

# 柱坐标系中截断光束的广义 $M^2$ 因子\*

罗时荣<sup>1)</sup> 吕百达<sup>1)2)</sup>

<sup>1)</sup> 四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

<sup>2)</sup> 激光技术国家重点实验室(华中科技大学), 武汉 430074)

(2003 年 4 月 17 日收到, 2003 年 6 月 11 日收到修改稿)

推导出截断圆对称光束二阶矩的传输方程, 它们与无截断光束的二阶矩满足相似的传输定律. 因此, 基于广义截断二阶矩方法, 将直角坐标系中截断二维光束的二阶矩特征参数推广到柱坐标系中的截断圆对称光束, 类似方法定义的广义  $M^2$  因子( $M_C^2$  因子)是一个传输不变量. 对理论的自洽性作了物理解释. 推导出柱坐标系中截断超高光束的二阶矩参数和  $M_C^2$  因子. 对一些有意义的特殊情况作了讨论, 并以数值计算例作了说明.

关键词: 光束描述, 截断光束, 圆对称性, 广义截断二阶矩(GTSM), 广义  $M^2$  因子( $M_C^2$  因子)

PACC: 4255, 4200

## 1. 引 言

基于光强二阶矩方法对激光束的描述<sup>[1]</sup>已取得了许多进展, 包括光束传输方程和传输不变量(光束传输因子, 即  $M^2$  因子)等, 并总结于国际标准化组织(ISO)文件中<sup>[2]</sup>. 但是, 这一描述方法成立的物理条件是无硬边光阑限制的近轴光束和一阶光学系统. 对有硬边光阑限制的截断光束和系统, 因空间频率域中的二阶矩发散而被排除在 ISO 文件之外. 然而, 实际的激光束在产生和传输变换中或多或少要受到硬边光阑的限制, 为使 ISO 的标准能用于指导实践, 国内外激光科学家和工程师们已开展了许多工作, 相继提出了描述受硬边光阑限制的截断光束的多种方法, 其中有广义截断二阶矩法(GTSM)<sup>[3,4]</sup>, 渐进近似法<sup>[5]</sup>和自收敛束宽法<sup>[6]</sup>. 与其他方法比较, GTSM 法的主要优点是能得出形式上与无截断光束类似的传输公式, 因此对应的广义  $M^2$  因子( $M_C^2$  因子)是一个传输不变量, 并且对常用光束  $M_C^2$  因子可用解析公式表示, 便于进行直观的物理分析. 但这一方法仅能用于二维( $x, z$ )光束, 不如渐进近似法和自收敛束宽法那样容易推广到三维情况<sup>[7]</sup>. 将二维直角坐标系中的 GTSM 法推广到三维柱坐标系中遇到如何使理论自洽的困难, 以致长期未能解决. 本文采用截断平面波的  $M_C^2 = 4\sqrt{3}$  作为拟合参数解决了

理论的自洽性, 推导出柱坐标系下截断圆对称光束的传输公式和  $M_C^2$  因子, 并以有代表性的一类光束—超高光束为例, 给出了柱坐标下截断超高光束的  $M_C^2$  因子的解析公式, 截断高斯光束和平面波的  $M_C^2$  因子都可作为其特例而得出.

## 2. 柱坐标系中截断二阶矩的传输方程和广义 $M^2$ 因子( $M_C^2$ 因子)

设场分布为  $E(r, z=0)$  的圆对称光束入射到位于  $z=0$  面上半径为  $a$  的圆孔光阑上, 则光束在  $z=0$  面上空域中的二阶矩定义为<sup>[3]</sup>

$$r^2_{00} = \frac{1}{I_0} \int_0^a r^2 |E(r, 0)|^2 r dr, \quad (1)$$

式中

$$I_0 = \int_0^a |E(r, 0)|^2 r dr \quad (2)$$

是入射到光阑内的总功率. 因光束和系统的圆对称性(1)式中对角量的依赖关系消失, 且(1)式中已设一阶矩为 0. 为了克服发散困难, 空间频率域中  $z=0$  处的二阶矩定义为

$$p^2_{00} = \frac{1}{k^2 I_0} \int_0^a |E'(r, 0)|^2 r dr + \frac{16}{3k^2 I_0} |E(a, 0)|^2, \quad (3)$$

\* 国家高技术激光技术主题和华中科技大学激光技术国家重点实验室基金资助的课题.

