

海-气振子 ENSO 模型的同伦解法^{*}

莫嘉琪¹⁾ 林万涛²⁾ 朱 江²⁾

¹⁾ 安徽师范大学, 芜湖 241000)

²⁾ 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

(2004 年 1 月 9 日收到, 2004 年 2 月 16 日收到修改稿)

研究了一个厄尔尼诺-南方涛涛(ENSO)的时滞振子的模型. 利用同伦映射方法求出了 ENSO 模型的近似解.

关键词: 非线性, 同伦, ENSO 模型

PACC: 0200, 0420J, 0230

El Niño/La Niña(厄尔尼诺/拉尼娜)和南方涛涛分别是发生在热带大气和海洋中的异常事件. 由于这两种现象存在密切联系, 是热带大气和海洋运动相互作用的表现, 因此近年来把这两种现象合起来称为 ENSO. ENSO 事件是一个复杂的非线性系统, 它的发生严重地影响全球各地区气候和生态等方面的变化. 它的气候异常, 带来了许多灾害, 全球的经济发展和人类生活都受到严重的影响. 因此对它的规律和预防的研究, 为当前国际学术界所关注. 许多学者已经用了不同的方法对它的局部性和整体性的性态作了多方位的研究^[1-12]. 在大气物理、海洋气候、动力系统等相关的问题, Lin 等^[13-17]利用数值分析等方法进行了研究.

非线性问题的理论和方法在国际学术界的研究中是一个十分热门的对象^[18]. 许多学者做了大量的工作^[18-24], 并解决了许多数学物理问题. 莫嘉琪等也研究了一些相应的非线性问题^[25-29].

本文是讨论一个 ENSO 海-气模型. 在一定的情况下, 从数学物理理论的角度, 利用数学中的同伦映射方法较简捷地得到了相应非线性问题的近似解, 从而可以较直接地讨论问题某些相关物理量的定量方面的特征.

考虑如下一个 ENSO 时滞海-气模型^[3]:

$$\frac{dT}{dt} = AT - \epsilon T^3 - BT(t - \delta), \quad (1)$$

其中 T 为东赤道附近的太平洋中的异常海表温度距平 SST, A, B, δ 和 ϵ 为正的模型参数, 其物理含义

和定义见文献 [2, 12].

引进一个同伦映射 $H(v, p): X \times I \rightarrow R$:

$$H(T, p) = I(T) - I(u_0) + p(I(u_0) + \epsilon T^3 + BT(t - \delta)), \quad (2)$$

其中 $X = [0, \infty), I = [0, 1], R = (-\infty, +\infty)$, 而线性算子 L 为

$$I(T) = \frac{dT}{dt} - AT, \quad (3)$$

u_0 为原方程 (1) 的零次近似, 现设为

$$u_0 = T(0)e^{\alpha t}, \quad (4)$$

其中 $T(0)$ 为 T 在 $t=0$ 时的初值, α 为调节常数.

显然由 (2) 式知, $H(T, 1) = 0$ 就是方程 (1). 故方程 (1) 的解 $T(t)$ 就是 $H(T, p) = 0$ 的解当 $p \rightarrow 1$ 的极限情形.

由

$$H(T, p) = 0. \quad (5)$$

设

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(t)p^i. \quad (6)$$

将 (3)(4)(6) 式代入 (5) 式, 展开为 p 的幂级数, 比较等式两边 p 的同次幂的系数.

由 p 的零次幂的系数, 可得

$$I(T_0) = I(u_0).$$

显然, 这时有

$$T_0(t) = T(0)e^{\alpha t}. \quad (7)$$

由 p 的一次幂的系数, 并由 (7) 式可得

$$\frac{dT_1}{dt} - AT_1 = T(0) [\alpha - A + Be^{-\alpha\delta}] e^{\alpha t}$$

* 国家自然科学基金重大项目(批准号: 90211004)和中国科学院“百人计划”项目资助的课题.

$$- \epsilon (\mathcal{T}(0))^3 e^{3at}. \quad (8)$$

为避免“共振”项的出现,选择调节常数 α 为

$$\alpha - A + B e^{-a\delta} = 0 \quad (9)$$

的根. 设其为 α_0 .

这时(8)式为

$$\frac{dT_1}{dt} - AT_1 = - \epsilon (\mathcal{T}(0))^3 \exp(3\alpha_0 t). \quad (10)$$

并同时具有初始值

$$T_1(0) = 0. \quad (11)$$

(10),(11)式的解为

$$T_1(t) = - \frac{\epsilon (\mathcal{T}(0))^3}{3\alpha_0 - A} \exp(3\alpha_0 t) \times [1 - \exp(-2\alpha_0 t)]. \quad (12)$$

于是由(7),(12)式,便得到了方程(1)的一次近似的解

$$T_{\text{app}} = \mathcal{T}(0) \exp(\alpha_0 t) - \frac{\epsilon (\mathcal{T}(0))^3}{3\alpha_0 - A} \exp(3\alpha_0 t) \times [1 - \exp(-2\alpha_0 t)]. \quad (13)$$

用同样的方法,可以得到更高次的近似解.

