

# 压缩真空场与原子非线性作用过程中 的纠缠与消纠缠<sup>\*</sup>

黄燕霞<sup>1)2)</sup> 赵朋义<sup>2)</sup> 黄 熙<sup>3)</sup> 詹明生<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 湖北师范学院物理系, 黄石 435002)

<sup>2)</sup> 中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071)

<sup>3)</sup> 中国科学院近代物理研究所, 兰州 730000)

(2002 年 12 月 31 日收到, 2003 年 3 月 10 日收到修改稿)

用 Von Neumann 熵研究了附加克尔介质的压缩真空场与二能级原子依赖强度耦合相互作用量子体系的量子纠缠特性. 讨论了初始压缩真空场的压缩度以及克尔非线性作用的强度对该量子体系纠缠特性的影响. 结果表明, 克尔介质的非线性作用的强弱可以改变体系量子纠缠的周期性. 在初始压缩度较大 ( $r = 5$ ) 时, 克尔介质的非线性作用可导致原子与场持续地处于最大纠缠态, 无消纠缠态或持续地处于消纠缠态.

关键词: 压缩真空态, 克尔介质, 依赖强度耦合 J-C 模型, Von Neumann 熵, 量子纠缠

PACC: 4250, 0365

## 1. 引 言

光场与原子相互作用系统的量子性质是量子光学研究的主要内容之一, 尤其反映光场与原子关联效应的场(原子)熵演化规律的研究, 正日益引起人们的重视. 熵已被作为研究量子系统动力学特性的重要工具, 它不仅灵敏地度量量子态的纯度, 还被用于描述量子系统的纠缠程度<sup>[1,2]</sup>, 在量子信息领域有着广泛的应用. 另一方面, 量子纠缠是量子力学最显著的特征之一, 如果两个系统是纠缠的, 则整个系统的态矢不能分离为两个子系统的态的直积. 在这种情况下, 两个子系统不再是独立的, 即使它们在空间上是远离的. 对一个子系统的测量, 不仅能给出另外一个子系统的信息, 而且还提供了对这个子系统进行操纵的可能性. 因此, 原子-光场纠缠特性的研究对原子、光场量子态的制备以及原子和光场的量子信息处理都有十分重要的意义. 虽然已有许多作者研究了各种 Jaynes - Cummings 模型中光场(原子)熵的演化特性<sup>[3-13]</sup>, 但都是研究初始光场为相干光场的情况, 而压缩真空光场不仅反映了压缩态的本质属性, 而且在连续变量的量子保密通信中有着重要的应用. 最近, 已有作者研究了压缩真空场与原

子体系作用过程中光场的量子特性<sup>[14-17]</sup>, 本文则用 Von Neumann 熵研究克尔介质中压缩真空场与二能级原子依赖强度耦合相互作用量子体系的量子纠缠特性, 讨论初始压缩真空场的压缩度以及克尔非线性作用的强度对该量子体系纠缠特性的影响, 得到了一些新的结果.

## 2. 理论模型及态矢

考虑一个二能级原子处在一个充满克尔介质的高  $Q$  腔中, 克尔介质与光场作用在绝热近似下可用非线性谐振子描述, 而二能级原子和光场的耦合依赖于光场的强度. 在旋波近似和绝热近似下, 系统的哈密顿量为<sup>[18-20]</sup>

$$H = \omega a^\dagger a + \omega_0 S_z + \chi (a^\dagger)^2 a^2 + g(S_+ a \sqrt{a^\dagger a} + \sqrt{a^\dagger a} a a^\dagger S_-), \quad (1)$$

式中  $a^\dagger, a$  为频率  $\omega$  的光场的产生和湮没算符;  $S_z$  和  $S_\pm$  为原子的反转和跃迁算符,  $\omega_0$  为原子的跃迁频率;  $g$  为原子和场的耦合系数,  $\chi$  为克尔介质三阶非线性极化率的色散部分, 代表克尔介质与光场非线性相互作用的强弱.