式中的“ $'$ ”表示对宗量求导(下同).需要指出的是,

(3) 式中等式右边第二项  $|E(a, 0)|^2$  前系数  $\frac{16}{3k^2 I_0}$  的选取是考虑了公式的自治性, 详见后. 交叉矩定义为<sup>[3]</sup>

$$r p_0 = \frac{1}{2ikI_0} \int_0^a \{r [E'(r, 0)]^* E(r, 0) - r E'(r, 0) E^*(r, 0)\} r dr. \quad (4)$$

由 Collins 公式<sup>[8]</sup>, 光阑后任意面  $z$  处的场分布为

$$E(r_2, z) = \frac{ik}{B} \exp\left(-\frac{ikDr_2^2}{2B}\right) \int_0^a E(r, 0) \times \exp\left[-\frac{ikAr^2}{2B}\right] J_0\left(\frac{kr_2 r}{B}\right) r dr, \quad (5)$$

式中的  $A, B, D$  是光阑后光学系统传输矩阵

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  的矩阵元. 类似于文献 [3] 中的处理方法,

仿照 (3) 式定义光束在光阑后  $z$  处空域中的二阶矩

$$r_2^2 = \frac{1}{k^2 I_0} \int_0^{a_1} |h'(r_1)|^2 r_1 dr_1 + \frac{16}{3k^2 I} |h(a_1)|^2, \quad (6)$$

式中

$$a_1 = a/B, r_1 = r/B, \\ h(r_1) = \frac{iB}{\lambda} \exp\left(-\frac{ikABr_1^2}{2}\right) E(Br_1, 0),$$

$$I = \int_0^{a_1} |h(r_1)|^2 r_1 dr_1 = I_0/\lambda^2.$$

将  $a_1, r_1$  和  $h(r_1)$  代入 (6) 式, 并利用 (1) (3) 和 (4) 式, 略去中间推导过程, 最后得

$$r_2^2 = A^2 r_0^2 + B^2 p_0^2 + 2AB r p_0. \quad (7)$$

光阑后  $z$  处的交叉矩为

$$r_2 p_2 = \frac{1}{2ikI} \int_0^{a_1} \{r_1 h^*(r_1) h'(r_1) - r_1 [h'(r_1)]^* h(r_1)\} r_1 dr_1 + \frac{D r_2^2}{B}. \quad (8)$$

将  $h(r_1)$  代入 (8) 式, 类似的推导得

$$r_2 p_2 = AC r_0^2 + BD p_0^2 + (AD + BC) r p_0. \quad (9)$$

对 (5) 式进行零阶汉克尔变换, 得到光束在光阑后  $z$  处空间频率域中的场分布

$$\tilde{E}(p_2, z) = 2\pi \exp\left[\frac{ikBp_2^2}{2D}\right] \frac{1}{D} \int_0^a E(r, 0)$$

$$\times \exp\left[-\frac{ikCr^2}{2D}\right] J_0\left(\frac{krp_2}{D}\right) r dr. \quad (10)$$

仿照 (3) 式定义光束在光阑后  $z$  处空间频率域中的二阶矩

$$p_2^2 = \frac{1}{k^2 I} \int_0^{\tilde{a}_1} |\tilde{h}'(\tilde{r}_1)|^2 \tilde{r}_1 d\tilde{r}_1 + \frac{16}{3k^2 I} |h(\tilde{a}_1)|^2, \quad (11)$$

式中

$$\tilde{r}_1 = r/D, \tilde{a}_1 = a/D,$$

$$\tilde{h}(\tilde{r}_1) = D \exp\left[-\frac{ikCD\tilde{r}_1^2}{2}\right] E(D\tilde{r}_1, 0),$$

$$\tilde{I} = \int_0^{\tilde{a}_1} |\tilde{h}(\tilde{r}_1)|^2 \tilde{r}_1 d\tilde{r}_1 = I_0.$$

将  $\tilde{r}_1, \tilde{a}_1$  和  $\tilde{h}(\tilde{r}_1)$  代入 (11) 式, 经推导得

$$p_2^2 = C^2 r_0^2 + D^2 p_0^2 + 2CD r p_0. \quad (12)$$

(7) (9) 和 (12) 式表明, 圆对称光阑光学系统中光束的广义截断二阶矩与通常的二阶矩满足相似的传输规律. 由此可知, 对截断光束存在一个光束传输不变量——光束传输因子 ( $M_G^2$  因子)

$$M_G^2 = k \sqrt{r_2^2 p_2^2 - r_2 p_2^2} \\ = k \sqrt{r_0^2 p_0^2 - r p_0^2}. \quad (13)$$

(7) (9) (12) 和 (13) 式为柱坐标系下圆对称截断光束的传输方程和  $M_G^2$  因子的公式. 作为这种方法的应用, 下面讨论截断圆对称超高斯光束的  $M_G^2$  因子.

