第 53 卷 第 10 期 2004 年 10 月
1000-3290/2004/53(10)/3270-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53,No.10,October,2004

Schwarzschild-de Sitter 黑洞宇宙视界量子态的熵*

韩亦文† 洪 云
(达县师范高等专科学校物理系,达州 635000)
(2003 年 11 月 13 日收到;2004 年 2 月 10 日收到修改稿)

采用由广义不确定关系得到的新的态密度方程,研究了 Schwarzchild-de Sitter 时空背景下黑洞宇宙视界的熵.利用新的态密度方程,克服了用 brick-wall 模型方法计算黑洞熵,在消除紫外发散需取截断的不完善之处,以此揭示了黑洞熵与其视界面积成正比这一内在联系,进一步表明黑洞熵是视界面处量子态的熵.

关键词:黑洞,广义不确定关系,态密度,熵
PACC:0420,9760L

1. 引 言

自从 1974 年 Hawking 发现黑洞存在温度为 $T=\kappa/2\pi$ 的量子辐射[1]以来,有关黑洞热力学性质的研究取得了长足的进步.继 Hawking 之后,主要的方法有路径积分法[2]、温度格林函数法[3]、Damour-Ruffini 法[4]和赵峥等人提出的计算黑洞温度及熵的新方法[5—9].众所周知,物理真空,尤其是包含引力场的物理真空,有着极其丰富的内涵,在物理真空中总是存在着物质场的零点振动.而黑洞视界外的一个静止观者将以包围黑洞的热辐射的形式来感受这些振动.最早提出把黑洞熵与它的热辐射联系在一起的是 Thorne 和 Zurek[10]等人.1985 年,G′tHoot[11]假定热辐射和温度为 $T_{\rm H}$ 进而求出它的熵,为了避免发散他假定在靠近黑洞视界的一个小距离之内物质场将消失,因而相应的处理方法被称为 brick-wall 方法.此法在距离满足一定条件时,对应热场的统计熵与 Bekenstein-Hawking 熵是一致的.此后,Demers 等人[12]提出了在 brick-wall 模型中出现的发散可以通过被重整化的牛顿引力常数吸收,从而揭开了 brick-wall 模型方法与引力场量子化及重整化关系的研究热潮.然而,不论是 brick-wall 模型[13],还是薄膜 brick-wall 模型[14—17],虽然其物理意义清晰、明确,但对问题的处理结果仍显得不够自然.最近,引力场量子化的研究显示[18],将修正的不确定关系引入黑洞熵的计算可以得到类似薄膜 brick-wall 方法的结果,并可避免在视界面附近态密度的发散.

本文利用经广义不确定关系改进后的态密度方程,从解 Klein-Gordon 方程出发,研究了 Schwarzchild-de Sitter 黑洞宇宙视界的熵.在此过程中,研究对象只是宇宙视界面附近 Planck 尺度下的薄层,结果表明,不需要取截断亦可以消除 brick-wall 模型方法中出现的发散,所得 Schwarzchild-de Sitter 黑洞熵与其宇宙视界面积成正比.此乃将引力场量子化应用到计算黑洞熵的一次有效尝试.

2. Schwarzchild-de Sitter 时空宇宙视界的位置

Schwarzchild-de Sitter 时空的线元为

$$\mathrm{d}s^2=-(1-\Lambda r^2/3)\mathrm{d}t^2+(1-\Lambda r^2/3)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\tag{1}$$

其中 $\Lambda(>0)$ 为宇宙学常数.不为零的逆变度规分量

$$\begin{aligned}g^{00}&=-(1-\Lambda r^2/3)^{-1},\\ g^{11}&=1-\Lambda r^2/3,\\ g^{22}&=1/r^2,\\ g^{33}&=1/r^2\sin\theta,\end{aligned}\tag{2}$$

及度规行列式为

$$g=-r^2\sin\theta.\tag{3}$$

根据零超曲面的定义[19] $g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}=0$ 得

* 四川省教育厅青年科学基金(批准号:03B047)资助的课题.
† E-mail:hanyw1965@163.com

Schwarzschild-de Sitter 时空宇宙视界面方程为

$$1 - \Lambda r^2/3 = 0, \tag{4}$$

显然,宇宙视界位置为

$$r_c = \sqrt{3/\Lambda}. \tag{5}$$

3. 广义不确定关系与新的态密度方程

普通量子力学中,在考虑到波动粒子的二重性时,位置 x 和动量 p 作为一对共轭的可观测量,不能同时完全确定,其不确定度 $\Delta x \Delta p$ 需满足 Heisenberg 的不确定关系

$$\Delta x \Delta p \geqslant \hbar/2, \tag{6}$$

其中 $\hbar$ 为 Planck 常数.

