第 53 卷 第 10 期 2004 年 10 月
1000-3290/2004/53(10)/3248-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.10, October, 2004

(2+1)维 Broer-Kaup 方程的局域分形结构*

朱加民[1)†] 马正义[1)] 郑春龙[1)2)]

1)(丽水学院物理系,丽水 323000)

2)(上海大学应用数学与力学研究所,上海 200072)

(2003 年 12 月 23 日收到;2004 年 2 月 1 日收到修改稿)

进一步拓广齐次平衡法的应用,研究了(2+1)维 Broer-Kaup 方程的局域分形结构.根据齐次平衡原则,得到方程的 Bäcklund 变换,将方程变换为一个线性化的方程,然后由具有两个任意函数的种子解构造出一个精确解.利用 Jacobian 椭圆函数得到了特殊的分形结构.

关键词:齐次平衡法,(2+1)维 Broer-Kaup 方程,分形结构

PACC:0230,0340,0290

1. 引 言

分形和孤立子是非线性科学中最重要的两个方面[1],它们广泛的应用于物理学、数学、化学、生物学、通信工程等自然科学领域,尤其在物理学中的流体力学、等离子体物理、光学、凝聚态物理等领域发挥着十分重要的作用[2].通常孤立子现象出现于可积模型中而分形现象出现于不可积模型,因而在讨论孤立子现象时并不会去分析系统的分形结构.但是我们近年来的研究表明在局域孤立子结构中存在着分形现象[3].近年的研究中我们使用三角函数构造了一些可积模型的分形结构,经过分析我们认为还应存在更多的分形结构类型,如可以利用 Jacobian 椭圆函数、Bessel 函数等进行构造.

本文进一步利用推广的齐次平衡法研究(2+1)维 Broer-Kaup 方程[4]

$$H_{ty} - H_{xxy} + 2(HH_x)_y + 2G_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$G_t + G_{xx} + 2(GH)_x = 0 \tag{2}$$

的局域分形结构,利用 Jacobian 椭圆函数构造了新的分形结构.该方程可用对称约束从 KP 方程中约化得到[5],并且已在统计物理、等离子体物理和非线性光纤通信等许多科技领域中得到应用.文献[4]用齐次平衡法对(2+1)维 Broer-Kaup 方程进行了讨论,在选择分离变量解时选择 $q=q(y)$,我们认为 q 还应该是时间的函数,可以选择为 $q=q(y,t)$.

2. (2+1)维 Broer-Kaup 方程的线性化及分离变量解

根据推广的齐次平衡原则,设方程(1)和(2)有如下形式解:

$$\begin{aligned} u &= f'(\omega)\omega_x + u_0, \\ v &= g''(\omega)\omega_x\omega_y + g'(\omega)\omega_{xy} + v_0, \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $f(\omega)$, $g(\omega)$, $\omega(x,y,t)$ 为待定函数, u_0, v_0 是方程的种子解,取种子解 $u_0=u_0(x,t)$, $v_0=0$.

把(3)式及 $u_0=u_0(x,t)$, $v_0=0$ 代入(1),(2)式经整理后得到

$$\begin{aligned} &(2f''^2 + 2f'f''' - f'''' + 2g'''')\omega_x^3\omega_y \\ &+ f'''(\omega_x\omega_y\omega_t - 3\omega_x^3\omega_{xy} - 3\omega_x\omega_y\omega_{xx} + 2u_0\omega_x^2 w_y) \\ &+ f''(\omega_{xy}\omega_t + w_x\omega_{ty} + \omega_y\omega_{xt} - 3\omega_{xy}\omega_{xx} - 3\omega_x\omega_{xxy} \\ &- \omega_y\omega_{xxx} + 4u_0\omega_x\omega_{xy} + 2u_0\omega_{xx}\omega_y \\ &+ 2u_0\omega_{xx}\omega_y + 2u_{0x}\omega_x\omega_y) \\ &+ f'(\omega_{xyt} - \omega_{xxxy} + 2u_0\omega_{xxy} + 2u_{0x}\omega_{xy}) \\ &+ 2g'\omega_{xxxy} + g'''(6\omega_x\omega_{xx}\omega_y + 6\omega_x^2\omega_{xy}) \\ &+ g''(2\omega_{xxx}\omega_y + 6\omega_{xx}\omega_{xy} + 6\omega_x\omega_{xxy}) \\ &+ f'f''(6\omega_x\omega_{xx}\omega_y + 4\omega_x^2\omega_{xy}) \\ &+ f'^2(2\omega_{xx}\omega_{xy} + 2\omega_x\omega_{xxy}) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

