第 53 卷 第 1 期 2004 年 1 月
1000-3290/2004/53(01)/0011-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.1, January, 2004

具 5 次强非线性项的波方程新的孤波解*

那仁满都拉[1)2)] 乌恩宝音[2)] 王克协[1)]

[1)] (吉林大学物理学院,长春 130023)

[2)] (内蒙古民族大学物理与机电学院,通辽 028043)

(2002 年 11 月 20 日收到;2003 年 3 月 31 日收到修改稿)

提出一种新的函数变换法,并与直接积分法相结合简便地求出了 Lienard 方程、广义 PC 方程以及力学中重要的一类非线性波方程等几类具 5 次强非线性项的波方程的四类显示精确孤波解.本方法同样适用于求解其他具有更高次非线性项的非线性方程.

关键词:函数变换法, 孤波解, 直接积分法, 非线性波方程

PACC:0340K, 0290

1. 引 言

非线性方程被广泛用来描述科学领域内各种复杂的非线性现象,因此如何求解这些非线性方程具有非常重要的意义.近年来,人们提出了许多求解非线性方程的新方法,如齐次平衡法[1—5]、双曲函数展开法[6—10]、试探函数法[11—13]、非线性变换法[14,15]、Sin-cosine 方法[16—18]、Jacobi 椭圆函数展开法[19,20] 以及通过引入"rank"概念提出的试探性方法[21] 等,并用这些方法求解了很多非线性方程.然而非线性方程的求解是那么的困难,特别是当非线性方程变得高维、高阶或有高次项时求解更是非常困难.因此继续寻找一些有效可行的方法仍是一项十分重要的工作.为此,本文提出了一种新的函数变换法,这种方法的主要思想和基本步骤是:

第一步,将要研究的非线性偏微分方程作行波变换 $\xi = x - vt$(v 是波速),对多数方程来讲作行波变换之后都能够写成

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 = F(u) \tag{1}$$

的形式.这里 $F(u)$是关于 u 的多项式.

第二步,我们提出一种新的函数变换

$$u(\xi) = \frac{2}{p}\cos\varphi(\xi) + q, \tag{2}$$

其中 $p(p\neq 0)$, q 为待定常数,$\varphi(\xi)$为待定函数.把函数变换(2)代入方程(1)就能把方程(1)中关于 u 的多项式 $F(u)$转换成关于 $\cos\varphi(\xi)$的多项式.

第三步,利用余弦函数倍角与 $\cos\varphi(\xi)$的多项式之间的恒等关系[22]

$$\begin{aligned}\cos nx &= 2^{n-1}\cos^n x - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos^{n-2}x \\ &\quad + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}2^{n-5}\cos^{n-4}x \\ &\quad - \frac{n}{3}\binom{n-4}{2}2^{n-7}\cos^{n-6}x + \cdots,\end{aligned} \tag{3}$$

其中$\binom{l}{k} = \frac{l(l-1)(l-2)\cdots(l-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$,$\binom{l}{0} = 1$,当参数 p, q 以及原方程中各项的系数满足一定的约束关系时,把 $\cos\varphi(\xi)$的多项式可用余弦函数倍角来表示.然后对方程中出现的 $1\pm\cos(n\varphi(\xi))$式进行因式分解并利用三角函数的性质把方程简化成可直接积分的简单形式,最后利用直接积分法求得原方程的解.求解形如(1)式的位势方程具有非常重要的意义,因为很多重要而著名的方程都可以转化成这种方程.关于这个问题文献[23]中也作了讨论,论述了位势方程(1)的求解方法以及求解时需要满足的条件.文献[13]用一种试探函数法研究了几类具 5 次强非线性项的非线性方程,得到了二类孤波解.作为例子,本文用这种新的函数变换法研究了文献[13]中研究过的 Lienard 方程、广义 PC 方程以及力

* 国家自然科学基金(批准号:40074032)和内蒙古民族大学科研基金(批准号:2002207)资助的课题.

学中重要的一类非线性波方程等几类具 5 次强非线性项的波方程，得到了这些方程的四类显示精确孤波解，其中包括一些新的孤波解. 实践证明此方法简洁实用，适合于求解一大类非线性方程，特别是求解具有高次非线性项的某些非线性方程该方法具有自己独特的优点.