然而,对于 Planck 尺度下的量子系统,比如量子引力所描述的系统,(6)式不再成立. 为了能够比较准确地描述这类量子系统,需引入经改进的不确定关系[20,21]

$$\Delta x \Delta p \geqslant \hbar/2(1 + \lambda\langle \hat{p}^2\rangle + \beta\langle \hat{x}^2\rangle + \cdots). \tag{7}$$

为了对上式进行简化,这里仅考虑以动量为主导的情形. 于是取 $\beta = 0$, $\lambda \neq 0$,则(7)式改写成

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p &\geqslant \hbar/2(1 + \lambda\langle \hat{p}^2\rangle) \\ &= \hbar/2[1 + \lambda(\Delta p^2 + \langle \hat{p}^2\rangle)].\end{aligned} \tag{8}$$

欲以此来刻画相空间的量子态,可将由坐标和动量所构成的相空间进一步细分为一个个能层 $\varepsilon - \mathrm{d}\varepsilon$,使每个能层成为一个相格,则每一个相格作为相空间的代表点就可以表征系统的一个量子态. 根据(8)式所表示的广义不确定关系,相空间中的每个相格的线度可表示为

$$2\pi\hbar(1 + \lambda p^2). \tag{9}$$

式中,λ 是 Planck 尺度下的量级.

考察(8)式不难看出,Δx 存在一个最小长度 $2\sqrt{\lambda}$. 对于相空间中一个无限小的体元 $\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p$,其所包含的量子态数目可表示成

$$\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3p/(2\pi\hbar)^3(1 + \lambda p^2), \tag{10}$$

其中 $p^2 = p_i p^i$ $(i = 1,2,3)$,从方程(10)出发,可以进一步获得黑体辐射内能的密度为

$$\begin{aligned}u &= \int_0^\infty \frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega} - 1)(1 + \lambda\omega^2)^3} \\ &= \beta^{-4}\int_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x - 1)(1 + ax^2)^3} \\ &= \beta^{-4}G(a),\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $a = \lambda/\beta^2$, $x = \beta\omega$. 欲对(11)式直接积分是很困难的,但可以通过特殊情况下的近似计算来获得所需要的结果.

考虑到黑体辐射在温度比 Planck 温度低得多的情形,即在 $a \ll 1$ 时,

$$G(0) = \int_0^\infty \frac{x^3\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

$$G'(0) = -3\int_0^\infty \frac{x^5\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - 1} = -\frac{24\pi^6}{63},$$

由此可得

$$\begin{aligned}u &= \beta^4[G(0) + aG'(0)] \\ &= \frac{\pi^4\beta^{-4}}{15}\left(1 - \frac{40\pi^2\lambda}{7\beta^2}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

综上所述,对辐射内能密度进行了特殊情况下的修正. 在一般情况下,这个修正是极其微小的,把它与 Planck 温度(10^{32} K)下的情形相比较,不足以改变黑体辐射之结果. 但是,当 $a \gg 1$ 时,(12)式不能成立,然而仍可计算能量密度之上限

$$\begin{aligned}u &< \beta^{-4}\int_0^\infty \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1 + \lambda x^2/\beta^2)^3} \\ &= \beta^{-4}\frac{\pi}{16}\left(\frac{\lambda}{\beta^2}\right)^{-3/2} \\ &= \frac{\pi}{16\lambda^{3/2}}\beta^{-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

与(12)式对应的量子态密度,我们称之为新的态密度,可表示为

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1 + \lambda p^2)^3}. \tag{14}$$

4. 自由能和熵

将(2),(3)式代入零标量粒子的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu)\Phi = 0, \tag{15}$$