设初始时刻原子处于激发态  $|e\rangle$ , 场处于压缩真空态

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10074072)及湖北省高校科研基金重点项目(批准号: 2000B08010)资助的课题.

$$\begin{aligned}
 |\psi_F(0)\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} |2n\rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-e^{i\theta} \text{th} r)^n}{2^n \cdot n!} \left( \frac{(2n)!}{\text{ch} r} \right)^{1/2} |2n\rangle \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中  $r$  为表征光场压缩程度的压缩因子,  $\theta$  为压缩方向角, 为简便起见, 本文取  $\theta = 0$ , 系统在初始时刻的态矢为

$$|\psi(0)\rangle = |e\rangle \otimes \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} |2n\rangle. \quad (3)$$

在相互作用表示中, 在共振情况下 ( $\omega = \omega_0$ ) 可求得系统在任意时刻的态矢为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n}(t)|e, 2n\rangle + b_{2n+1}(t)|g, 2n+1\rangle], \quad (4)$$

$$a_{2n}(t) = e^{-i\chi^2 4n^2 t} F_{2n} \left( \cos \Omega_{2n} t + \frac{i\chi 2n}{\Omega_{2n}} \sin \Omega_{2n} t \right), \quad (5a)$$

$$b_{2n+1}(t) = -ie^{-i\chi^2 4n^2 t} F_{2n} \frac{g(2n+1)}{\Omega_{2n}} \sin \Omega_{2n} t. \quad (5b)$$

这里  $\Omega_{2n} = (4\chi^2 n^2 + g^2(2n+1)^2)^{1/2}$  为原子的拉比振荡频率.

### 3. 光场(原子)熵

光场(原子)的熵可以由其约化密度算符定义

$$S_{K(A)}(t) = -\text{Tr}_{K(A)} \{ \rho_{K(A)}(t) \ln [ \rho_{K(A)}(t) ] \}, \quad (6)$$

$$\rho_{K(A)}(t) = \text{Tr}_{K(F)} \{ \rho(t) \}, \quad (7)$$

式中  $\rho(t)$  为光场—原子全系统的密度算符. 下标  $K(A)$  表示光场(原子). 因为光场、原子初始时刻无关联地处于纯态, 即  $|\psi(0)\rangle = |\psi_F(0)\rangle \otimes |\psi_A(0)\rangle$ , 则光场—原子全系统的熵  $S$  为零, 且不随时间演化. 根据熵的 Araki-lieb 不等式

$$|S_F(t) - S_A(t)| \leq S(t) \leq S_F(t) + S_A(t). \quad (8)$$

在  $t > 0$  的任何时刻, 光场与原子的熵相等:  $S_F(t) = S_A(t)$ . 因此, 可用上述定义的原子(场)熵作为原子—场系统纠缠的度量. 利用(4)(5)式, 得到场的约化密度矩阵为

$$\begin{aligned}
 \rho_F(t) &= \text{Tr}_A \{ |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \} \\
 &= |c\rangle \langle c| + |s\rangle \langle s|, \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |c\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(t) |2n\rangle, \\
 |s\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(t) |2n+1\rangle, \quad (10)
 \end{aligned}$$

则有

$$|\psi(t)\rangle = |c\rangle |e\rangle + |s\rangle |g\rangle, \quad (11)$$

即原子与场一般处于纠缠态, 此时对原子进行探测, 若原子处于  $|e\rangle$  态, 则场处于态

$$|\psi_c(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(t) |2n\rangle,$$

即偶数光子态的叠加态, 若原子处于  $|g\rangle$  态, 则场处于

$$|\psi_g(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1}(t) |2n+1\rangle,$$

即奇数光子数态的叠加态. 用文献[3]介绍的方法, 场熵可用场约化密度算符的本征值  $\pi^\pm$  表示为

$$S_F(t) = -\pi^+ \ln \pi^+ - \pi^- \ln \pi^-. \quad (12)$$

经过计算得到  $\pi^+ = \langle c|c\rangle$ ,  $\pi^- = \langle s|s\rangle$ ,  $\pi^\pm$  也是原子约化密度算符的本征值, 系统的态矢(4)式也可用 Schmidt 分解形式表示为<sup>[21]</sup>

