第 53 卷 第 10 期 2004 年 10 月
1000-3290/2004/53(10)/3265-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.10,October,2004

修正 Jacobi 椭圆函数展开法及其应用*

石玉仁† 郭 鹏 吕克璞 段文山
(西北师范大学物理与电子工程学院,兰州 730070)
(2003 年 12 月 2 日收到;2004 年 2 月 27 日收到修改稿)

对 Jacobi 椭圆函数展开法进行了扩展,且应用修正过的方法获得了若干非线性波动方程的更多的准确周期解,补充了前面研究所得的结果.

关键词:Jacobi 椭圆函数展开法,非线性演化方程,精确解,周期解
PACC:0340K,0290

1. 引 言

对非线性偏微分方程(组)的求解是非线性科学的重要组成部分.近年来,非线性科学引起越来越多学者的兴趣,很多数学家和物理学家又提出许多新的方法求解非线性偏微分方程,如齐次平衡法[1—4]、双曲函数法[5]、sine-cosine 方法等.但这些方法只能求得非线性方程的冲击波解和孤波解,不能求得非线性方程的广义上的周期解.为解决这个问题,Liu 等提出了 Jacobi 椭圆函数展开法[6—9].该法可借助计算机代数系统得以实现,故得到了广泛的推广和应用[10—16].本文在前面工作的基础上对 Jacobi 椭圆函数展开法进行了扩展,并成功地得到了若干非线性方程新的精确周期解.

2. 方法介绍

Liu 提出的 Jacobi 椭圆函数展开法简述如下:考虑一非线性偏微分方程,比如是两自变量的

$$K(u,u_t,u_x,u_{xx},\cdots)=0, \tag{1}$$

其中 K 一般是其参数的一多项式函数.引入行波变换

$$u(x,t)=\phi(\xi),\xi=kx-ct+l, \tag{2}$$

其中 k 和 c 是非零的待定常数,l 是一任意常数.把(2)式代入(1)式得到一关于 ϕ 的常微分方程

$$K(\phi,\phi',\phi'',\cdots)=0. \tag{3}$$

这里‘′’代表 $\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$.

设方程(3)具有下列形式的行波解:

$$\phi=\sum_{i=0}^{m}a_if^i+\sum_{i=1}^{m}b_if^{i-1}g+\sum_{i=1}^{m}c_if^{i-1}h, \tag{4}$$

其中 $a_0,a_i,b_i,c_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 为待定常数,m 的值通过平衡方程(3)中非线性项和最高阶导数项来确定.把(4)式代入(3)式会得到一关于 f,g 和 h 的多项式方程.化简该方程后令 $f^i,f^ig,f^ih,f^igh\,(i=0,1,2,\cdots)$ 项的系数为 0,就得到一包含所有待定系数 $k,c,a_0,a_i,b_i,c_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 的非线性代数方程组 NAES(nonlinear algebraic equation system).解此 NAES 就可以得到(1)式的精确解.

文献[6—8]的方法,关键的一步是引入三个函数 $f=f(\xi)$,$g=g(\xi)$,$h=h(\xi)$ 后,把方程(3)化为关于 f,g,h 的多项式方程.要做到这一点,一个简单的条件就是 f,g,h 对 ξ 的各阶导数均能表示为 f,g,h 的多项式.由多项式的特点知下述条件成立时该条件自然满足:

1) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi},\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi},\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}$ 均可表示为 f,g,h 的多项式,即 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}=P_1(f,g,h)$,$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi}=P_2(f,g,h)$,$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}=P_3(f,g,h)$.$P_i(f,g,h)\,(i=1,2,3)$ 表示其参量的多项式函数.

方法的另一个要求是化简前面所得方程,使得

* 国家自然科学基金(批准号:10247008)、西北师范大学科技创新工程(批准号:NWNU-KJCXGC-215)和西北师范大学青年教师科研基金(批准号:NWNU-QN-2003-29)资助的课题.

† E-mail:syr317@163.com.