* 浙江省自然科学基金(批准号:100039)和丽水学院青年基金(批准号:QN04008)资助的课题.

† E-mail:zjm64@163.com

$$
\begin{aligned}
&(g'''' + 2g'''f' + 2g''f'')\omega_x^3\omega_y \\
&+ g'''(3\omega_x\omega_{xx}\omega_y + 3\omega_x^2\omega_{xy} \\
&+ \omega_x\omega_y\omega_t + 2u_0\omega_x^2\omega_y) + g''(\omega_{xxx}\omega_y \\
&+ 3\omega_{xx}\omega_{xxy} + \omega_{xy}\omega_{yt} + \omega_y\omega_{xt} \\
&+ 2u_0\omega_{xx}\omega_y + 4u_0\omega_x\omega_{xy} + 2u_{0x}\omega_x\omega_y) \\
&+ g'(\omega_{xyt} + \omega_{xxxy} + 2u_0\omega_{xxy} + 2u_{0x}\omega_{xy}) \\
&+ f'g''(4\omega_x\omega_{xx}\omega_y + 4\omega_x^2\omega_{xy}) \\
&+ 2f''g'\omega_x^2\omega_{xy} + f'g'(2\omega_x\omega_{xxy} + \omega_{xx}\omega_{xy}) = 0. \quad (5)
\end{aligned}
$$

令方程(4),(5)中 $\omega_x^3\omega_y$ 前的系数为零,可得到一组 $f(\omega)$,$g(\omega)$所满足的方程

$$2f''^2 + 2f'f''' - f'''' + 2g'''' = 0, \quad (6)$$

$$g'''' + 2g'''f' + 2f''g'' = 0. \quad (7)$$

从方程(6)和(7)可得一组特解

$$f(\omega) = g(\omega) = \ln\omega. \quad (8)$$

由上可知存在下面关系:

$$f'f'' = -\frac{1}{2}f''', f'^2 = -f''. \quad (9)$$

再令方程(4),(5)中 f',f'',f'''前的系数为零,可得一组关于 $\omega(x,y,t)$的偏微分方程组

$$
\begin{aligned}
&\omega_x\omega_y(\omega_t + \omega_{xx} + 2u_0\omega_x) = 0, \\
&\omega_{xy}(\omega_t + \omega_{xx} + 2u_0\omega_x) \\
&+ \omega_x(\omega_t + \omega_{xx} + 2u_0\omega_x)_y \\
&+ \omega_y(\omega_t + \omega_{xx} + 2u_0\omega_x)_x = 0, \quad (10) \\
&(\omega_t + \omega_{xx} + 2u_0\omega_x)_{xy} = 0.
\end{aligned}
$$

分析(10)式可发现,只要 $\omega(x,y,t)$满足

$$\omega_t + \omega_{xx} + 2u_0\omega_x = 0, \quad (11)$$

上面各方程均自动满足.因而方程(1)和(2)经过变换(3)后可线性化.