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\pi^+} |\varphi_A^+\rangle |\psi_F^+\rangle + \sqrt{\pi^-} |\varphi_A^-\rangle |\psi_F^-\rangle. \quad (13)$$

这里  $|\varphi_A^\pm\rangle$ ,  $|\psi_F^\pm\rangle$  分别是场和原子的约化密度算符对应于本征值  $\pi^\pm$  的本征矢, 经过计算可知,

$$|\varphi_A^+\rangle = |e\rangle, \quad |\varphi_A^-\rangle = |g\rangle,$$

$$|\psi_F^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi^+}} |c\rangle, \quad |\psi_F^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi^-}} |s\rangle,$$

因此对于本文讨论的量子系统(13)式又回到了(11)式.

### 4. 计算结果与讨论

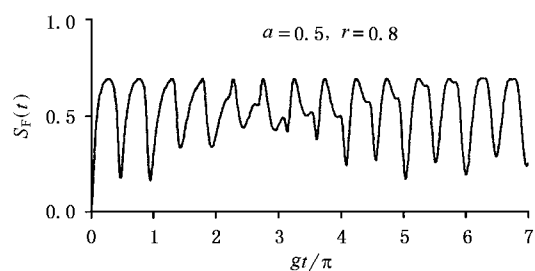
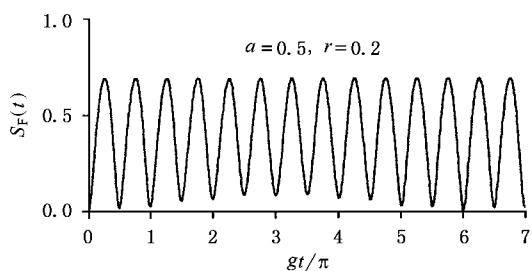
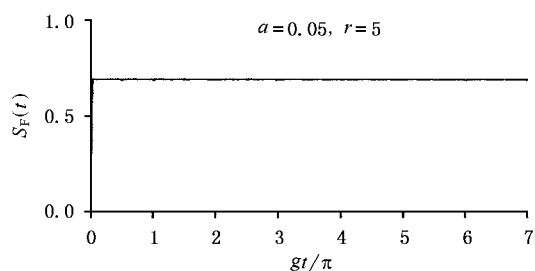
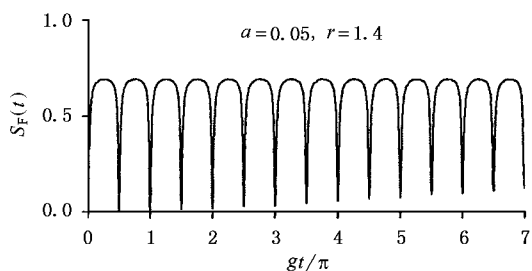
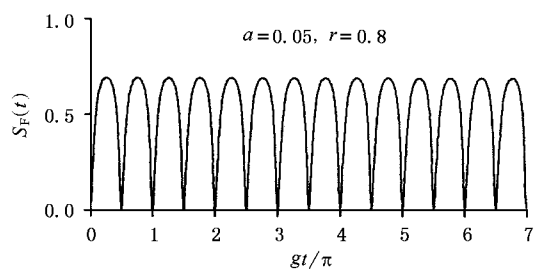
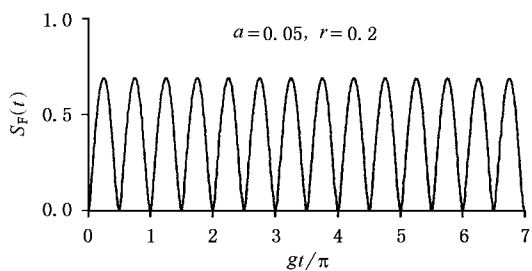
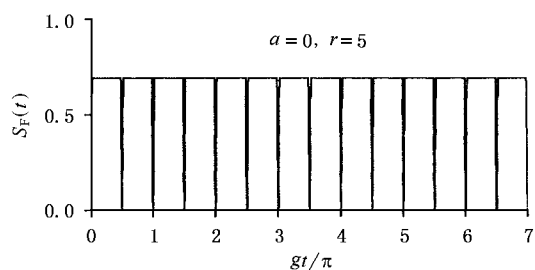
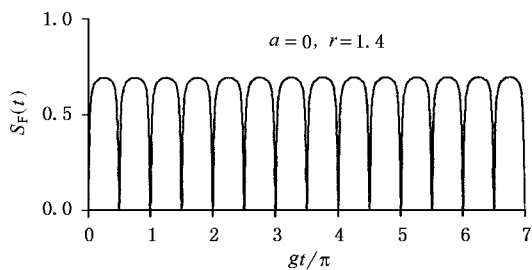
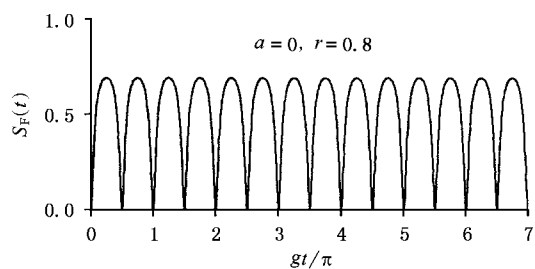
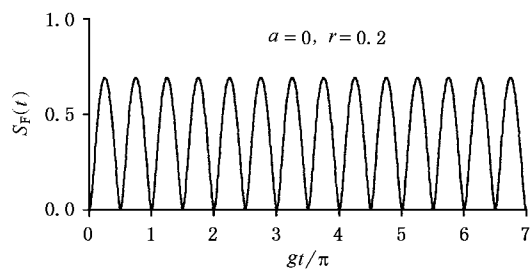
对反映克尔介质非线性相互作用强弱的参数  $a = \frac{\chi}{g}$  及表征初始光场压缩程度的压缩因子  $r$  取一系列大小不同的值对(12)式确定的场熵进行数值计算, 并对标度时间  $gt$  作图得到图 1. 从图 1 可以发现如下现象:

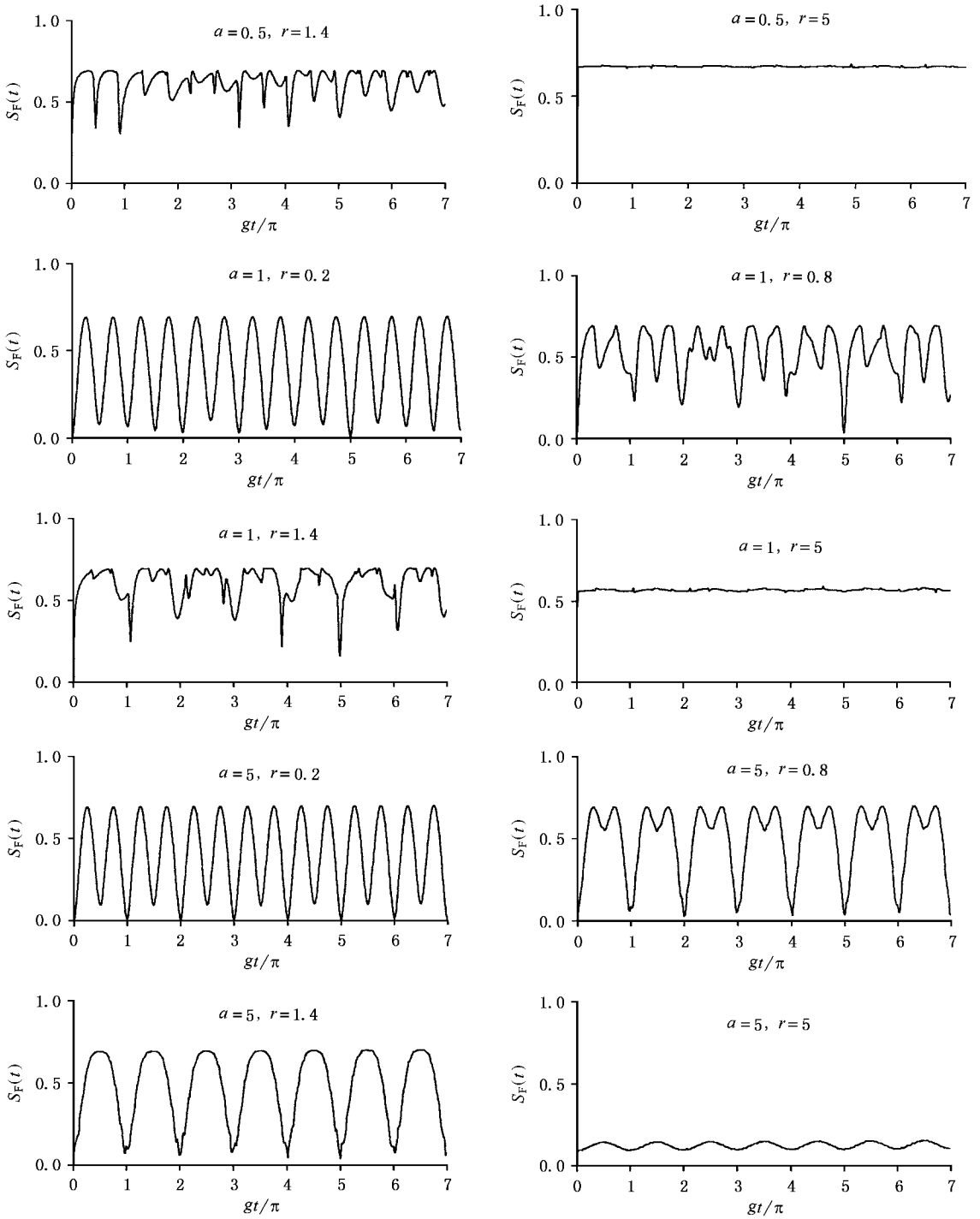
1) 当  $a = \frac{\chi}{g} = 0$ , 即无克尔介质时, 纠缠度即场