方程中两个函数如 $g(\xi)$ 和 $h(\xi)$ 的次幂不高于 1. 这就需要把 $g(\xi)$ 和 $h(\xi)$ 的高次幂项用 $f(\xi)$ 的多项式来代替. 下述条件成立该要求自然满足：

2) g^2, h^2 可表示成 f 的多项式.

条件 1),2) 对前面叙述的方法是充分的(但不必要),可作为选择展开函数 f, g, h 的一个简单原则. 容易验证,文献[6—10]中所取函数均满足这两个条件.

现取

$$f = \frac{1}{p + \mathrm{nc}(\xi)},\quad g = \frac{\mathrm{sc}(\xi)}{p + \mathrm{nc}(\xi)},\quad h = \frac{\mathrm{dc}(\xi)}{p + \mathrm{nc}(\xi)}, \tag{5}$$

这里 p 是一常数, $\mathrm{nc}(\xi) \equiv \frac{1}{\mathrm{cn}(\xi)}$, $\mathrm{sc}(\xi) \equiv \frac{\mathrm{sn}(\xi)}{\mathrm{cn}(\xi)}$, $\mathrm{dc}(\xi) \equiv \frac{\mathrm{dn}(\xi)}{\mathrm{cn}(\xi)}$. 显然,若 $p = 0$, 就是文献[6—10]中介绍的 Jacobi 椭圆余弦函数展开法. (5)式中各函数间满足下面的关系：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi} = -gh, \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\xi} = ph + (1 - p^2)fh,\\
&\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} = -fg + (1 - r^2)g[p + (1 - p^2)f],\\
&g^2 = 1 - 2pf + (p^2 - 1)f^2,\\
&h^2 = f^2 + (1 - r^2)[1 - 2pf + (p^2 - 1)f^2].
\end{aligned} \tag{6}$$

其中 r 为 Jacobi 椭圆函数的模数(一般 $0 \leqslant r \leqslant 1$).

3. 方法的应用

3.1. KdV 方程

考虑 KdV 方程

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{7}$$

把(2)式代入后得

$$-c\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + k\phi\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi} + k^3\beta\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\xi^3} = 0. \tag{8}$$

按前面的平衡原则, 此时可得 $m = 2$. 借助于计算机代数系统 Mathematica 或 Maple,容易得到方程(7)对应的 NAES(形式非常复杂,略). 用 Mathematica 对此 NAES 进行求解,得 KdV 方程(7)的下列解.

第一组

$$u(x,t) = \frac{c - k^3(5 - 4r^2)\beta}{k} + \frac{6pk^2\beta}{\mathrm{nc}(kx - ct + l) + p}, \tag{9}$$

其中 $p^2 = 1$, k, c 为任意非零常数. 这是 KdV 方程的一组精确周期解. 就笔者所知,这组解以前未曾给出.

取 $r = 1$,由于 $\mathrm{nc}(\xi, 1) = \cosh\xi$,则取 $p = 1$ 时即为文献[17]给出的 KdV 方程(7)的解. 但文献[17]只给出了 $p = 1$ 的解,而没给出 $p = -1$ 的解.

第二组

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{c - k^3(2 - r^2)\beta}{k}\\
&+ \frac{3pk^2\beta}{\mathrm{nc}(kx - ct + l) + p}\\
&+ \varepsilon\frac{3k^2\beta\,\mathrm{dc}(kx - ct + l)}{\mathrm{nc}(kx - ct + l) + p},
\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $p^2 = \varepsilon^2 = 1$, k, c 为任意非零常数. 当 $r = 1$ 且 $p\varepsilon = 1$ 时(10)与(9)式给出同样的结果.

第三组

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{c + k^3\beta(r^2 + 1)}{k}\\
&+ \frac{3pk^2\beta}{\mathrm{nc}(kx - ct + l) + p}\\
&\pm \frac{3k^2\beta r\,\mathrm{sc}(kx - ct + l)}{\mathrm{nc}(kx - ct + l) + p},
\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $p^2 = \frac{r^2}{r^2 - 1}$($p$ 是虚数), k, c 为任意非零常数. 由于这里 $0 < r < 1$,故(11)式为方程(7)在复标量场中的一组解.