对于方程(11),选择以下变量分离解:

$$
\begin{aligned}
\omega(x,y,t) = a_0 + a_1p(x,t) + a_2q(y,t) \\
+ a_3p(x,t)q(y,t), \quad (12)
\end{aligned}
$$

式中 $p(x,t)$是变量(x,t)的函数,$q(y,t)$是(y,t)的函数,a_0,a_1,a_2,a_3 是任意常数.将(12)式代入(11)式可得方程组

$$p_t + p_{xx} + 2u_0p_x = c_0(a_2 + a_3)p, \quad (13)$$

$$q_t + c_0(a_1 + a_3q) = 0. \quad (14)$$

式中 $c_0 = c_0(t)$是任意 t 的函数.方程(13)难以获得其解,但由于 $u_0(x,t)$是任意的种子解,所以将 $p(x,t)$看成变量可得到

$$u_0 = \frac{1}{-2p_x}[p_t + p_{xx} - c_0(a_2 + a_3p)]. \quad (15)$$

方程(14)可求得解为

$$q = \frac{Q(y)}{a_3}[e^{a_3\int c_0 dt} - a_1]. \quad (16)$$

式中 $e^{a_3\int c_0 dt} - a_1 \neq 0$,$Q(y)$是关于 y 的任意函数.将(15),(16)和(8)式代入(1)和(2)式可得

$$
\begin{aligned}
H(x,y,t) = &\frac{(a_1 + a_3q)p_x}{(a_0 + a_1p + a_2q + a_3pq)} \\
&+ \frac{1}{-2p_x}[p_t + p_{xx} - c_0(a_2 + a_3p)], \quad (17)
\end{aligned}
$$

$$G(x,y,t) = \frac{(a_0a_3 - a_1a_2)p_xq_y}{(a_0 + a_1p + a_2q + a_3pq)^2}. \quad (18)$$

从(17),(18)式可知,由于 p 是(x,t)的任意函数,q 是 y 的任意函数.因而(2+1)维 Broer-Kaup 方程应该存在丰富的局域孤立子解,如多 dromion、振荡型的 dromion、多 lump 解、静止和运动呼吸子等.本文仅对 $G(x,y,t)$函数就感兴趣的分形结构进行讨论.

3. 局域分形结构

我们曾用正弦和余弦函数构造了可积模型的分形结构.由此用具有双周期性质的 Jacobian 椭圆函数也应该能构造出新的分形结构.为了讨论方便,将表达式(18)中的系数取为

$$a_0 = a_2 = a_3 = c_0 = 1, a_1 = 0.$$

3.1. 局域 dromion 分形结构

当表达式(18)中 p,q 分别取为

$$p = 1 + \exp[x(x + \mathrm{cn}(\ln(x^2),m))], \quad (19)$$

$$q = [1 + \exp(y(y + \mathrm{cn}(\ln(y^2),m)))]\exp(t), \quad (20)$$

式中 cn 是 Jacobian 椭圆余弦函数.图 1(a)给出了函数 G 的局域 dromion 分形结构,在中心附近它在各方向都沿指数衰减.图 1(b)表示 x,y 在区间 $\{x = [-0.0075,0.0075], y = [-0.0075,0.0075]\}$中分形结构的密度分布.为了更加细致的观察其自相似结构,将 x,y 的范围取得更小如 $\{x = [-0.0015,0.0015], y = [-0.0015,0.0015]\}$, $\{x = [-0.0003,0.0003], y = [-0.0003,0.0003]\}$,我们发现了相同的结构.