为了说明上述结果(13)式的精度,现以一种特殊的情形作如下比较:

考虑对应的非时滞下的 ENSO 海-气模型. 将 $B = 0$ 代入(1)式得

$$\frac{dT}{dt} = AT - \epsilon T^3. \quad (14)$$

不难得到(14)式的通解为

$$\mathcal{T}(t) = \left[\frac{\epsilon}{A} + C \exp(-2At) \right]^{-1/2},$$

其中 C 为任意常数. 通解(13)在初始条件 $\mathcal{T}(0)$ 下, (14)式的精确解为

$$\mathcal{T}(t) = \left[\frac{\epsilon}{A} + \left(\frac{1}{(\mathcal{T}(0))^2} - \frac{\epsilon}{A} \right) \exp(-2At) \right]^{-1/2}. \quad (15)$$

如果再考虑 ϵ 足够小,由(15)式得

$$\mathcal{T}(t) = \mathcal{T}(0) \exp(At) - \frac{\epsilon (\mathcal{T}(0))^3}{2A} \exp(3At) \times [1 - \exp(-2At)] + O(\epsilon^2). \quad (16)$$

再考虑用同伦方法得到的 ENSO 海-气模型的近似解. 在这种情况下,用 $B = 0$ 代入(9)式,可得

$$\alpha_0 = A.$$

将它代入(13)式,有

$$T_{\text{app}} = \mathcal{T}(0) \exp(At) - \frac{\epsilon (\mathcal{T}(0))^3}{2A} \exp(3At) \times [1 - \exp(-2At)]. \quad (17)$$

上式与精确解(16)比较,可知用同伦方法得到的一次近似解(17)有较高的近似度.

因此,由表示式(13),可以从在 ENSO 时滞模型(1)的状态下,直接分析东赤道附近的太平洋中的异常海表温度距平 SST 的状态.

[1] Feng G L et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林等 2002 物理学报 **51** 1181]

[2] Liu S S et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适等 2002 物理学报 **51** 10]

[3] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **50** 1221]

[4] Feng G L et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林等 2001 物理学报 **50** 606]

[5] Wang B et al 1999 *J. Atmos. Sci.* **56** 5

[6] Guan X P et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平等 2003 物理学报 **52** 276]

[7] Guan X P et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670 (in Chinese) [关新平等 2001 物理学报 **50** 1670]

[8] Hong L and Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]

[9] Chen S H et al 2002 *Chin. Phys.* **11** 233

[10] Li Z and Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9

[11] Lu J H and Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12

[12] Wang C 2001 *Advances in Atmospheric Sciences* **18**(5) 674

[13] Lin W T et al 2000 *Chinese Science Bulletin* **45**(15) 1358

[14] Lin W T et al 2001 *Acta Air Dyna* **19** 348 (in Chinese) [林万涛等 2001 空气动力学学报 **19** 348]

[15] Lin W T et al 2002 *Advances in Atmospheric Sciences* **19** 699

[16] Lin W T et al 2002 *Progress in Natural Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛等 自然科学进展 **12** 102]

[17] Lin W T and Mo J Q 2003 *Chinese Science Bulletin* **49**(supp II) 5

[18] de Jager E M and Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co)

[19] Bell D C and Deng B 2003 *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **3** 515

[20] Adams K L et al 2003 *J. Engineering Math.* **45** 197

[21] Lin F and Xu Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049

[22] Ruan H Y and Chen Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1313 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2002 物理学报 **52** 1313]

[23] Ruan H Y 1999 *Chin. Phys.* **8** S294

[24] Luo S K 2002 *Chin. Phys.* **11** 1097

[25] Mo J Q 1989 *Science in China Ser A* **32** 1306

[26] Mo J Q and Wang H 2002 *Progress in Natural Sci.* **12** 945

[27] Mo J Q et al 2003 *Progress in Natural Sci.* **13** 768

- [28] Mo J Q and Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [29] Mo J Q *et al* 2004 *Progress in Natural Sci.* **14** 550
[莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

The homotopic solving method of sea-air oscillator for ENSO model^{*}

Mo Jia-Qi¹⁾ Lin Wan-Tao²⁾ Zhu Jiang²⁾

¹⁾(*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

²⁾(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

(Received 9 January 2004 ; revised manuscript received 16 February 2004)

Abstract

A delayed oscillator of El Niño-Southern Oscillation (ENSO) models are considered. Using the method of homotopic mapping, the approximation of the solution for ENSO models is obtained.

Keywords : nonlinear , homotopy , ENSO Model

PACC : 0200 , 0420J , 0230

^{*} Project supported by the Major Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90211004) and the “ Hundred Talents Project ” of the Chinese Academy of Sciences.