

# 基于部分变量反馈的混沌系统控制<sup>\*</sup>

高铁杠 陈增强<sup>†</sup> 袁著祉

(南开大学信息技术科学学院自动化系, 天津 300071)

(2003 年 8 月 27 日收到, 2004 年 1 月 16 日收到修改稿)

提出了混沌系统部分变量逆序反馈控制器的定义, 并以陈氏系统为例对该类控制器进行了研究, 得出了部分变量正序和逆序控制器存在的条件, 应用该条件扩展了有关文献的研究成果, 得到了混沌系统的多种形式的反馈控制器. 仿真结果显示, 基于部分变量的混沌系统的控制是简单而有效的.

关键词: 部分变量反馈控制, 逆序控制器, 混沌系统

PACC: 0545

## 1. 引言

混沌控制如今已经成为人们的研究热点, 混沌控制的目的主要集中在两个方面, 一是稳定混沌不稳定的参考轨迹, 另一个目的就是混沌的同步. 由于混沌控制已经在保密通信等方面具有广泛应用, 因此人们利用现代控制论技术, 研究了各种各样的混沌控制方法. 如变量反馈控制方法<sup>[1,2]</sup>、自适应方法<sup>[3-5]</sup>、观测器方法<sup>[6-9]</sup>、神经网络方法<sup>[10-12]</sup>, 以及其他各种方法<sup>[13,14]</sup>等. 作为混沌控制最基本的方法之一, 反馈控制一直是人们研究的重点之一, 人们也用了各种各样的反馈手段对混沌进行控制. 本文提出了一种基于部分变量反馈的混沌系统控制, 并在此基础上提出了逆序反馈控制和部分变量逆序反馈控制的概念, 从而统一了目前混沌反馈控制中各种各样的反馈控制构造方法, 推广了有关文献的结论, 通过对典型的陈氏混沌系统的研究和仿真, 得出了该类控制器存在的一些简单实用的条件, 仿真结果显示, 该类控制器在混沌控制中具有良好的性能, 可以成为一种新型的混沌系统控制器构造方法.

## 2. 问题描述

假定混沌系统的动态方程表示为

$$\dot{x} = Ax + F(x), \quad (1)$$

其中  $A \in R^{n \times n}$ ,  $x(t) \in R^n$ ,  $F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$ ,  $f_i(x): R^n \rightarrow R$ , 并且假定  $f_i(x): R^n \rightarrow R$  是  $x$  的 Lipchitz 函数, 即对于任意  $x_1 \in R^n$ ,  $x_2 \in R^n$  存在常数  $M > 0$ , 使得对任何  $1 \leq i \leq p$ ,  $\|f_i(x_1) - f_i(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$  成立.

定义 1 对形如 (1) 式表示的混沌系统, 假设  $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$  为其任意的轨迹点, 令

$$u = K(x_m^p - \bar{x}) = K_0(x - \bar{x}), \quad (2)$$

其中  $K_{n \times n}$  为反馈矩阵,  $m \geq 1$ ,  $K_0 = [0_{n \times m}, k_{n \times (n-m)}]$ ,  $x_m^p = [0, 0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n]^T$ , 如果控制系统

$$\dot{x} = Ax + F(x) + u, \quad (3)$$

能够渐近收敛到  $\bar{x}$ , 则称混沌系统 (1) 能够用部分变量反馈控制.

定义 2 对于系统 (1), 如果存在反馈矩阵  $K$ , 使得  $u = [k_1 x_n, k_2 x_{n-1}, \dots, k_{n-1} x_2, k_n x_1]^T$ , 且控制系统 (3) 能够渐近收敛到  $\bar{x}$ , 则称 (3) 式为逆序反馈控制系统,  $u$  称为系统 (1) 的逆序控制器. 在基于部分变量反馈控制下, 如果  $u = [0, \dots, 0, k_{m+1} x_n, k_{m+2} x_{n-1}, \dots, k_n x_{m+1}]^T$ , 且控制系统 (3) 能够渐近收敛到  $\bar{x}$ , 则称 (3) 式为部分逆序反馈控制系统,  $u$  称为部分逆序控制器. 与此对称, 将传统反馈控制器  $u$  称为正序或部分正序控制器.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 60174021, 60374037)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: chenzq@nankai.edu.cn

### 3. 基于部分状态反馈的混沌控制

由于混沌具有不稳定的均衡点,因此混沌控制的研究内容之一就是稳定混沌系统的不稳定的均衡点.假设混沌系统的动态方程形式为(1)式,不失一般性,设  $\bar{x} = [0, 0, 0]^T$  为系统的不稳定的均衡点,为了使该点稳定,用部分变量反馈的控制系统为

$$\dot{x} = Ax + F(x) + u, \quad (4)$$

其中  $u = Kx_m^p = K_0x, K_0 = [0_{n \times m}, k_{n \times (n-m)}]x_m^p = [0, 0, \dots, 0, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n]^T$ .