2. 非线性波方程的孤波解

首先求具 5 次强非线性项的 Lienard 方程[13]

$$u_{\xi\xi} + lu(\xi) + mu^3(\xi) + nu^5(\xi) = 0 \tag{4}$$

的显示精确孤波解，其中 l, m, n 是不为零的常数. 对方程(4)积分一次可得

$$u_\xi^2 = -\left(\frac{n}{3}u^6 + \frac{m}{2}u^4 + lu^2\right) + 2c, \tag{5}$$

其中 c 为积分常数. 把函数变换(2)代入方程(5)，并简化可得

$$\frac{6p^4}{n}\sin^2\varphi\varphi_\xi^2 = -\left[32\left(\cos\varphi + \frac{p}{2}q\right)^6 + \frac{12m}{n}p^2\left(\cos\varphi + \frac{p}{2}q\right)^4 + \frac{6l}{n}p^4\left(\cos\varphi + \frac{p}{2}q\right)^2\right] + \frac{3c}{n}p^6. \tag{6}$$

从(3)式可得

$$\cos 6\varphi = 32\cos^6\varphi - 48\cos^4\varphi + 18\cos^2\varphi - 1. \tag{7}$$

比较(6)式和(7)式的右边可知，当 $q = 0$，$p = \sqrt{-\frac{3m}{4l}}$，$n = \frac{3m^2}{16l}$时，把(6)式可简化成

$$\frac{6p^4}{n}\sin^2\varphi\varphi_\xi^2 = -1 - \cos 6\varphi + \frac{3c}{n}p^6. \tag{8}$$

方程(8)的解与积分常数 c 有关，下面分两种情况进行讨论.

情况 1 当 $c = \frac{2n}{3p^6}$时，方程(8)可变成

$$\int\frac{|\sin\varphi|\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - \cos 6\varphi}} = \int\sqrt{\frac{n}{6p^4}}\mathrm{d}\xi. \tag{9}$$

把(9)式中的 $1 - \cos 6\varphi$ 可因式分解为 $1 - \cos 6\varphi = 32\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\right)^2(1 - \cos^2\varphi)$，并代入(9)式简化可得

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\left|\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\right|} = \int\sqrt{\frac{16n}{3p^4}}\mathrm{d}\xi. \tag{10}$$

1)当 $\cos^2\varphi < \frac{1}{4}$时，利用文献[22]中的积分公式，并注意到变换关系 $u = \frac{2}{p}\cos\varphi$ 可得

$$u = \pm\left[-\frac{m}{n}\frac{\mathrm{th}^2\sqrt{\frac{l}{3}}(\xi + \xi_0)}{3 + \mathrm{th}^2\sqrt{\frac{l}{3}}(\xi + \xi_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$(l > 0, m < 0), \tag{11}$$

这是本文得到的 Lienard 方程新的一类孤波解.

2)当 $\cos^2\varphi > \frac{1}{4}$时，利用文献[22]中的积分公式，并注意到变换关系 $u = \frac{2}{p}\cos\varphi$ 可得

$$u = \pm\left[-\frac{m}{n}\frac{\mathrm{cth}^2\sqrt{\frac{l}{3}}(\xi + \xi_0)}{3 + \mathrm{cth}^2\sqrt{\frac{l}{3}}(\xi + \xi_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$(l > 0, m < 0), \tag{12}$$

这也是本文得到的 Lienard 方程新的一类孤波解.

情况 2 当 $c = 0$ 时，方程(8)可变成

$$\int\frac{|\sin\varphi|\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 + \cos 6\varphi}} = \int\sqrt{-\frac{n}{6p^4}}\mathrm{d}\xi. \tag{13}$$

把(13)式中的 $1 + \cos 6\varphi$ 可因式分解为 $1 + \cos 6\varphi = 32\left(\cos^2\varphi - \frac{3}{4}\right)^2\cos^2\varphi$，并代入(13)式简化可得

$$\int\frac{|\sin\varphi|\, d\varphi}{|\cos\varphi|\left|\cos^2\varphi - \frac{3}{4}\right|} = \int\frac{4}{p^2}\sqrt{-\frac{n}{3}}\mathrm{d}\xi. \tag{14}$$

1)当 $\cos^2\varphi < \frac{3}{4}$时，直接积分(14)式，并注意到变换式 $u = \frac{2}{p}\cos\varphi$ 可得

$$u = \pm\left\{-\frac{2l}{m}[1 \pm \mathrm{th}\sqrt{-l}(\xi + \xi_0)]\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$(l < 0, m > 0), \tag{15}$$

这是文献[13]中得到的孤波解(2.14).

2)当 $\cos^2\varphi > \frac{3}{4}$时，直接积分(14)式，并注意到变换式 $u = \frac{2}{p}\cos\varphi$ 可得

$$u = \pm\left\{-\frac{2l}{m}[1 \pm \mathrm{cth}\sqrt{-l}(\xi + \xi_0)]\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$(l < 0, m > 0), \tag{16}$$

这是本文得到的方程(4)新的一类孤波解.