并令 $\Phi = \exp(-\mathrm{i}\omega t)\psi(r,\theta,\varphi)$,对(15)式化简、整理得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{R'}{R}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{R}\left[\frac{\omega^2}{R} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\right]\psi = 0, \tag{16}$$

其中 $R_{(r)} = 1 - \Lambda r^2/3$. 采用 Wenzel-Kramers-Brillouin(WKB)近似,令 $\psi = \exp[\mathrm{i}s(r,\theta,\varphi)]$ 由(16)式不难求得

$$p_r^2 = \frac{1}{R}\left[\frac{\omega^2}{R} - \frac{1}{r^2}p_\theta^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right]. \tag{17}$$

将(17)式代入(14)式得

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1+\lambda\omega^2/R)^3} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(1+\lambda\omega^2/R)^3}\int \frac{2}{R^{1/2}}\left[\frac{\omega^2}{R}\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2}p_\theta^2 \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right]^{1/2}\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi \\ &= \frac{2\omega^3}{3\pi}\int \frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2(1+\lambda\omega^2/R)^3}. \end{aligned} \tag{18}$$

自由能

$$\begin{aligned} F(\beta) &= \frac{1}{\beta}\int \mathrm{d}g(\omega)\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega}) \\ &= -\frac{2}{3\pi}\int_{r_c}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\int_0^\infty \frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)(1+\lambda\omega^2/R)^3}. \end{aligned} \tag{19}$$

为此,可求得 Schwarzchild-de Sitter 黑洞的熵

$$\begin{aligned} S &= \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta} \\ &= \frac{2\beta^2}{3\pi}\int_{r_c}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}\omega^4\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)^2(1+\lambda\omega^2/R)^3} \\ &= \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_c}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\int_0^\infty \frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-1)(1+\lambda x^2/\beta^2R)^3}, \end{aligned} \tag{20}$$

式中 $x=\beta\omega$,考虑到不等式

$$1-\mathrm{e}^{-x} > \frac{x}{1+x}, \quad \mathrm{e}^x - 1 > x,$$

由(20)式可得

$$\begin{aligned} S &< \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_c}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\int_0^\infty \frac{(x^3+x^2)\mathrm{d}x}{(1+\lambda x^2/\beta^2R)^3} \\ &= \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_c}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^2}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\beta^2R}\right)^{-2} + \frac{\pi}{16}\left(\frac{\lambda}{\beta^2R}\right)^{-3/2}\right] \\ &= \frac{\beta}{6\pi\lambda^2}\int_{r_c}r^2\mathrm{d}r + \frac{\lambda^{-3/2}}{24}\int_{r_c}\frac{r^2\mathrm{d}r}{R^{1/2}}. \end{aligned} \tag{21}$$

对于(21)式,我们感兴趣的是宇宙视界附近 $[r_c, r_c+\varepsilon]$ 薄层对黑洞熵的贡献.由(8)式所表征的广义不确定关系可得在 Planck 尺度下位置最小的不确定度为 $2\sqrt{\lambda}$,以此作为纯空间线元的最小长度,则有

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\lambda} &= \int_{r_c}^{r_c+\varepsilon}\sqrt{\gamma_{11}}\,\mathrm{d}r \\ &= \int_{r_c}^{r_c+\varepsilon}\frac{1}{R^{1/2}}\mathrm{d}r \\ &\approx \int_{r_c}^{r_c+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\kappa(r-r_c)}} = \sqrt{2\varepsilon/\kappa}, \end{aligned} \tag{22}$$

式中 κ 是黑洞宇宙视界的表面引力势,其值为 $\kappa = 2\pi\beta^{-1}$.利用(5)式计算在宇宙视界附近对黑洞熵贡献的结果为

$$\begin{aligned} S &\approx \frac{\beta}{6\pi\lambda^2}r_c^2\varepsilon + \frac{\lambda^{-3/2}}{12}r_c\sqrt{\lambda} \\ &= \frac{3A_c}{16\pi\lambda}, \end{aligned} \tag{23}$$

其中 $A_c = 4\pi r_c^2$ 是 Schwarzchild-de Sitter 黑洞的表面积.(23)式的结果表明,通过引入广义不确定关系计算新的态密度,所得 de-Sitter 黑洞熵与其宇宙视界面积成正比,这也是我们所期望的结果.