第四组

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{c}{k} + k^2\beta(4 - 5r^2) + 6k^2r^2\beta\,\mathrm{cn}^2(kx - ct + l)\\
&\pm \mathrm{i}6k^2r^2\beta\,\mathrm{cn}(kx - ct + l)\mathrm{sn}(kx - ct + l),
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\mathrm{i}^2 = -1$, k, c 为任意非零常数. 这是 KdV 方程在复标量场中的一组解.

第五组

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{c}{k} + k^2\beta(1 - 5r^2)\\
&+ 6k^2r\beta\,\mathrm{cn}^2(kx - ct + l)\\
&\times [r \pm \mathrm{dc}(kx - ct + l)],
\end{aligned} \tag{13}$$

其中 k, c 为任意非零常数. $r \neq 0$. 这是 KdV 方程的一组精确周期解.

第六组：

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{c + 4k^3(1 - 2r^2)\beta}{k}\\
&+ 12k^2r^2\beta\,\mathrm{cn}^2(kx - ct + l).
\end{aligned} \tag{14}$$

该解为 KdV 方程的椭圆余弦波解，和文献[8]给出的解本质上是一致的. 取 $r=1$，则(14)式化为

$$u(x,t)=\frac{c-4k^3\beta}{k}+12k^2\beta\operatorname{sech}^2(kx-ct+l).\qquad(15)$$

此解为 KdV 方程的钟型孤立波解，可用很多方法求得，文献[5]用双曲函数法给出此解.

3.2. mKdV 方程

考虑标准 mKdV 方程

$$u_t+6u^2u_x+u_{xxx}=0,\qquad(16)$$

把(2)式代入后得

$$-c\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+6k\phi^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}+k^3\frac{\mathrm{d}^3\phi}{\mathrm{d}\xi^3}=0.\qquad(17)$$

由前述平衡原则可得 $m=1$. 借助于 Mathematica 软件，容易得到方程(16)对应的 NAES(形式复杂，略). 对此 NAES 进行求解，得 mKdV 方程(16)的下列解.

第一组

$$u(x,t)=\pm kr\operatorname{cn}(kx-ct+l).\qquad(18)$$

其中 $c=k^3(2r^2-1)$，k 为任意非零常数. 这是 mKdV 方程的椭圆余弦波解. 取 $r=1$，则(18)式变为

$$u(x,t)=\pm k\operatorname{sech}(kx-k^3t+l),\qquad(19)$$

这就是 mKdV 方程的钟型孤立子解.

第二组

$$u(x,t)=\pm k\operatorname{dn}(kx-ct+l),\qquad(20)$$

其中 $c=k^3(2-r^2)$，k 为任意非零常数. 这是一组周期波解. 当 $r=1$ 时结果和(19)式相同.

第三组

$$u(x,t)=\frac{\varepsilon_1}{2}kr\operatorname{cn}(kx-ct+l)+\frac{\varepsilon_2}{2}k\operatorname{dn}(kx-ct+l).\qquad(21)$$

其中 $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$，$c=\frac{1}{2}k^3(1+r^2)$，$k$ 为任意非零常数. 该解为方程(16)的一组新的周期解. 当 $r=1$ 且 $\varepsilon_1\varepsilon_2=1$ 时结果和(19)式相同.

第四组

$$u(x,t)=\pm\mathrm{i}kr\operatorname{sn}(kx-ct+l),\qquad(22)$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$，$c=-k^3(1+r^2)$，k 为任意非零常数. 该解为方程(16)在复标量场中的一组解.

第五组

$$u(x,t)=\frac{\varepsilon_1}{2}kr\operatorname{cn}(kx-ct+l)+\frac{\varepsilon_2}{2}\mathrm{i}kr\operatorname{sn}(kx-ct+l).\qquad(23)$$

其中 $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$，$c=\frac{1}{2}k^3(r^2-2)$，$k$ 为非零常数. 该解也是方程(16)在复标量场中的一组解.