**定理 1** 对于系统(4),如果矩阵  $A + K_0$  是 Hurwitz 稳定矩阵,则  $\bar{x} = [0, 0, 0]^T$  为系统(4)的稳定的均衡点.

定理的证明是显而易见的,因为(4)在  $\bar{x} = [0, 0, 0]^T$  的雅可比矩阵为  $A + K_0$ ,而根据系统的稳定性定理可知,系统(4) $x$  渐近收敛到  $\bar{x}$ .

**说明** 由于非线性系统的多个变量之间许多都是耦合的,因此由  $K$  决定部分变量的反馈可以组成多种反馈形式.

**定理 2** 对于陈氏混沌动态系统(5), $m = 1$  时,当  $k_1 < -21, k_2 < 3$  时,系统的部分正序控制器存在. $m = 2$  时,即只有变量  $z$  进行反馈,部分正序控制器不存在.

**证明** 陈氏混沌系统微分方程为连续时间的方程,模型方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \quad (5)$$

当  $a = 35, b = 3, c = 28$  时,系统的呈现混沌状态如图 1,而且  $P_0 = (0, 0, 0)$  为系统的不稳定的均衡点, $m = 1$ ,用部分正序控制器进行控制时, $K_0 = \text{diag}(0, k_1, k_2)$ ,于是

$$A + K_0 = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 + k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 + k_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其特征方程为

$$\lambda^3 + (10 - k_1 - k_2)\lambda^2 + (-38k_1 - 714 - 7k_2 + k_1k_2)\lambda + (3 - k_2)(-735 - 35k_1) = 0. \quad (7)$$

根据 Routh-Hurwitz 标准,求得当

$$k_1 < -21 \text{ 且 } k_2 < 3,$$

$A + K_0$  为稳定矩阵.从而,部分正序控制器存在并

能够控制陈氏混沌系统(5)到稳定的均衡点  $P_0 = (0, 0, 0)$ .

当把该方法用于统一混沌系统时,文献[2]中的定理 1 即为本定理中  $k_2 = 0$  的情形.图 2 显示出  $k_2 = 2, k_1 = -22$  且系统初始值为  $[-15, 15, -12]^T$  时混沌控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy + k_1y, \\ \dot{z} &= xy - bz + k_2z \end{aligned} \quad (8)$$

的状态轨迹,可以看出,系统是稳定的.图 5 显示出  $k_2 = 2, k_1 = -22$  且系统的初始值为  $[-15, 15, -12]^T$  时混沌控制系统的收敛情形.

从混沌系统的最基本的特征即最大李雅普诺夫指数同样可以看到控制混沌系统控制前后的指数变化.图 3 是陈氏混沌系统的李雅普诺夫指数变化图,图 4 表示的是局部变量反馈控制系统(8)的李雅普诺夫指数变化图.由于图 3 的指数大于零,所以系统呈现混沌状态,而系统(8)的指数小于零,所以系统呈现稳定性.

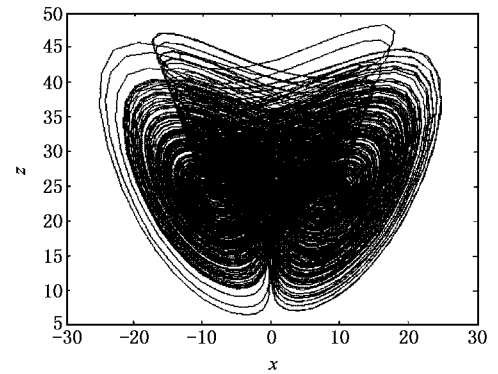


图 1 Chen 系统(5)的混沌轨迹

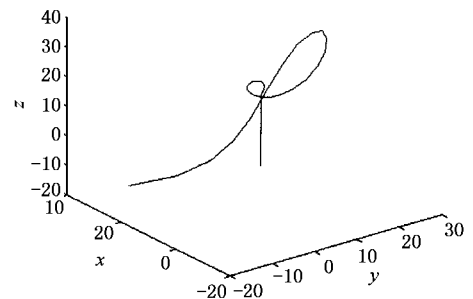


图 2 控制系统(8)的状态轨迹

**说明** 1) 当将  $x, y$  作为部分变量进行反馈时,由于此时

$$A + K_0 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -35 + k_1 & 35 \\ 0 & -7 & 28 + k_2 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

可以用同样的方法证明 此时部分正序控制器存在.