3.2. 局域 lump 分形结构

当表达式(18)中 p,q 分别取为

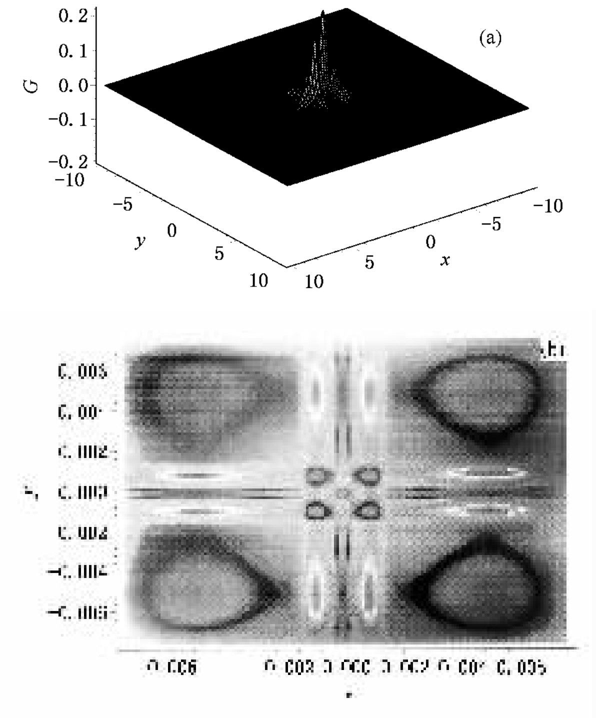

图 1　(a)表示当 p 取(19)，q 取(20)时的局域 dromion 分形结构($t=0, m=0.5$)；(b)表示范围在 $\{x=[-0.004, 0.004], y=[-0.004, 0.004]\}$ 的局域 dromion 分形结构密度图

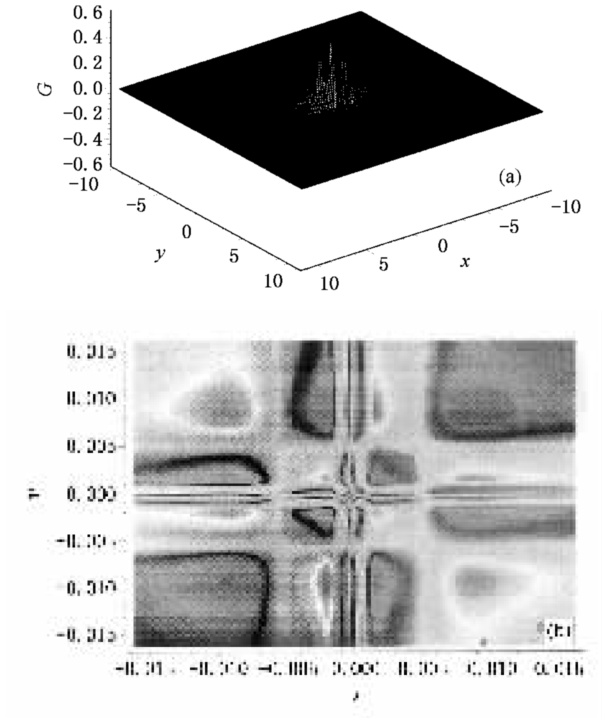

图 2　(a)表示当 p 取(21)，q 取(22)时的局域 lump 分形结构($t=0, m=0.5$)；(b)表示范围在 $\{x=[-0.015, 0.015], y=[-0.015, 0.015]\}$ 的局域 lump 分形结构密度图

$$p=1+\frac{|x| \operatorname{sn}(\ln(x^2), m)}{(1+x^4)}, \tag{21}$$

$$q=\left(1+\frac{|x| \operatorname{sn}(\ln(y^2), m)}{(1+y^4)}\right)\exp(t). \tag{22}$$

式中 sn 是 Jacobian 椭圆正弦函数. 图 2(a)给出了函数 G 的局域 lump 分形结构，在中心附近存在许多尖顶. 图 2(b)表示 x, y 在区间 $\{x=[-0.0075, 0.0075], y=[-0.0075, 0.0075]\}$ 中分形结构的密度分布. 为了更加细致的观察其自相似结构，将 x, y 的范围取得更小如 $\{x=[-0.0015, 0.0015], y=[-0.0015, 0.0015]\}$，$\{x=[-0.0003, 0.0003], y=[-0.0003, 0.0003]\}$，我们发现了相同的结构.