熵的演化具有严格的周期性, 周期为  $\frac{\pi}{2}$ . 在  $gt = \frac{k\pi}{2}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 时, 场熵都周期地演化到零, 此时, 原子和场周期地瞬间消纠缠, 各自都处于纯态. 对此现象我们作如下解析讨论:

在  $gt = k\pi + \frac{\pi}{2}$  时, 由(4)式可知系统的态矢为

$$|\psi(k\pi + \frac{\pi}{2})\rangle = |g\rangle \otimes i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_{2n} |2n+1\rangle, \quad (14)$$



图 1 场熵  $s_f(t)$

此时

$$\begin{aligned}\pi^+ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_{2n}^2 \cos^2 \left[ (2n+1) \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = 0, \\ \pi^- &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_{2n}^2 \sin^2 \left[ (2n+1) \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = 1 \\ S_F \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) &= 0,\end{aligned}$$

原子和光场消纠缠，

$$\left| \psi \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right>_A = |g\rangle$$

$$\left| \psi \left( k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right>_F = i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_{2n} |2n+1\rangle,$$

此时原子处于基态，场处于与初态正交的奇数光子数的叠加态，经过计算，此时的光场已无正交相位压缩特性。

在  $gt = k\pi$  时，由(4)式可知系统的态矢为

$$|\psi(k\pi)\rangle = |e\rangle \otimes \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} |2n\rangle = |\psi(0)\rangle,$$

此时  $\pi^- = 0$ ,  $\pi^+ = 1$ ,  $S_F = 0$ ，原子和场仍然消纠缠，且原子和场都回到了初态。综上所述，在  $gt = k\pi$  和  $gt = k\pi + \frac{\pi}{2}$  时，虽然系统都处于可分离态，但原子和场却都处于不同的消纠缠态。