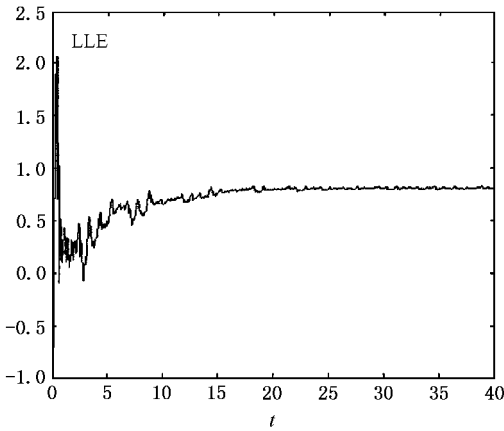


图 3 Chen 系统(5)的李雅普诺夫指数

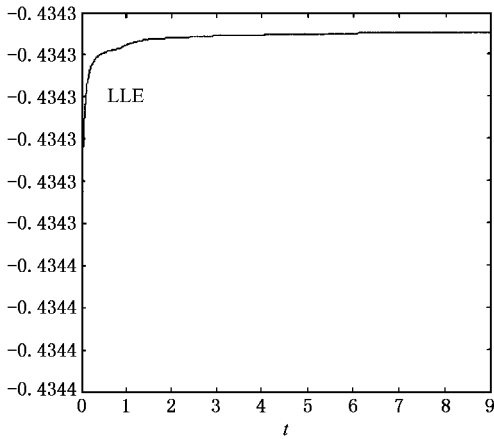


图 4 控制系统(8)的李雅普诺夫指数

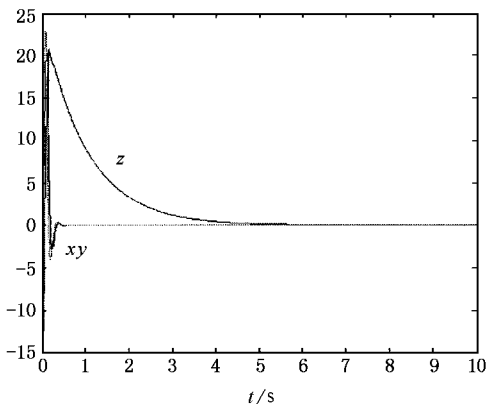


图 5 系统(8)的状态收敛图

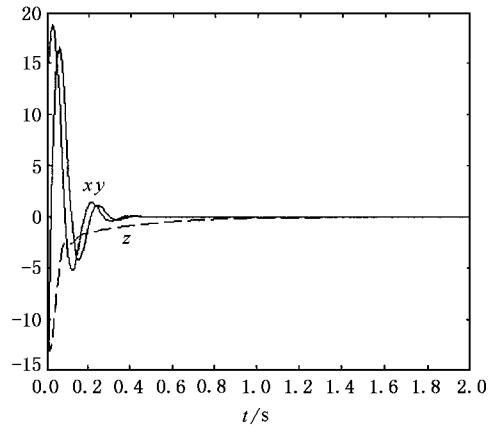


图 6 系统(16)的状态收敛图

2) 当将  $z, x$  作为部分变量进行反馈时, 由于此时

$$A + K_0 = \begin{bmatrix} 28 & 0 & -7 \\ 0 & -3 + k_1 & 0 \\ 35 & 0 & -35 + k_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

可以证明 此时部分正序控制器不存在.

3)  $m = 2$  时,

$$A + K_0 = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & -3 + k_1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由于此时该方程的特征方程为

$$\lambda^3 + (10 - k_1)\lambda^2 + (-714 - 7k_1)\lambda + (3 - k_1)(-735) = 0. \quad (12)$$

根据 Routh-Hurwitz 标准  $A + K_0$  稳定的条件

$$k_1 > 3 \text{ 和 } k_1 < -102$$

产生矛盾 因此 不存在部分正序控制器使得陈氏混沌系统(5)稳定到均衡点  $P_0 = (0, 0, 0)$ .

实际上  $m = 2$  时 对于陈氏混沌系统来说 就是进行单变量的反馈控制 用同样的方法可以证明 对变量  $z$  控制器也不存在 但对于变量  $y$  由定理 1 知该控制器确实存在.

定理 3 对于陈氏混沌动态系统(5) 当  $m = 1$  时 由  $x$  和  $y$  组成的部分逆序反馈控制存在.

