

利用微脉塞重构腔场的 Wigner 函数^{*}

张智明

(上海交通大学物理系, 上海 200240)

(Max-Planck-Institute for Quantum Optics, Garching 85748, Germany)

(2003 年 1 月 24 日收到, 2003 年 3 月 10 日收到修改稿)

提出了重构腔场 Wigner 函数的一种新方案. 该方案可以用微脉塞来实现. 发现在腔场的 Wigner 函数与原子的布居数之间存在一个简单的关系. 在实验上测得原子的布居数后, 进行一个简单的数值积分, 就可得到腔场的 Wigner 函数. 以单光子 Fock 态和 Schrödinger 猫态为例进行了数值模拟, 发现与用精确公式计算的结果很好地相符.

关键词: 量子态重构, Wigner 函数, 微脉塞

PACC: 4250

量子态的测量和重构是近年来物理学中的一个非常活跃的研究领域^[1-3]. 众所周知, 一个量子态的态矢量或它的某种表示(例如, 密度矩阵、Glauber-Sudarshan P 表示、Q-函数、Wigner 函数等)携带着该量子态的所有信息. 换句话说, 一个量子态的所有性质都可以由它的态矢量或它的某种表示得到. 然而一般来说, 态矢量及其表示不能直接测量, 因此人们希望能通过一些可观测量来构造(重构)态矢量或它的某种表示. 近年来人们对重构电磁场的量子态提出了许多理论方案^[1-13]. 对行波场, 重构方案包括光学零拍层析法^[4, 5]和光子计数法^[6]. 对腔场, 重构方案包括非线性原子零拍探测法^[7]、量子态内窥法^[8]和原子偏转技术等^[9-13].

在实验方面, Smithey 等人^[14]利用光学零拍层析法重构了电磁场的真空态和压缩态的 Wigner 函数. 不久, Breitenbach 等人^[15]和 Schiller 等人^[16]用同样的方法重构了电磁场的真空态和压缩态的 Wigner 函数和密度矩阵. Banaszek 等人^[17]利用光子计数技术测量了真空态和相干态的 Wigner 函数. 真空态、相干态和压缩态的 Wigner 函数在位相空间处处为非负值. 还存在一些别的量子态, 如 Fock 态和 Schrödinger 猫态^[18], 其 Wigner 函数可以取负值, 表明这些态是非经典的. Leibfried 等人^[19]重构了俘获离子振动数态的密度矩阵和 Wigner 函数, 测得了负的 Wigner 函数值. 对行波电磁场, Lvovsky 等人^[20]利用

位相随机的脉冲光学零拍层析法重构了单光子 Fock 态的 Wigner 函数. 对腔电磁场, 利用文献 [10] 提出的方案, Nogues 等人^[21]测量了单光子 Fock 态的 Wigner 函数, 但他们只得到了 Wigner 函数在相空间中一点(坐标原点)的值. 本文提出一种重构腔电磁场量子态的新方案. 利用这种方案, 可以重构腔电磁场的各种量子态在整个相空间的 Wigner 函数.

我们的方案基于微脉塞^[22, 23]. 在一个高品质谐振腔中有一待测的量子电磁场模. 首先, 我们用一个相干经典电磁场使该量子腔模发生位移, 然后向腔中注入一个二能级原子. 在腔中原子与位移后的腔场发生相互作用. 我们的研究发现, 在腔场的 Wigner 函数与原子的布居数之间存在一个简单的关系. 因此可以通过在实验上测量原子的布居数而得到腔场的 Wigner 函数. 下面对我们的方案进行较详细的描述.

设在一个高品质谐振腔中有一单模电磁场模, 其密度算符为 $\rho(0)$. 首先, 我们加一个相干经典场使该量子腔模发生位移, 位移后腔场的密度算符为 $\rho(\alpha) = D^+(\alpha)\rho(0)D(\alpha)$, 这里 $D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ 是位移算符, 其中 a^\dagger 和 a 分别是腔场光子的产生和湮没算符, α 是一个描述外加相干经典场的复数. 然后向腔中注入一个二能级原子. 该原子与位移腔场发生相互作用. 在目前的微脉塞系统中^[22], 谐振腔的品质因子很大, 可以不考虑腔场的衰减, 所

* 国家自然科学基金(批准号 60178001, 10074046)资助的课题.