其次，我们求力学中重要的具 5 次强非线性项的波方程[13]

$$u_{tt} - ku_{xx} + pu + qu^3 + su^5 = 0 \tag{17}$$

的孤波解,这里 p,q,s 是不为零的常数.设方程(17)有行波解 $u(x,t)=u(\xi)=u(x-vt)$,代入(17)式可得

$$u_{\xi\xi}+\frac{p}{v^2-k}u(\xi)+\frac{q}{v^2-k}u^3(\xi)+\frac{s}{v^2-k}u^5(\xi)=0\quad(v^2\neq k),\tag{18}$$

与方程(4)比较可知 $l=\frac{p}{v^2-k}$,$m=\frac{q}{v^2-k}$,$n=\frac{s}{v^2-k}$.故方程(17)四类显示孤波解为

$$u=\pm\left[-\frac{q}{s}\frac{\mathrm{th}^2\sqrt{\frac{p}{3(v^2-k)}}(x-vt+\xi_0)}{3+\mathrm{th}^2\sqrt{\frac{p}{3(v^2-k)}}(x-vt+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(p(v^2-k)>0,q(v^2-k)<0,s=\frac{3q^2}{16p}\right),\tag{19}$$

$$u=\pm\left[-\frac{q}{s}\frac{\mathrm{cth}^2\sqrt{\frac{p}{3(v^2-k)}}(x-vt+\xi_0)}{3+\mathrm{cth}^2\sqrt{\frac{p}{3(v^2-k)}}(x-vt+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(p(v^2-k)>0,q(v^2-k)<0,s=\frac{3q^2}{16p}\right),\tag{20}$$

$$u=\pm\left\{-\frac{2p}{q}\left[1\pm\mathrm{th}\sqrt{-\frac{p}{v^2-k}}(x-vt+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(p(v^2-k)<0,q(v^2-k)>0,s=\frac{3q^2}{16p}\right),\tag{21}$$

$$u=\pm\left\{-\frac{2p}{q}\left[1\pm\mathrm{cth}\sqrt{-\frac{p}{v^2-k}}(x-vt+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(p(v^2-k)<0,q(v^2-k)>0,s=\frac{3q^2}{16p}\right).\tag{22}$$

最后,我们研究具 5 次强非线性项的广义 PC 方程[13]

$$u_{tt}-u_{ttxx}-(a_1u+a_3u^3+a_5u^5)_{\xi\xi}=0.\tag{23}$$

该方程是描述弹性杆中纵向应变波传播的一种重要的模型方程.设它的行波解为 $u(x,t)=u(\xi)=u(x-vt)$,并代入方程(23)可得

$$v^2u_{\xi\xi}-v^2u^{(4)}(\xi)-(a_1u+a_3u^3+a_5u^5)_{\xi\xi}=0.\tag{24}$$

若求广义 PC 方程(23)满足条件

$$u_\xi,u_{\xi\xi},u_{\xi\xi\xi}\to0,\ |\xi|\to\infty,\tag{25}$$

且解的渐近值 $c_+=\lim\limits_{\xi\to+\infty}u(\xi)$,$c_-=\lim\limits_{\xi\to-\infty}u(\xi)$满足代数方程

$$(a_1-v^2)x+a_3x^3+a_5x^5=0\tag{26}$$

的孤波解,则 $u(\xi)$满足

$$u_{\xi\xi}+\frac{a_1-v^2}{v^2}u(\xi)+\frac{a_3}{v^2}u^3(\xi)+\frac{a_5}{v^2}u^5(\xi)=0.\tag{27}$$

与方程(4)比较可知 $l=\frac{a_1-v^2}{v^2}$,$m=\frac{a_3}{v^2}$,$n=\frac{a_5}{v^2}$.所以方程(23)满足上述条件的四类显示孤波解为

$$u=\pm\left[-\frac{a_3}{a_5}\frac{\mathrm{th}^2\sqrt{\frac{a_1-v^2}{3v^2}}(x-vt+\xi_0)}{3+\mathrm{th}^2\sqrt{\frac{a_1-v^2}{3v^2}}(x-vt+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(a_1-v^2>0,a_3<0,a_5=\frac{3a_3^2}{16(a_1-v^2)}\right),\tag{28}$$

$$u=\pm\left[-\frac{a_3}{a_5}\frac{\mathrm{cth}^2\sqrt{\frac{a_1-v^2}{3v^2}}(x-vt+\xi_0)}{3+\mathrm{cth}^2\sqrt{\frac{a_1-v^2}{3v^2}}(x-vt+\xi_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(a_1-v^2>0,a_3<0,a_5=\frac{3a_3^2}{16(a_1-v^2)}\right),\tag{29}$$