证明 显然 当  $m = 1$  时 记系统的状态为  $(z(t), x(t), y(t))$  于是 根据逆序定义有

$$A + K_0 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 35 + k_1 \\ 0 & -7 + k_2 & 28 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

通过求解特征方程并根据 Routh-Hurwitz 标准得到部分逆序反馈控制器存在的条件为

$$(35 + k_1)(k_2 - 7) < -980, \quad (14)$$

此时当  $k_1 = 0$  时 (13) 变为

$$k_2 < -21, \quad (15)$$

用于统一混沌系统的控制时, 这就是文献 [2] 中的定理 2.

图 6 显示出  $k_1 = 15, k_2 = -27$ , 且系统的初始值为  $[-15 \ 15 \ -12]^T$  时混沌控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + k_1 y, \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy + k_2 x, \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (16)$$

的收敛情形. 用同样的方法可以证明: 由  $z$  和  $x$  组成的部分逆序反馈控制器不存在, 由  $y$  和  $z$  组成的部分逆序反馈控制器也不存在.

定理 4 对于陈氏混沌动态系统 (5), 当  $m = 2$  时, 由  $x$  和  $y$  的组合而成的部分反馈控制器存在.

证明 因为此时是由  $x$  和  $y$  的组合而成, 考虑到此时反馈增益矩阵, 因此

$$A + K_0 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 35 \\ 0 & -7 + k_1 & 28 + k_2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其特征方程为

$$\lambda^3 + (10 - k_2)\lambda^2 + (-714 - 35k_1 - 38k_2)\lambda - (735 + 35k_1 + 35k_2) = 0. \quad (18)$$

根据 Routh-Hurwitz 标准得到部分反馈控制器存在的条件为

$$\begin{aligned} k_2 &< 7, \\ k_1 + k_2 &< -21. \end{aligned} \quad (19)$$

图 7 显示出  $k_1 = -27, k_2 = 5$ , 且系统的初始值为  $[-15 \ 15 \ -12]^T$  时混沌控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy + k_1 x + k_2 y, \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (20)$$

的收敛情形.

说明 将该定理用于文献 [1] 的定理 5, 得到文献 [1] 的稳定条件为

$$\begin{aligned} k_2 &> 21, \\ ak_1 + k_2 &> -7. \end{aligned} \quad (21)$$

而文献 [1] 的解为

$$\begin{aligned} ak_1 &< 7, \\ ak_1 + k_2 &> 28. \end{aligned} \quad (22)$$

显然 (22) 表示的解是 (21) 解的子集.

图 8 显示出  $ak_1 = -28, k_2 = 22$ , 且系统的初始

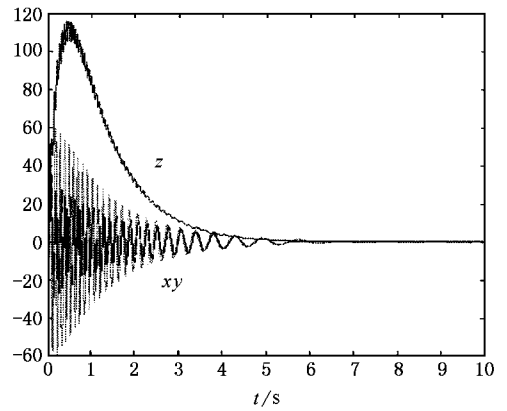


图 7 系统 (20) 的状态收敛图

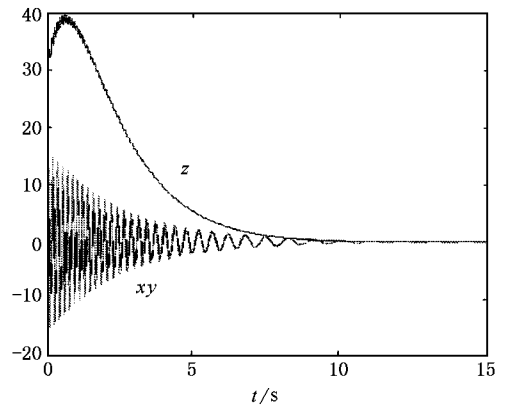


图 8 系统 (23) 的状态收敛图

值为  $[-5 \ 5 \ 30]^T$  时混沌控制系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= (c - a)x - xz + cy + ak_1(y - x) - k_2 y, \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (23)$$

的收敛情形. 显然  $ak_1 = -28, k_2 = 22$  满足条件 (21), 而是不满足条件 (22), 而该系统仍然稳定到  $[0 \ 0 \ 0]^T$ .