### 3. 截断圆对称超高斯光束的光束传输因子

入射到  $z=0$  面上半径为  $a$  圆孔光阑上的超高斯光束的场分布为<sup>[9-11]</sup>

$$E(r, 0) = \exp\left[-\left(\frac{r}{w_0}\right)^N\right], \quad (14)$$

式中  $N \geq 2, w_0$  分别是超高斯光束的阶数和束宽. 将 (14) 式代入 (1) (3) 和 (4) 式, 并利用不完善伽马函数的定义式<sup>[12]</sup>

$$\chi(\alpha, x) = \int_0^x \exp(-t) t^{\alpha-1} dt, \quad (15)$$

得到截断超高斯光束的广义二阶矩为

$$r_0^2 = \frac{w_0^2}{2^{2/N}} \frac{\chi(4/N, 2\beta^N)}{\chi(2/N, 2\beta^N)}, \quad (16)$$

$$p_0^2 = \frac{2^{2/N}}{k^2 w_0^2} \frac{\left[\frac{N^2}{4} \chi(2, 2\beta^N) + \frac{16N}{3} \exp(-2\beta^N)\right]}{\chi(2/N, 2\beta^N)}, \quad (17)$$

$$rp_0 = 0, \quad (18)$$

式中

$$\beta = a/w_0 \quad (\text{截断参数}). \quad (19)$$

将(16)–(18)式代入(13)式得到截断圆对称超高斯光束的  $M_G^2$  因子为

$$M_G^2 = \frac{\sqrt{\chi(4/N)2\beta^N \left\{ \frac{N^2}{4} \chi(2\beta^N) + \frac{16N}{3} \exp(-2\beta^N) \right\}}}{\chi(2/N)2\beta^N}. \quad (20)$$

从(20)式可知,截断超高斯光束的  $M_G^2$  因子依赖于光束阶数  $N$  和截断参数  $\beta$ .

当  $\beta \rightarrow \infty$  (无光阑限制) 时(20)式化为

$$M_G^2(\beta \rightarrow \infty) = M^2 = \frac{N \sqrt{\Gamma(4/N)}}{2\Gamma(2/N)}, \quad (21)$$

式中的  $\Gamma$  是伽马函数.(21)式是无光阑限制的圆对称超高斯光束的  $M^2$  因子表达式,与已有的结果一致<sup>[13]</sup>.

在(20)式中,令  $N = \chi$  (高斯光束)得到

$$M_G^2 = \frac{\sqrt{[1 + 2\beta^2 - \exp(2\beta^2)][2\beta^2 - 29/3 - \exp(2\beta^2)]}}{\exp(2\beta^2) - 1}. \quad (22)$$

(22)式表明截断圆对称高斯光束的光束传输因子由  $\beta$  完全确定.比较(22)式和文献[14]的(24)式可知,柱坐标系中和直角坐标系中截断高斯光束的  $M_G^2$  因子公式是不同的,这可归因于不同几何形状(圆孔和狭缝)光阑对高斯光束的不同截断所致.

当(14)式中  $N \rightarrow \infty$  时为截断平面波,其场分布为

$$E(r, \rho) = \begin{cases} 1 & r \leq a, \\ 0 & r > a, \end{cases} \quad (23)$$

式中  $a$  为截断平面波的半径.将(23)式代入(1)(3)和(4)式得

$$r^2_0 = a^2/2, \quad (24)$$

$$\rho^2_0 = 32/3 k^2 a^2, \quad (25)$$

$$rp_0 = 0. \quad (26)$$

再将(24)(25)和(26)式代入(13)式得

$$M_G^2 = 4/\sqrt{3}. \quad (27)$$

(27)式与文献[15]的(28)式一致,从而保证了理论的自洽性,这是因为物理上截断平面波与截断高斯光束、截断超高斯光束等不同,它的  $M_G^2$  因子应当是一个与光束维数、截断参数和坐标系无关的常量,当用 GTSM 法计算时,这个常量就等于  $4/\sqrt{3}$ .