$$u=\pm\left\{-\frac{2a_1-v^2}{a_3}\left[1\pm\mathrm{th}\sqrt{-\frac{a_1-v^2}{v^2}}\times(x-vt+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(a_1-v^2<0,a_3>0,a_5=\frac{3a_3^2}{16(a_1-v^2)}\right),\tag{30}$$

$$u=\pm\left\{-\frac{2a_1-v^2}{a_3}\left[1\pm\mathrm{cth}\sqrt{-\frac{a_1-v^2}{v^2}}\times(x-vt+\xi_0)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(a_1-v^2<0,a_3>0,a_5=\frac{3a_3^2}{16(a_1-v^2)}\right).\tag{31}$$

我们通过同样的求解过程,可以求出具 5 次强非线性项的导数 Schrödinger 方程、Kundu 方程以及 Ablowitz 方程等其他非线性方程的四类显示孤波解.由于篇幅所限,这里不再进行详细求解.

3. 结　论

总之,以上我们提出一种新的函数变换法,并用此方法求解了几类具 5 次强非线性项的非线性波方

程得到了四类显示精确孤波解.从求解过程来看,本文方法简洁实用适合于求解一大类非线性方程,特别是由于此方法中采用三角函数倍角来代替该函数高次多项式的简化手段,使得此方法对那些具有高次非线性项的非线性方程的求解中具有自己独特的优点.我们用本文方法还研究了等离子体中的 KP 方程、ZK 方程以及广义对称正则长波方程等其他具有重要物理背景的非线性方程得到了它们的孤波解,这些另文讨论.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[2] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353(in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[3] Xu B Z *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1946(in Chinese) [徐炳振等 1998 物理学报 **47** 1946]

[4] Zhang J F 1999 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **16** 4

[5] Fan E G 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409(in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[6] Li Z B and Zhang S Q 1997 *Acta Math*. *Sin*. **17** 81 (in Chinese) [李志斌、张善卿 1997 数学物理学报 **17** 81]

[7] Yang L, Liu J and Yang K 2001 *Phys*. *Lett*. A **278** 267

[8] Parkes E J and Duffy B R 1997 *Phys*. *Lett*. A **229** 217

[9] Zhang G X, Li Z B and Duan Y S 2000 *Sci*. *China* A **30** 1103(in Chinese) [张桂戌、李志斌、段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]

[10] Lu K P, Shi Y R, Duan W S, Zhao J B 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2074(in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山、赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]

[11] Hirota R 1973 *J*. *Math*. *Phys*. **14** 810

[12] Kudryashov N A 1990 *Phys*. *Lett*. A **147** 287

[13] Zhang W G 1998 *Acta Math*. *Appl*. **21** 249(in Chinese) [张卫国 1998 应用数学学报 **21** 249]

[14] Otwinowski M, Paul R and Laidlaw W G 1988 *Phys*. *Lett*. A **128** 483

[15] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Appl*. *Math*. *Mech*. **22** 326

[16] Yan C T 1996 *Phys*. *Lett*. A **224** 77

[17] Yan Z Y, Zhang H Q and Fan E G 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1(in Chinese) [闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]

[18] Yan Z Y, Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1962(in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[19] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[20] Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718 (in Chinese) [刘式达、傅遵涛、刘式适、赵 强 2002 物理学报 **51** 718]

[21] Feng X 2000 *Inter*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 207

[22] Gradshteyn I S and Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals*, *Series*, *and Products* (New York: Academic Press) p152

[23] Das G C, Sarma J, Gao Y T and Uberoi C 2000 *Phys*. *Plasmas* **7** 2374

New solitary wave solutions for nonlinear wave equation with fifth-order stronger nonlinear term*

Naranmandula[1)2)] Wunenboyn[2)] Wang Ke-Xie[1)]

[1)] (*College of Physics*, *Jilin University*, *Changchun* 130023, *China*)

[2)] (*College of Physics and Electromechanics*, *Inner Mongolia University for Nationalities*, *Tongliao* 028043, *China*)

(Received 20 November 2002; revised manuscript received 26 March 2003)

Abstract

A new function-transformation method is proposed and four kinds of explicit exact solitary wave solutions of the Lienard equation, the generalized PC equation, the important nonlinear wave equation in mechanics, which have a fifth-order stronger nonlinear term, are obtained by a combination of the function-transformation method and the direct integral method. The method proposed in this paper can also be applied to other nonlinear equations with higher-order nonlinear terms.

Keywords: function-transformation method, solitary wave solution, direct integral method, nonlinear wave equation

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40074032) and Research Foundation of Inner Mongolia University for Nationalities (Grant No. 2002207).