_r, L_n + \frac{3}{2}, r^2\right]. \quad (11)$$

(11)式中的归一化常数 C 由 n 维超球坐标系中径向波函数的归一化条件

$$\int R(r)^* R(r) r^{n-1}\mathrm{d}r = 1 \quad (12)$$

来确定.

应用合流超几何级数与广义拉盖尔多项式之间的关系[11]

$$\mathrm{F}(-\lambda, \eta + 1, r^2) = \frac{\lambda!\Gamma(\eta+1)}{\Gamma(\eta+1+\lambda)}\mathrm{L}_\lambda^\eta(r^2), \quad (13)$$

及广义拉盖尔多项式的正交归一性

$$\int_0^\infty x^\sigma \mathrm{e}^{-x}\mathrm{L}_m^\sigma(x)\mathrm{L}_n^\sigma(x)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(n+1+\sigma)}{n!}\delta_{mn}, \quad (14)$$

便可得径向归一化常数为

$$C = \frac{1}{\Gamma\left(L_n + \frac{3}{2}\right)}\sqrt{\frac{2\Gamma\left(L_n + n_r + \frac{3}{2}\right)}{n_r!}}.$$

从而可得 n 维非球谐振子势的径向归一化波函数为

$$R_{n_rL_n}(r) = \frac{1}{\Gamma\left(L_n + \frac{3}{2}\right)}\sqrt{\frac{2\Gamma\left(L_n + n_r + \frac{3}{2}\right)}{n_r!}} \times \mathrm{e}^{-r^2/2}r^{L_n+\frac{3-n}{2}}\mathrm{F}\left(-n_r, L_n + \frac{3}{2}, r^2\right). \quad (15)$$

1)如果 $A=0$,则 n 维非球谐振子退化为 n 维球谐振子,由(5),(10)和(15)式可得相应的能谱方程和径向归一化波函数

$$E = 2n_r + J_n + \frac{n}{2}, \quad (16)$$

$$R_{n_rL_n}(r) = \frac{1}{\Gamma\left(J_{n-2} + \frac{n}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{2\Gamma\left(n_r + J_{n-2} + \frac{n}{2}\right)}{n_r!}} \times r^{J_{n-2}}\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{F}\left(-n_r, J_{n-2} + \frac{n}{2}, r^2\right). \quad (17)$$

2)如果 $n=3$,则 n 维非球谐振子退化为三维非球谐振子,由(5),(10)和(15)式可得相应的能谱方程和径向归一化波函数为

$$E = 2n_r + l + \frac{3}{2}, \quad (18)$$

$$R_{n_rl}(r) = \frac{1}{\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)}\sqrt{\frac{2\Gamma\left(n_r + l + \frac{3}{2}\right)}{n_r!}} \times r^l\mathrm{e}^{-r^2/2}\mathrm{F}\left(-n_r, l + \frac{3}{2}, r^2\right), \quad (19)$$

式中 $l = \frac{\sqrt{(2J_{n-2}+1)^2 + 4A} - 1}{2}$.

(16)—(19)式与文献[11—13]的相关结果完全一致,即文献[11—13]中的结果仅作为一种特例包含于本文一般结论之中.

3. n 维非球谐振子径向矩阵元的通项公式

在 n 维超球坐标系中,由(13)和(15)式可得径向算符 r^s 的矩阵元为

$$\langle n_r, L_n | r^s | n_r', L_n' \rangle = \int R^*_{n_rL_n}(r) r^s R_{n_r'L_n'} r^{n-1}\mathrm{d}r$$
$$= \sqrt{\frac{n_r!n_r'!}{\Gamma(n_r + L_n + 3/2)\Gamma(n_r' + L_n' + 3/2)}} \times \int \mathrm{e}^{-r^2}(r^2)^{\frac{L_n + L_n' + s + 1}{2}} \times \mathrm{L}_{n_r}^{L_n+\frac{1}{2}}(r^2)\mathrm{L}_{n_r'}^{L_n'+\frac{1}{2}}(r^2)\mathrm{d}r^2. \quad (20)$$

利用广义拉盖尔多项式的积分公式

$$\int_0^\infty z^\rho \mathrm{e}^{-z}\mathrm{L}_\mu^\beta(z)\mathrm{L}_{\mu'}^{\beta'}(z)\mathrm{d}z = (-1)^{\mu+\mu'}\Gamma(\rho+1) \times \sum_\kappa \binom{\rho-\beta}{\mu-\kappa}\binom{\rho-\beta'}{\mu'-\kappa}\binom{\rho+\kappa}{\kappa}, \quad (21)$$