在其他时刻， $S_F \neq 0$ ，系统的态矢不能写成两子系态矢的直积形式，系统处于纠缠态。特别是  $gt = \frac{2k+1}{4}\pi$ ,  $\pi^- = \pi^+ = \frac{1}{2}$ ,  $S_F = \ln 2$ ，达到最大值，原子和场处于最大纠缠态。由(4)式得到系统的态矢

$$\begin{aligned}\left| \psi \left( (2k+1) \frac{\pi}{4} \right) \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |e\rangle \otimes \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} |2n\rangle \right. \\ &\quad \left. - |g\rangle \otimes i \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} |2n+1\rangle \right],\end{aligned}\tag{15}$$

即原子-场处于 EPR 态，类似于纠缠的 Schrödinger “猫态”<sup>[22]</sup>。

随着压缩因子  $r$  值的增大，原子-场处于 EPR 态的时间增长，当  $r = 5$  时，除了  $gt = \frac{k\pi}{2}$  这些消纠缠时刻以外，在其余的时间里原子-场都处于最大纠缠态。

2) 原子和场的纠缠度对克尔介质的非线性相互

作用在初始压缩真空场的压缩度较大时，非常敏感。当  $a = 0.05$  时，尽管此时克尔介质与场为弱的非线性耦合，场熵的演化行为在  $r$  值较小时几乎没有什么变化，但随着  $r$  值的增大，克尔介质的作用越来越明显，特别是在  $r = 5$  时，场熵的演化行为变化很大，此时， $S_F(t) = \ln 2$ ，原子和场永不消纠缠，并且总是处于最大纠缠态，即 EPR 态，且原子和场的纠缠度不随时间变化。原子和场的这种纠缠特性在量子信息领域有着潜在的应用。

3) 随着克尔介质非线性作用的增强，场熵即原子与场的纠缠度演化的周期性被破坏，特别是在初始压缩真空场的压缩度  $r = 5$  时，原子和场仍然持续地高度纠缠，且纠缠度不随时间演化，原子和场处于一种不消纠缠态，只是纠缠度随着克尔介质非线性作用的增强而减小。

4) 随着克尔介质非线性作用的进一步增强，场熵的演化又逐渐形成周期性。当  $a = \frac{\chi}{g} = 5$  时，即克尔介质与光场强耦合相互作用时，场熵的演化又有了周期性，且周期为  $\pi$ 。当  $gt = k\pi$  时， $S_F(k\pi) \approx 0$ ，即原子和场又周期地消纠缠。在  $r = 5$  时， $S_F(t) \approx 0$ ，即原子和场持续消纠缠，经过计算可知，在  $a = 5$ ,  $r = 5$  的条件下，原子的反转  $W(t) = 2 |\psi(t)\rangle \langle S_2 | \psi(t)\rangle = 1 - 2 |s\rangle \langle s| \approx 1$ ， $\pi^- \approx 0$ ,  $\pi^+ \approx 1$ ，此时  $|\psi(t)\rangle \approx |e\rangle \otimes |c\rangle$ ，即原子与场为可分离态，原子几乎持续地回到初始的激发态，但场并没有回到初态，而是处于态  $|c\rangle$  上。由此可见，克尔介质的强非线性相互作用可导致原子与场的持续消纠缠，此时，原子被俘获在初态，光场只与克尔介质耦合。

## 5. 结 论

综上所述，无克尔介质时，原子和场周期地纠缠和消纠缠。克尔介质的非线性作用的强弱可以改变体系量子纠缠的周期性。在初始压缩度较大( $r = 5$ )的情况下，克尔介质的弱非线性作用可以导致原子和场持续地处于纠缠态，最大纠缠态，且纠缠度不随时间变化，克尔介质的强非线性作用则导致原子和场持续地处于消纠缠态。