用的原子处于里德堡态,上能级的寿命很长,可以不考虑原子向其他能级的自发辐射.于是,原子与腔场的相互作用可以用 JC 模型^[24]描述,在相互作用表象中的哈密顿量为($\hbar = 1$)

$$H = g(a^+ \sigma + \sigma^+ a), \quad (1)$$

其中 σ^+ 和 σ 分别为原子的上升和下降算符, g 为原子与腔场的相互作用常数.假设原子初始处在上能态 $|2\rangle$,则系统的初始密度算符为

$$\rho_{a-f}(\alpha, 0) = \rho(\alpha) |2\rangle\langle 2|, \quad (2)$$

在相互作用后,系统的密度算符变为

$$\rho_{a-f}(\alpha, t) = U(t) \rho(\alpha) |2\rangle\langle 2| U^\dagger(t), \quad (3)$$

其中 $U(t) = \exp(-iHt)$ 为系统的时间演化算符.在相互作用后,原子处在上、下能级的概率分别为

$$\begin{aligned} P_2(\alpha, \tau) &= \text{Tr}_{a-f} \{ \rho_{a-f}(\alpha, \tau) |2\rangle\langle 2| \} \\ &= \text{Tr} \{ |2\rangle\langle 2| \rho_{a-f}(\alpha, \tau) |2\rangle\langle 2| \} \\ &= \text{Tr} \{ \rho(\alpha) \cos^2(\tau \sqrt{a^+ a + 1}) \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\alpha) \cos^2(\tau \sqrt{n+1}), \quad (4) \end{aligned}$$

$$P_1(\alpha, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\alpha) \sin^2(\tau \sqrt{n+1}), \quad (5)$$

(4) 式中的 Tr_{a-f} 表示对原子和场变量求迹,而 Tr 表示只对场变量求迹.原子的布居翻转数为

$$K(\alpha, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\alpha) \cos(2\tau \sqrt{n+1}), \quad (6)$$

其中 $\tau = gt$ 为标度时间, $P_n(\alpha) = \langle n | \rho(\alpha) | n \rangle$ 为位移腔场的光子数分布函数.

另一方面,我们知道单模场的 Wigner 函数为^[25]

$$W(\alpha) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P_n(\alpha). \quad (7)$$

比较(6)和(7)式发现,如果能找到一个函数 $f(\tau)$,使得

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \cos(2\tau \sqrt{n+1}) d\tau = (-1)^n,$$

那么则有 $W(\alpha) = \int_0^{\infty} f(\tau) K(\alpha, \tau) d\tau$. 由于原子的布居翻转数 $K(\alpha, \tau)$ 可以用场电离方法进行测量^[22],于是就可以通过数值积分得到腔场的 Wigner 函数 $W(\alpha)$. 因此问题的关键就变成能否找到一个合适的函数 $f(\tau)$. 通过一些试探,我们找到了这样一个

函数 $f(\tau) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cos\left(\frac{\tau^2}{\pi}\right)$, 于是有

$$W(\alpha) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\tau^2}{\pi}\right) K(\alpha, \tau) d\tau. \quad (8)$$

(8) 式是本文的主要结果,它给出了待测腔场的 Wigner 函数 $W(\alpha)$ 与可测的原子布居翻转数 $K(\alpha, \tau)$ 之间的一个简单关系.对相干经典场的每一个取值 α ,在不同的相互作用时间 τ 情况下测量原子的布居翻转数 $K(\alpha, \tau)$,然后进行一个简单的数值积分,就可得到在相空间中一点的 Wigner 函数值.通过改变相干经典场的取值 α ,重复进行上述过程,就可得到在整个相空间中的 Wigner 函数.当然,实验中的相互作用时间 τ 不可能取无穷大,即(8)式积分的上限 ∞ 应该用某个最大的相互作用时间 τ_M 来代替.下面通过具体的例子来说明取 $\tau_M \approx 4\pi$ 就足够了.