可得

$$
\begin{aligned}
&< n_r, L_n \mid r^s \mid n'_r, L'_n > = (-1)^{n_r + n'_r} \\
&\times \sqrt{\frac{n_r!\, n'_r!}{\Gamma(n_r + L_n + 3/2)\Gamma(n'_r + L'_n + 3/2)}} \\
&\times \Gamma\left(\frac{L_n + L'_n + 3 + s}{2}\right) \sum_\kappa \binom{\frac{-L_n + L'_n + s}{2}}{n_r - \kappa} \\
&\times \binom{\frac{L_n - L'_n + s}{2}}{n'_r - \kappa} \binom{\frac{L_n + L'_n + 1 + 2\kappa + s}{2}}{\kappa}. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

1)如果 $n_r = n'_r$, $L_n = L'_n$,便可得径向算符 r^s 的平均值公式

$$
\begin{aligned}
&< n_r, L_n \mid r^s \mid n_r, L_n > = \Gamma\left(\frac{2L_n + 3 + s}{2}\right) \\
&\times \frac{n_r!}{\Gamma(n_r + L_n + 3/2)} \\
&\times \sum_\kappa \binom{\frac{s}{2}}{n_r - \kappa}^2 \binom{\frac{2L_n + 1 + 2\kappa + s}{2}}{\kappa}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

2)如果 $A \neq 0$, $n = 3$,则本文中的 L_n 将退化为文献[11]中的 l',从而(22)和(23)式退化为文献[11]中的三维非球谐振子的相关结果.

3)如果 $A = 0$, $n = 3$ 或 $A = 0$, $n = 2$,则本文中的 L_n 将分别退化为文献[15]中的 l 和 $|m|$,从而(22)和(23)式退化为文献[15]中的三维和二维各向同性谐振子的结果.

4. 结 论

本文将文献[1—11]的一维非谐振子势和三维非球谐振子势推广为 n 维非球谐振子势,并在 n 维超球坐标系中精确求解其相应的定态薛定谔方程,获得了能谱和归一化径向波函数,在此基础上还导出径向矩阵元的通项公式.其结果具有普遍性,而文献[11—13,15]的结果仅分别作为一种特例包含其中.

[1] Huang B W, Wang D Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1163(in Chinese)[黄博文、王德云 2002 物理学报 **51** 1163]

[2] Ni Z X 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1687 (in Chinese)[倪致祥 1997 物理学报 **46** 1687]

[3] Chen C Y, Sun D S, Liu Y W *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 468(in Chinese)[陈昌远、孙东升、刘友文等 2002 物理学报 **51** 468]

[4] Li W B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 547(in Chinese)[李文博 2002 物理学报 **51** 547]

[5] Yu Z X *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1693(in Chinese)[于肇贤等 1997 物理学报 **46** 1693]

[6] Li W B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2356 (in Chinese)[李文博 2001 物理学报 **50** 2356]

[7] Zhu D P 1987 *J. Phys. A* **20** 4331

[8] Landau L D, Lifshitz E M 1958 *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon) Chap 35

[9] Zhang J L *et al* 2000 *Acta Quantum Opt. Sin.* **6** 18(in Chinese)[章介伦等 2000 量子光学学报 **6** 18]

[10] Chen C Y *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 536(in Chinese)[陈昌远等 1998 物理学报 **47** 536]

[11] Chen C Y *et al* 1999 *High Energy Physics and Nuclear Physics* **23** 865 (in Chinese)[陈昌远等 1999 高能物理与核物理 **23** 865]

[12] Liu Y F, Zen J Y 1997 *Science in China* (Series A) **40** 1110

[13] Zen J Y 2001 *Quantum Mechanics* Vol Ⅱ (3rd ed)(Beijing: Science Press) pp523—529(in Chinese)[曾谨言 2001 量子力学(卷Ⅱ)第3版](北京 科学出版社)第523—529页]

[14] Zen J Y 1999 *Special Subject Analysis of Quantum Mechanics* (Second Volume)(Beijing: Advanced Education Press) p150 (in Chinese)[曾谨言 1999 量子力学专题分析(下)(北京:高等教育出版社) 第150页]

[15] Hou C F *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 385 (in Chinese)[侯春风等 1999 物理学报 **48** 385]

Exact solution of a kind of n-dimensions non-spherical harmonic oscillator potential

Long Chao-Yun[1)]　Chen Ming-Lun[2)]　Cai Shao-Hong[1)]

[1)]（*Department of Physics*，*Guizhou University*，*Guiyang*　550025，*China*）

[2)]（*Department of Physics*，*Guizhou Normal University*，*Guiyang*　550002，*China*）

（Received 30 September 2002；revised manuscript received 22 December 2002）

Abstract

In this paper，the Schrödinger equation with a non-spherical harmonic oscillator potential in n-dimensions is solved. The exact energy equation and the normalized wave function are obtained. The general formulas of matrix elements of operator r^s are presented.

Keywords：n-dimensions non-spherical harmonic oscillator potential，exact solution，radial matrix elements，general formulas

PACC：0365