4. 结　论

我们利用推广的齐次平衡方法得到了(2+1)维 Broer-Kaup 的分离变量解. 利用 Jacobian 椭圆函数在可积系统中得到了局域 dromion 和局域 lump 分形结构. 在文献[6,7]中作者对可积系统的分形结构进行了简短的分析. 但是困惑的是：分形和孤立子两种代表不可积和可积系统的现象在本文中同时出现了. 对此楼森岳教授在文献[6]中作出了较好的解释.

齐次平衡方法已经得到了广泛的应用[8—22]，这里我们又进一步拓展了它的应用，这种方法对其他高维的非线性物理模型的推广值得深入研究.

[1] Kivshar Y S and Melomend B A 1989 *Rev. Mod. Phys.* **61** 765
Stegemant G I and Segev M 1999 *Science* **286** 1518
Gollub J P and Cross M C 2002 *Nature* **404** 710
Chen H S, Wang J and Gu Y 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 85
Jalabert R A and Pastawski H M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2490
[2] Loutsenko I and Roubtsov D 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3011
Tajiri M and Maesono H 1997 *Phys. Rev.* E **55** 3351
Gedalin M, Scott T C and Band Y B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 448
[3] Zheng C L, Zhu J M, Zhang J F and Chen L Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 261
Zheng C L and Zhang J F 2002 *Chin Phys. Lett.* **19** 1399
Zheng C L, Zhang J F and Sheng Z M 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 331
Zheng C L 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 25

[4] Zhang J F and Han P 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 705 (in Chinese) [张解放、韩　平 2002 物理学报 **51** 705]
[5] Lou S Y and Wu X B 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 145
[6] Tang X Y, Chen C L and Lou S Y 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **43** 4078
[7] Lou S Y, Tang X Y and Chen C L 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 769
[8] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Phys. Lett.* A **246** 403
[9] Lou S Y 2002 *J. Math. Phys.* **22** 4078
[10] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169
[11] Wang M L 1996 *Phys. Lett.* A **213** 279
[12] Fan E G 2003 *J. Phys.* A **36** 7009
[13] Zhang J F 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1416 (in Chinese) [张解放 1998 物理学报 **47** 1416]
[14] Fan E G and Hon Y C 2003 *Chaos, Solitions and Fractals* **15** 559
[15] Zhang J F, Wang W H and Zheng C L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放、黄文华、郑春龙 2002 物理学报 **51** 2676]
[16] Zhang J F 2002 *Chin. Phys.* **11** 425
[17] Zhang J F 2002 *Chin. Phys.* **11** 651
[18] Zhang J L, Wang M L and Wang Y M 2003 *Chin. Phys.* **12** 245
[19] Wang W H and Zhang J F 2002 *Chin. Phys.* **11** 1101
[20] Han P, Zhang J F and Meng J P 2003 *Chin. Phys.* **12** 1166
[21] Zhang J F, Guo G P and Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2359 (in Chinese) [张解放、郭冠平、张翼 2003 物理学报 **52** 2359]
[22] Ruan H Y and Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 586]

Localized fractal structure of the (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations*

Zhu Jia-Min[1)]　Ma Zheng-Yi[1)]　Zheng Chun-Long[1)2)]

[1)] (*Department of Physics, Zhejiang Lishui University, Lishui* 323000, *China*)

[2)] (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai* 200072, *China*)

(Received 23 December 2003; revised manuscript received 1 February 2004)

Abstract

The linearized form of (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations is established by using the improved homogeneous balance method. Starting from the Bäcklund transformation, a variable-separation solution with the entrance of some arbitrary function is obtained. By using Jacobian elliptic functions, new fractal structures are obtained.

Keywords: homogeneous balance method, (2+1)-dimensional Broer-Kaup equations, fractal structure

PACC: 0230, 0340, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 100039), and the Outstanding Yauth Foundation of Lishui University, China (Grant No. QN04008).