5. 讨 论

从 Schwarzchild-de Sitter 时空背景下的 Klein-Gordon 方程出发,利用广义不确定关系获得新的态密度方程,并以此研究了球对称 Schwarzchild-de Sitter 黑洞宇宙视界面处标量场的熵与其视界面积成正比,这与 Bekenstein 的结论一致.同时,用此法研究黑洞熵不需要取截断就可消除 brick-wall 模型方法中出现的发散.诚然,本文利用广义不确定关系得到的量子态密度所给出的仅仅是黑洞熵的上限.但从中仍可体现出黑洞熵与其视界面面积之间的内在联系,也进一步表明黑洞熵是视界面处量子态的熵,是一种量子效应.

[1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30

[2] Hartle B and Hawking S W 1976 *Phys*. *Rev*. D **31** 2188

[3] Gibbons G W and Perry M J 1978 *Proc*. *R*. *Soc*. (Lond.) A **358** 467

[4] Damour T and Ruffini R 1976 *Phys*. *Rev*. D **14** 332

[5] Zhang J Y and Zhao Z 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2096 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2003 物理学报 **52** 2096]

[6] Li C A 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 986 (in Chinese) [李传安 2001 物理学报 **50** 986]

[7] Zhao R and Zhang L C 2001 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **50** 293 (in Chinese) [赵 仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 293]

[8] He H and Zhao Z 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 2661 (in Chinese) [贺晗、赵 铮 2002 物理学报 **51** 2661]

[9] Song T P, Hou C X and Huang J S 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 1901 (in Chinese) [宋太平、侯晨霞、黄金书 2002 物理学报 **51** 1901]

[10] Zurek W H and Thorne K S 1985 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **54** 2171

[11] G 'tHooft 1985 *Nucl Phys*. B **256** 727

[12] Demers J, Lafrande R and Myers R C 1995 *Phys*. *Rev*. D **52** 2245

[13] Liu W B, Zhu J Y and Zhao Z 2000 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **49** 581(in Chinese)[刘文彪、朱建阳、赵 铮 2000 物理学报 **49** 581]

[14] Han Y W and Liu W B 2002 *J*. *Beijing Normal Univ*.(*Natural Science*)**38** 643[韩亦文、刘文彪 2002 北京师范大学学报(自)**38** 643]

[15] Zhang J Y and Zhao Z 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 2399 (in Chinese)[张靖仪、赵 铮 2002 物理学报 **51** 2399]

[16] Meng Q M, Shu J Q and Li C A 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 1822 (in Chinese)[孟庆苗、苏九清、李传安 2003 物理学报 **52** 1822]

[17] Zhang J Y 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 2344(in Chinese)[张靖仪 2003 物理学报 **52** 2344]

[18] Li X 2002 *Phys*. *Lett*. B **540** 9

[19] Zhao Z 1999 *Thermal Propety of Black Hole and Singularity of Spacetime*(Beijing:Beijing Normal University Press) p8 (in Chinese) [赵 铮 1999 黑洞的热性质与时空奇异性(北京:北京师范大学出版社)第 8 页]

[20] Chang L N *et al* 2002 *Phys*. *Rev*.D **65** 125028

[21] Liu W B, Han Y W and Zhou A Z 2003 *Mod*. *Phys*. A **18** 2681

The quantum state entropy of Schwarzchild-de Sitter black hole cosmos horizon*

Han Yi-Wen　Hong Yun

(*Department of Physics*, *Dazhou Teachers College*, *Dazhou* 635000, *China*)

(Received 13 November 2003; revised manuscript received 10 February 2004)

Abstract

Using the new equation for density of states due to the generalized uncertainty relation, the entropy of Schwarzchild-de Sitter spacetime is discussed. By use of the new equation for density of states, it overcomes the shortcoming that on eliminating divergence the calculation of black hole entropy with brick-wall pattern needs a cut off. Thus, it gets the result of the direct proportion between black hole entropy and its horizon area, brings to light the relationship between Schwarzchild-de Sitter and its cosmos event horizon and makes clear that the black hole entropy is the entropy of quantum state near the event horizon.

Keywords: black hole, generalized uncertainty relation, state density, quantum entropy

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by Sichuan Education Department 's Youth Scientific Foundation, China(Grant No.03B047).