同样, 基于部分变量反馈的混沌同步是存在的, 众所周知, 著名的 Lorenz 系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + rx_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - bx_3. \end{aligned} \quad (24)$$

当参数  $p = 10, r = 28, b = 8/3$  时, 系统呈现混沌状态, 当用状态  $y, z$  进行反馈控制时, 将驱动系统写为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= p(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= -y_1 y_3 + r y_1 - y_2 + k_2(y_2 - x_2), \quad (25) \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - b y_3 + k_3(y_3 - x_3), \end{aligned}$$

$$e = [e_x \quad e_y \quad e_z]^T, \quad (26)$$

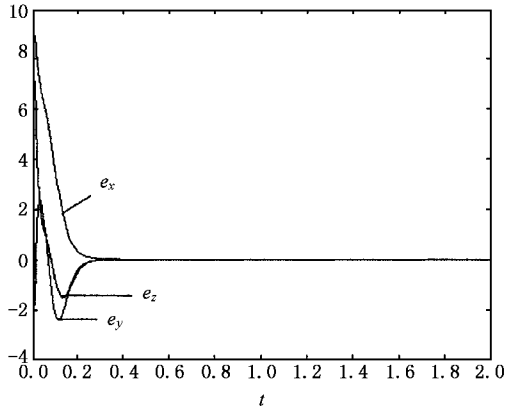


图 9 动态误差(26)随时间收敛情形

其中  $e_x = y_1 - x_1$ ,  $e_y = y_2 - x_2$ ,  $e_z = y_3 - x_3$ . 可以证明当  $k_2 = -45$ ,  $k_3 = -25$  时, 系统(25)可以实现和(24)的同步.

图 9 显示出  $k_2 = -45$ ,  $k_3 = -25$ , 且误差初始状态为  $[11 \quad -10 \quad 13]^T$  时误差的动态变化, 可以看出, 两个系统很快就可以在只有两个状态误差反馈控制下实现同步.

## 4. 结 论

本文应用部分变量反馈对混沌系统的控制进行了研究, 提出了基于正序和逆序控制器的混沌控制, 从而统一了目前混沌反馈控制中各种各样的反馈控制构造方法, 通过对典型的陈氏混沌系统的研究和仿真, 揭示出混沌反馈控制系统的复杂多样性, 也为混沌控制和分析提供了一种参考手段.

- [ 1 ] Yassen M T 2003 *Chaos, Solutions and Fractals* **15** 271
- [ 2 ] Tao Ch H *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 281( in Chinese ) 陶朝海等 2003 物理学报 **52** 281 ]
- [ 3 ] Li Z and Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [ 4 ] Yue D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 292( in Chinese ) 岳冬 2003 物理学报 **52** 292 ]
- [ 5 ] Boccaletti S *et al* 2002 *Physics Reports* . **366** ,1
- [ 6 ] Hasler M 1998 *Int J. Bifurcation Chaos* **8** 647
- [ 7 ] Grassi G and Mascolo S 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** **44** 1011
- [ 8 ] Guan X P *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276( in Chinese ) 关新平等 2003 物理学报 **52** 276 ]
- [ 9 ] Yang X S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1919( in Chinese ) 杨晓松 2000 物理学报 **49** 1919 ]
- [ 10 ] Guan X P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670( in Chinese ) 关新平等 2001 物理学报 **50** 1670 ]
- [ 11 ] Liu D *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 531( in Chinese ) 刘 丁等 2003 物理学报 **52** 531 ]
- [ 12 ] He G G *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2103( in Chinese ) 何国光等 2001 物理学报 **50** 2103 ]
- [ 13 ] Ueta T. & Chen G 2000 *Int. J. Bifurcation Chaos* **10** 1917
- [ 14 ] Nijmeijer H & Mareels I M Y 1997 *IEEE Trans. on Circ Sys.* **1** **44** 882

# Control of chaotic systems based on partial variables feedback<sup>\*</sup>

Gao Tie-Gang   Chen Zeng-Qiang   Yuan Zhu-Zhi

( *Institute of Information Science and Technology ,Nankai University ,Tianjin 300071 , China* )

( Received 27 August 2003 ; revised manuscript received 16 January 2004 )

## Abstract

The definition of partial variables inverse sequence feedback controller of a chaotic system is proposed. We studied this kind of controller with Chen 's chaotic system and get the existing condition of the controller ,and extended the conclusion of the related article , so get various controllers of the chaotic system. Numerical simulations are presented to show that chaotic system control based on partial variables feedback is simple and effective.

**Keywords** : partial variables feedback control , inverse sequence controller , chaotic system

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 60174021 , 60374037 ).