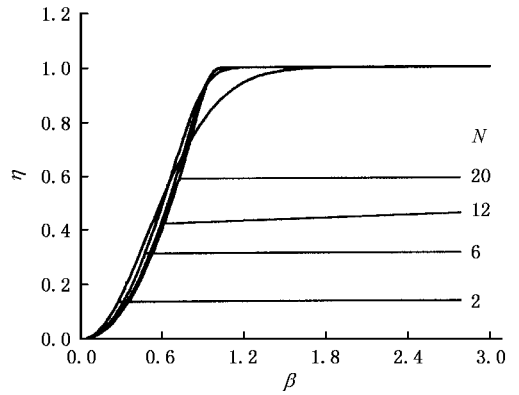


图1 入射到光阑内超高斯光束功率含量百分比  $\eta$  随截断参数  $\beta$  的变化

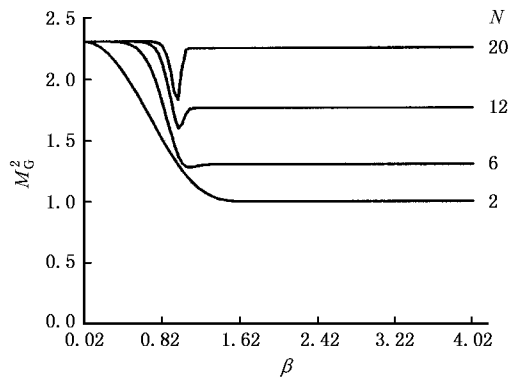


图2 截断超高斯光束的  $M_G^2$  因子随截断参数  $\beta$  的变化

## 4. 数值计算和分析

图1给出了入射到光阑内  $N = 2, 6, 12, 20$  的超高斯光束功率含量百分比  $\eta = \frac{I_0}{\int_0^\infty |E(r, \rho)|^2 r dr}$  随

截断参数  $\beta$  的变化.图1表明,当  $\beta \leq 0.64$  时,  $\eta$  随超高斯光束阶数  $N$  的增加而减小,而当  $\beta \geq 0.96$  时,  $\eta$  随  $N$  的增加而增加,当  $\beta$  足够大时,例如,对  $N = 2, 6, 12$  和  $20$ , 当  $\beta \geq 2.10, 1.42, 1.22$  和  $1.14$  时,  $\eta = 1$ , 此时光阑效应可忽略.利用(20)式可计算不同阶次、不同截断程度的超高斯光束的光束传输因子.图2给出了  $N = 2, 6, 12, 20$  的截断超高斯光束的光束传输因子  $M_G^2$  随截断参数  $\beta$  的变化.由图2知,  $\beta$  小 ( $N = 2, \beta \leq 0.02; N = 6, \beta \leq 0.34; N = 12, \beta \leq 0.58; N = 20, \beta \leq 0.70$ ) 时,  $N$  不同的截断超高斯光束的  $M_G^2$  因子都等于截断平面波的  $M_G^2$  因子,即  $M_G^2$

$= 4/\sqrt{3} \approx 2.31$ , 其物理原因是明显的: 当截断参数小时, 光阑截断在光束的平顶部分, 此时与截断平面波行为相似. 当  $\beta$  大时, 截断高斯光束 ( $N = 2$ ) 的  $M_G^2$  因子随  $\beta$  的增大而减小, 最后趋于无光阑限制的高斯光束的  $M^2$  因子之值, 即当  $\beta \geq 2.10$  时,  $M_G^2 = M^2 = 1$ . 而对于  $N = 6, 12$  和  $20$  的截断超高斯光束的  $M_G^2$  因子随  $\beta$  增加而逐渐减小, 但不是完全单调变化的, 当  $\beta = 1.09, 0.99$  和  $0.97$  时,  $M_G^2$  因子分别取得极小值  $1.28, 1.60$  和  $1.82$  (极小值位置可由  $dM_G^2/d\beta = 0$  得出). 然后  $M_G^2$  因子随  $\beta$  增加逐渐趋于无光阑限制的超高斯光束的  $M^2$  因子之值, 即对  $N = 6, 12$  和  $20$ , 当  $\beta \geq 1.42, 1.22$  和  $1.14$  时,  $M_G^2 = M^2 = 1.30, 1.76$  和  $2.25$ .