首先考虑腔场初始处于单光子 Fock 态的情况.

$$\rho(0) = |1\rangle\langle 1|, \quad (9)$$

对于 Fock 态,我们发现 $P_n(\alpha)$ 只是 α 的模的函数.设 $\alpha = r e^{i\varphi}$, 则 $P_n(\alpha) = P_n(r)$. 具体到单光子 Fock 态,我们求得

$$P_0(r) = \exp(-r^2) r^2, \quad (10)$$

$$P_n(r) = \exp(-r^2) \frac{1}{n!} r^{2n-1} (n - r^2)^2 \quad (n \geq 1).$$

(11)

将(10)(11)式代入(7)式可得到直接计算的 Wigner 函数,如图 1 中实线所示.将(10)(11)式代入(6)式后再代入(8)式可得到模拟的 Wigner 函数,如图 1 中点线所示.可见二者很好地相符. Wigner 函数可以取负值显示了单光子 Fock 态的非经典性.在数值模拟中我们取 $\tau_M = 1.75\pi$. 读者可能会问(8)式积分的上限为 ∞ ,为什么取 $\tau_M = 1.75\pi$ 就够了呢?实际上,我们仔细考查了被积函数的行为,发现当 τ 较大时,被积函数在零附近快速振荡,从而对积分的贡献相互抵消.这也告诉我们,在实验上并不需要很长的相互作用时间.在目前的微脉塞^[22,26]实验中, $\tau_M \approx 4\pi$.

我们再来考虑腔场初始处于 Schrödinger 猫态的情况. Schrödinger 猫态是两个相干态 $|\beta\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 的相干叠加态

$$|\psi(0)\rangle = \{ \chi [1 + \cos\varphi \exp(-2|\beta|^2)] \}^{-1/2} (|\beta\rangle + e^{i\varphi} |\beta\rangle), \quad (12)$$

其中 $\varphi = 0, \pi, \pi/2$ 分别对应于偶相干态、奇相干态和 Yurke-Stoler 相干态.由(12)式可以得到

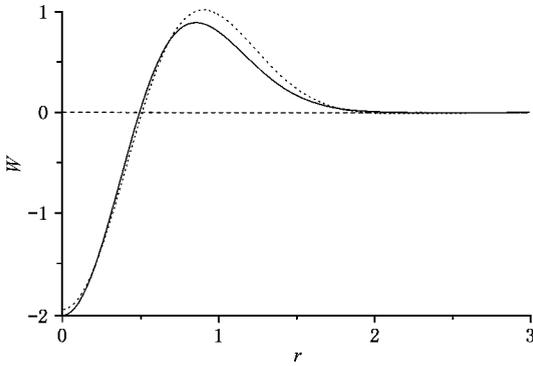


图1 单光子 Fock 态的 Wigner 函数(实线表示用(7)式直接计算的结果;点线表示用(8)式数值模拟的结果)

$$P_n(\alpha) = \{ [1 + \cos\varphi \exp(-2|\beta|^2)] \}^{-1} \frac{1}{n!} \times \{ \exp(-|\alpha + \beta|^2) |\alpha + \beta|^{2n} + \exp(-|\alpha - \beta|^2) |\alpha - \beta|^{2n} + 2\text{Re}\{ \exp[i\varphi - (\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) - (|\alpha|^2 + |\beta|^2)] \mathbf{I}(\alpha - \beta) \times (\alpha^* + \beta^*) \} \}, \quad (13)$$

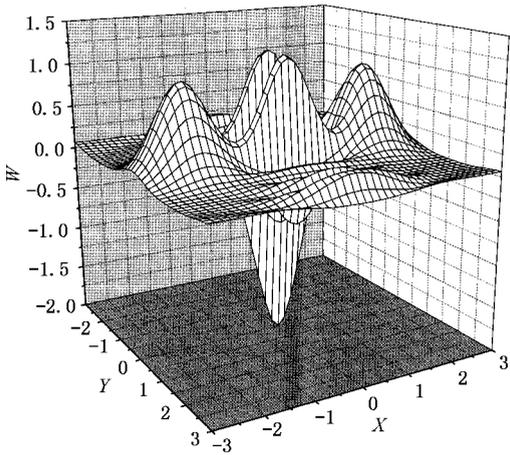


图2 Schrödinger 猫态的 Wigner 函数. 用(7)式直接计算, $\varphi = \alpha$ (奇相干态), $\beta = 2$, $X = \text{Re}\alpha$, $Y = \text{Im}\alpha$

应该注意, 上式中的 α 表示用来位移腔场的相干经典场, 而 β 表示构成 Schrödinger 猫态(12)的相干态. 将(13)式代入(7)式可得到直接计算的 Wigner 函数, 如图2所示; 将(13)式代入(6)式后再代入(8)式可得到模拟的 Wigner 函数, 如图3所示, 在数值模拟中我们取 $\tau_M = 4\pi$. 可见二者也很好相符. Wigner 函数可以取负值显示了 Schrödinger 猫态的非经典性.