- [ 1 ] Bennett C H , Divincenzo D P , Smolin J A *et al* 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3824
- [ 2 ] Shi M J , Du J F , Zhu D P 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 825 ( in Chinese ) [ 石名俊、杜江峰、朱栋培 2000 物理学报 **49** 825 ]
- [ 3 ] Phoenix S J D and Knight P L 1988 *Ann. Phys. ( N. Y. )* **186** 381
- [ 4 ] Phoenix S J D and Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023
- [ 5 ] Phoenix S J D and Knight P L 1990 *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 116
- [ 6 ] Buzek V *et al* 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8190
- [ 7 ] FU H , Solomon A I 2002 *J. Mod. Opt.* **49** 259
- [ 8 ] Fang M F , Zhou P 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 570 ( in Chinese ) [ 方卯发、周 鹏 1994 物理学报 **43** 570 ]
- [ 9 ] Fang M F 1995 *Acta Opt. Sin.* **15** 296 ( in Chinese )
- [ 10 ] Zhang J T *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* ( Overseas Edition ) **8** 261
- [ 11 ] Huang Y X , Guo G C 1996 *Acta Phys. Sin.* ( Overseas Edition ) **5** 901
- [ 12 ] Huang Y X , Wang Y , Zhan M S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2249 ( in Chinese ) [ 黄燕霞、汪 毅、詹明生 2002 物理学报 **51** 2249 ]
- [ 13 ] Huang Y X , Guo G C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 49 ( in Chinese ) [ 黄燕霞、郭光灿 1999 物理学报 **48** 49 ]
- [ 14 ] Huang Y X , Guo G C 1996 *Acta Sin. Quan. Opt.* **2** 97 ( in Chinese )
- [ 15 ] Huang C J *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 473 ( in Chinese ) [ 黄春佳等 2001 物理学报 **50** 473 ]
- [ 16 ] Huang C J *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1978 ( in Chinese ) [ 黄春佳等 2002 物理学报 **51** 1978 ]
- [ 17 ] Wang C Z , Fang M F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1989 ( in Chinese ) [ 王成志、方卯发 2002 物理学报 **51** 1989 ]
- [ 18 ] Xu D H , Peng J S , Tian Y H and Han L B 2000 *Acta Opt. Sin.* **20** 56 ( in Chinese )
- [ 19 ] Buzek V , Jex I 1990 *Opt. Commun.* **78** 425
- [ 20 ] Joshi A , Puri R R 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5056
- [ 21 ] Knoll L , Orłowski A 1995 *Phys. Rev. A* **51** 1622
- [ 22 ] Brune M *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4887

# Entanglement and disentanglement in the nonlinear interaction between squeezing vacuum state field and atom<sup>\*</sup>

Huang Yan-Xia<sup>1,2)</sup> Zhao Peng-Yi<sup>2)</sup> Huang Xi<sup>3)</sup> Zhan Ming-Sheng<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>*( Department of Physics , Hubei Normal University , Huangshi 435002 , China )*

<sup>2)</sup>*( State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics , Wuhan Institute of Physics and Mathematics , Chinese Academy of Sciences , Wuhan 430071 , China )*

<sup>3)</sup>*( Institute of Modern Physics , Chinese Academy of Sciences , Lanzhou 730000 , China )*

( Received 31 December 2002 ; revised manuscript received 10 March 2003 )

## Abstract

The properties of the entanglement in the intensity-dependent coupling interaction between squeezing vacuum state field and atom with an additional Kerr medium are investigated by using the von Neumann entropy. The influences of nonlinear interaction intensity of Kerr medium and the squeezing degree of initial squeezing vacuum state field on the entanglement of the quantum system are discussed. The results show that the nonlinear interaction of Kerr medium can result in the generation of the maximally entangled state, disentangled-free state or disentangled state, and the degree of entanglement is stationary.

**Keywords** : squeezing vacuum state , Kerr medium , intensity-dependent coupling J-C model , von Neumann entropy , quantum entanglement

**PACC** : 4250 , 0365

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10074072 ) , and University Key Science Foundation of Hubei province , China ( Grant No. 2000B08010 ).