## 5. 结 论

本文主要是将直角坐标系中对二维光束定义的

截断二阶矩和  $M_G^2$  因子推广到柱坐标系中三维圆对称光束, 并采用了截断平面波的  $M_G^2 = 4/\sqrt{3}$  这样一个与光束维数、截断参数和坐标系无关的常数作为拟合参数, 使理论自洽, 并使 GTSM 法仍保持了二维原始定义时的优点, 即截断二阶矩的传输公式形式上与无截断时的公式相似, 特别是  $M_G^2$  因子为一传输常数, 并可解析地表示出来. 相比之下, 由渐近近似法和自收敛束宽法得出的截断光束的  $M^2$  因子还与人为选定的一个“功率份额”或“自收敛束宽因子”有关<sup>[16, 17]</sup>而限制了其应用. 实际光束都是三维的, 因此本文的推广使 GTSM 法更有实际应用意义. 对受硬边光阑限制的截断光束的描述, 值得进一步研究的问题是截断二阶矩(或截断光束的束宽、远场发散角等参数)和  $M_G^2$  因子的实验测量、测量误差以及理论和实验参数间的拟合等问题, 这些工作正在进行中, 有关结果将另文发表.

- [ 1 ] Siegman A E 1990 *SPIE* 1224 2
- [ 2 ] ISO/TC 172/SC 91 WG 1 N80, ISO/DIS 1995 11146
- [ 3 ] Martinez-Herrero R, Mejias P M 1993 *Opt. Lett.* **18** 1699
- [ 4 ] Martinez-Herrero R, Mejias P M, Arias M 1995 *Opt. Lett.* **20** 124
- [ 5 ] Pare C, Belanger P A 1996 *Opt. Commun.* **123** 679
- [ 6 ] Amarante S, Giesen A, Hügel H 2000 *Appl. Opt.* **39** 3914
- [ 7 ] Qing Y S, Lü B D 2003 *Chinese Journal of Lasers* **30** 232 [ in Chinese ] 卿与三、吕百达 2003 中国激光 **30** 232 ]
- [ 8 ] Collins S A 1970 *J. Opt. Soc. Am.* **60** 1168
- [ 9 ] Parent A et al 1992 *Opt. Quant. Electron.* **24** 1071
- [ 10 ] Luo S R, Lü B D, Zhang B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1446 [ in Chinese ] [ 罗时荣、吕百达、张 彬 1999 物理学报 **48** 1446 ]
- [ 11 ] Wei J L, Zhang L M, Yu S Q, Jiang Z P 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 42 [ in Chinese ] 魏计林、张立敏、俞书勤、蒋志平 2002 物理学报 **51** 42 ]
- [ 12 ] Erdelyi A 1954 *Tables of Integral Transforms* ( New York :McGraw-Hill ) Vol 2
- [ 13 ] Lü B D, Luo S R, Zhang B 1999 *Optik* **110** 285
- [ 14 ] Lü B D, Luo S R 2000 *Opt. Commun.* **178** 275
- [ 15 ] Lü B D, Luo S R 2001 *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 2098
- [ 16 ] Lü B D, Qing Y S 2001 *Opt. Commun.* **199** 25
- [ 17 ] Lü B D, Luo S R 2001 *Opt. Quant. Electron.* **33** 107

# Generalized $M^2$ factor of truncated beams in the cylindrical coordinate system<sup>\*</sup>

Luo Shi-Rong<sup>1)</sup> Lü Bai-Da<sup>1)2)</sup>

<sup>1)</sup>( *Institute of Laser Physics & Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China* )

<sup>2)</sup>( *State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China* )

( Received 17 April 2003 ; revised manuscript received 11 June 2003 )

## Abstract

The propagation equations of second-order moments of truncated circularly symmetric beams are derived, which obey the propagation laws similar to those for the non-truncated case. Based on the method of generalized truncated second-order moments, the second-order characteristic parameters of two-dimensional truncated beams in the rectangular coordinate system are extended to the truncated circularly symmetric beams in the cylindrical coordinate system, and the generalized  $M^2$  factor ( $M_G^2$  factor) can be defined in a similar way and remains invariant upon propagation. The consistency of the theory is interpreted physically. The second-order moments parameters and  $M_G^2$  factor of truncated super-Gaussian beams in the cylindrical coordinate system are derived and some interesting special cases are discussed and illustrated with numerical examples.

**Keywords** : beam characterization, truncated beam, circular symmetry, generalized truncated second-order moments (GTSMs), generalized  $M^2$  factor ( $M_G^2$  factor)

**PACC** : 4255, 4200

<sup>\*</sup> Project supported by the Foundations of National Hi-Tech. and State Key Laboratory of Laser Technology (Huazhong University of Science & Technology).