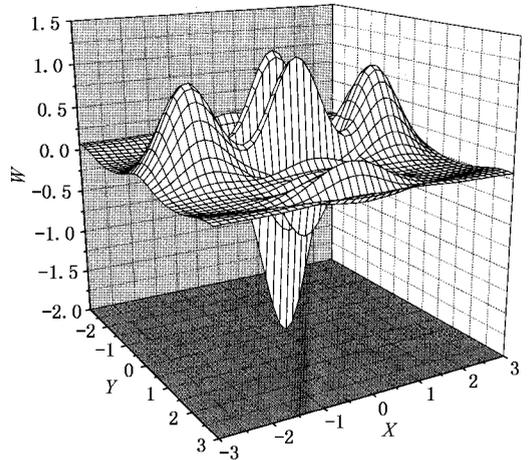


图3 Schrödinger 猫态的 Wigner 函数. 用(8)式数值模拟, $\varphi = \alpha$ (奇相干态), $\beta = 2$, $X = \text{Re}\alpha$, $Y = \text{Im}\alpha$

综上所述, 本文提出了重构腔场 Wigner 函数的一种新方案. 我们发现了腔场 Wigner 函数与原子布居翻转数之间的一个简单关系. 通过利用微脉塞测量原子布居翻转数, 再进行一个简单的数值积分, 就可得到腔场的 Wigner 函数.

本文的部分工作是作者在访问德国马-普量子光学研究所期间完成的. 作者感谢 H. Walther 教授的热情邀请和接待. 感谢 H. Walther 教授, W. P. Schleich 教授, E. Solano, P. Logogovski, 和 H. Mack 等博士多次富有成效的讨论. 感谢马-普学会对作者访德的资助.

- [1] For reviews see: Welsch D - G, Vogel W and Opatrný T 1999 *Progress in Optics*, edited by Wolf E (Amsterdam: Elsevier Science) Vol. XXXIX, p63
Freyberger M, Bardhoff P, Leichtle C, Schrade G, and Schleich W 1997 *Physics World* **10** 41
- [2] Leonhardt U 1997 *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge: Cambridge University Press).

- [3] Schleich W P and Raymer M ed 1997 *J. Mod. Opt.* **44** No. 11 Special issue: Quantum State Preparation and Measurement.
- [4] Vogel K and Risken H 1989 *Phys. Rev. A* **40** 2847
- [5] DAriano G M, Macchiavello C and Paris M G A 1994 *Phys. Rev. A* **50** 4298
DAriano G M, Leonhardt U and Paul H 1995 *Phys. Rev. A* **52** R1801