第六组

$$u(x,t)=\pm\frac{1}{2}k\sqrt{\frac{1-p^2}{1+p^2}}\mp kp\sqrt{\frac{1-p^2}{1+p^2}}\times\frac{1}{p+\operatorname{nc}(kx-ct+l)},\qquad(24)$$

其中 k 为非零常数，$r^2=\frac{p^4}{p^4-1}$，

$$c=-\frac{k^3(p^4+6p^2+1)}{2(p^4-1)},p\neq0,p\neq\pm1.$$

该解是 mKdV 方程一组新的周期解. 若要求 $0<r<1$，则 p 必为复数，所以这是方程(16)在复标量场中的一组解.

第七组

$$u(x,t)=\frac{\varepsilon_1}{2}k\sqrt{-r^2(1-p^2)-p^2}\times\frac{\operatorname{sc}(kx-ct+l)}{p+\operatorname{nc}(kx-ct+l)}+\frac{\varepsilon_2}{2}k\sqrt{1-p^2}\frac{\operatorname{dc}(kx-ct+l)}{p+\operatorname{nc}(kx-ct+l)}.\qquad(25)$$

其中 $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1$，$c=\frac{1}{2}k^3(1-2r^2)$，$k$ 为任意非零常数，p 为任意常数. 这是 mKdV 方程在复标量场中的一组解.

3.3. Boussinesq 方程

Boussinesq 方程

$$u_{tt}-c_0^2u_{xx}-\alpha u_{xxxx}-\beta(u^2)_{xx}=0,\qquad(26)$$

把(2)式代入上式得

$$(c^2-k^2c_0^2)\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}-\alpha k^4\frac{\mathrm{d}^4\phi}{\mathrm{d}\xi^4}-\beta k^2\frac{\mathrm{d}^2\phi^2}{\mathrm{d}\xi^2}=0.\qquad(27)$$

为便于后面的计算，把(27)式两边同时对 ξ 积分两次并取积分常数为 0，得

$$(c^2-k^2c_0^2)\phi-\alpha k^4\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}\xi^2}-\beta k^2\phi^2=0.\qquad(28)$$

由前述平衡原则可得 $m=2$. 借助于 Mathematica 软件，容易得到方程(26)对应的 NAES. 该 NAES 要求出所有解是非常困难的，下面给出一些简单情况下(26)式的几组解.

第一组

$$u(x,t)=\frac{c^2-c_0^2k^2-\alpha k^4(5-4r^2)}{2k^2\beta}$$

$$\pm \frac{3k^2\alpha}{\beta}\frac{1}{\mathrm{nc}(kx-ct+l)\pm 1}, \tag{29}$$

其中 k,c 为任意非零常数.这是 Boussinesq 方程一组新的精确周期解.若取 $r=1$,则(29)式变为

$$u(x,t)=\frac{c^2-c_0^2k^2-\alpha k^4}{2k^2\beta} \pm\frac{3\alpha k^2}{\beta}\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)\pm 1}. \tag{30}$$

这是方程(26)的一组钟型孤立波解.

第二组

$$u(x,t)=\frac{c^2-c_0^2k^2+k^4\alpha(r^2-2)}{2k^2\beta} +\frac{3pk^2\alpha}{2\beta}\frac{1}{\mathrm{nc}(kx-ct+l)+p} \pm\frac{3k^2\alpha}{2\beta}\frac{\mathrm{dc}(kx-ct+l)}{\mathrm{nc}(kx-ct+l)+p}, \tag{31}$$

其中 $p^2=1,k,c$ 为任意非零常数.这是 Boussinesq 方程一组新的周期波解.

第三组

$$u(x,t)=\frac{c^2-c_0^2k^2-4k^4\alpha(2r^2-1)}{2k^2\beta} +\frac{6k^2r^2\alpha}{\beta}\mathrm{cn}^2(kx-ct+l), \tag{32}$$

其中 k,c 为任意非零常数.这就是 Boussinesq 方程的椭圆余弦周期波解.若取 $r=1$,则(32)式变为

$$u(x,t)=\frac{c^2-c_0^2k^2-4k^4\alpha}{2k^2\beta} +\frac{6k^2\alpha}{\beta}\mathrm{sech}^2(kx-ct+l). \tag{33}$$

此即 Boussinesq 方程的钟状孤立波解.