- Leonhardt U, Paul H and DAriano G M, 1995 *Phys. Rev. A* **52** 4899
- [6] Wallentowitz S and Vogel W 1996 *Phys. Rev. A* **53** 4528
 Banaszek K and Wodkiewicz K 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4344
 Opatrny T and Welsch D G 1997 *Phys. Rev. A* **55** 1462
- [7] Wilkens M and Meystre P 1991 *Phys. Rev. A* **43** 3832
 Dutra S M, Knight P L and Moya-Cessa H 1993 *Phys. Rev. A* **48** 3168
 Dutra S M and Knight P L 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1506
 Kim M S, Antesberger G, Bodendorf C T and Walther H 1998 *Phys. Rev. A* **58** R65
- [8] Bardroff P J, Mayr E and Schleich W P 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4963
 Bardroff P J, Mayr E, Schleich W P, Domokos P, Brune M, Raimond J M and Haroche S 1996 *Phys. Rev. A* **53** 2736
- [9] Freyberger M and Herkommer A M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1952
 Schneider S, Herkommer A M, Leonhardt U and Schleich W P 1997 *J. Mod. Opt.* **44** 2333
- [10] Lutterbach L G and Davidovich L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2547
- [11] Bodendorf C T, Antesberger G, Kim M S and Walther H 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1371
- [12] Franca Santos M, Lutterbach L G, Dutra S M, Zagury N and Davidovich L 2001 *Phys. Rev. A* **63** 033813
- [13] Ahmad M, Qamar S and Zubairy M S 2001 *Phys. Rev. A* **64** 023811
 Franca Santos M, Solano E and Matos Filho R L de 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 093601
- [14] Smithey D T, Beck M, Raymer M G and Faridani A 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1244
 Smithey D T, Beck M, Cooper J, Raymer M G and Faridani A 1993 *Phys. Scr. T* **48** 35
 Smithey D T, Beck M, Cooper J and Raymer M G 1993 *Phys. Rev. A* **48** 3159
- [15] Breitenbach G, Muller T, Pereira S F, Poizat J-Ph, Schiller S and Mlynek J 1995 *J. Opt. Soc. Am. B* **12** 2304
 Breitenbach G and Schiller S 1997 *J. Mod. Opt.* **44** 2207
 Breitenbach G, Schiller S and Mlynek J 1997 *Nature* **387** 471
- [16] Schiller S, Breitenbach G, Pereira S F, Muller T and Mlynek J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2933
- [17] Banaszek K, Radzewicz C and Wodkiewicz K 1999 *Phys. Rev. A* **60** 674
- [18] Buzek V and Knight P L 1995 *Progress in Optics*, edited by Wolf E (Amsterdam: North-Holland) Vol. XXXIV, p. 1.
- [19] Leibfried D, Meekhof D M, King B E, Monroe C, Itano W M and Wineland D J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4281
- [20] Lvovsky A I, Hansen H, Aichele T, Benson O, Mlynek J and Schiller S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 050402
- [21] Nogues G, Rauschenbeutel A, Osnaghi S, Bertet P, Brune M, Raimond J M, Haroche S, Lutterbach L G and Davidovich L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 054101
- [22] For reviews see: Raitheil G, Wagner C, Walther H, Narducci L M and Scully M O 1994 in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, edited by Berman P (New York: Academic) suppl. 2, p. 56
 Scully M O and Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [23] Zhang Z M *et al* 1999 *Phys. Rev. A* **59** 808
 Zhang Z M *et al* 1999 *Phys. Rev. A* **60** 3321
 Zhang Z M *et al* 1999 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **32** 4013
 Zhang Z M *et al* 2000 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **33** 2125
 Zhang Z M *et al* 1999 *Acta Physica Sinica* (Overseas Edition) **8** 571
 Zhang Z M *et al* 2000 *Chinese Physics* **9** 900
 Zhang Z M *et al* 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 223
 Liang W Q *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2345 (in Chinese) 梁文青等 2001 物理学报 **50** 2345]
 Wu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1925 (in Chinese) 吴曙东等 2001 物理学报 **50** 1925]
- [24] For a review see: Shore B W and Knight P L 1993 *J. Mod. Opt.* **40** 1195
 Yang X, Wu Y, and Li Y, 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4545
- [25] Cahill K E and Glauber R J 1969 *Phys. Rev.* **177** 1857; **177** 1882
- [26] Varcoe B T H, Brattke S, Weidinger M and Walther H 2000 *Nature* **403** 743
 Brattke S, Varcoe B T H and Walther H 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3534

Reconstructing the Wigner function of cavity fields with the micromaser^{*}

Zhang Zhi-Ming

(*Department of Physics , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 , China*)

(*Max-Planck-Institute for Quantum Optics , Garching 85748 , Germany*)

(Received 24 January 2003 ; revised manuscript received 10 March 2003)

Abstract

A scheme for reconstructing the Wigner function of cavity fields is proposed , and this scheme can be realized with the micromaser. We find that there is a simple relation between the Wigner function of cavity fields and the atomic populations. Therefore , we can reconstruct the Wigner function of cavity fields by measuring the atomic populations in the micromaser experiments. We test our theory with the one-photon Fock state and the Schrodinger cat state , and find that the results are rather good.

Keywords : reconstruction of quantum states , Wigner function , micromaser

PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60178001 and 10074046).