第四组

$$u(x,t)=\frac{c^2-c_0^2k^2+\alpha k^4(1+4r^2)}{2k^2\beta} \pm\frac{3\alpha k^2r}{\beta\sqrt{r^2-1}}\frac{1}{\mathrm{nc}(kx-ct+l)\mp\sqrt{\frac{r^2}{r^2-1}}}, \tag{34}$$

其中 k,c 为任意非零常数.由于 $r^2<1$,所以这是 Boussinesq 方程在复标量场中的一组解.

第五组

$$u(x,t) =\frac{c^2-c_0^2k^2+\alpha k^4(1+r^2)}{2k^2\beta} -\varepsilon_1\frac{3\alpha k^2r}{2\beta\sqrt{r^2-1}}\frac{1}{\mathrm{nc}(kx-ct+l)+\varepsilon_1 r/\sqrt{r^2-1}} +\varepsilon_2\frac{3\alpha k^2r}{2\beta}\frac{\mathrm{sc}(kx-ct+l)}{\mathrm{nc}(kx-ct+l)+\varepsilon_1 r/\sqrt{r^2-1}}, \tag{35}$$

其中 $\varepsilon_1^2=\varepsilon_2^2=1,k,c$ 为任意非零常数.由于 $r^2<1$,所以这是 Boussinesq 方程在复标量场中的一组解.

4.结 论

本文对 Jacobi 椭圆函数展开法作了进一步的修正,在此基础上得到了若干非线性演化方程新的精确周期解,有的周期解在一定条件下可以退化为孤立波解.这种方法也可以用来求解非线性演化方程组.有关这方面的结果,将另文给出.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[2] Wang M L, Zhou Y B and Li Z B 1996 *Phys*. *Lett*. A **216** 67

[3] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353 (in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[4] Fan E G 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409 (in Chinese)[范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[5] Zhang G X, Li Z B and Duan Y S 2000 *Science in China* (Series A) **30** 1103 [张桂戌、李志斌、段一士 2000 中国科学(A) **30** 1103]

[6] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2001 *Phys*. *Lett*. A **289** 69

[7] Fu Z T, Liu S K, Liu S D and Zhao Q 2001 *Phys*. *Lett*. A **290** 72

[8] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068(in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[9] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10 (in Chinese)[刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]

[10] Liu S D, Fu Z T, Liu S K and Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718(in Chinese)[刘式达、傅遵涛、刘式适、赵 强 2002 物理学报 **51** 718]

[11] Parkes E J, Duffy B R and Abbott P C 2002 *Phys*. *Lett*. A **295** 280

[12] Chen H T and Zhang H Q 2003 *Chaos*, *Solitons and Fractals* **15** 585

[13] Yan Q Y, Zhang Y F and Wei X P 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 131

[14] Fu Z T, Liu S K, Liu S D and Zhao Q 2003 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **8** 57

[15] Liu S D, Fu Z T, Liu S K and Zhao Q 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **39** 167

[16] Yan Z Y 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 144
[17] Lü K P, Shi Y R, Duan W S and Zhao J B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山、赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]

Expansion method for modified Jacobi elliptic function and its application*

Shi Yu-Ren Guo Peng Lü Ke-Pu Duan Wen-Shan
(*College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)
(Received 2 December 2003; revised manuscript received 27 Feberuary 2004)

Abstract

We generalized the Jacobi elliptic function expansion method and obtained some new exact periodic solutions, thus replenished the known results of a number of nonlinear wave equations by using this method.

Keywords: Jacobi elliptic function expansion method, nonlinear evolution equation, exact solution, periodic solution
PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10247008), the Natural Science Foundation of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNU-KJCXGC-215) and the Natural Science Foundation of Northwest Normal University for Youth Teachers (Grant No. NWNU-QN-2003-29).