

变量分离法与变系数非线性薛定谔方程的求解探索*

张解放¹⁾ 徐昌智¹⁾²⁾ 何宝钢¹⁾²⁾

¹⁾ 浙江师范大学非线性物理研究所, 金华 321004)

²⁾ 金华教育学院物理系, 金华 321000)

(2003 年 7 月 24 日收到, 2004 年 1 月 2 日收到修改稿)

把变量分离法应用于(1+1)维非线性物理模型, 构建了色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程的一类新的孤子解. 作为特例, 也得到了常系数非线性薛定谔方程的包络型孤子解, 只是解的形式有点变化.

关键词: 变量分离法, 变系数, 薛定谔方程, 孤子解

PACC: 0340, 0230

1. 引言

物理系统的数学建模常常导致非线性演化方程, 其中非线性薛定谔方程

$$i\varphi_z + \frac{1}{2}\varphi_{xx} + |\varphi|^2\varphi = 0 \quad (1)$$

就是一个在物理学特别在光学、流体力学中相当重要和基本的非线性范例, 由它本身及对它的修正形式在物理学许多领域具有重要应用价值. 不过由于方程(1)是高度理想化的, 如果考虑更实际的条件, 就得到其他具有变系数的非线性演化方程. 而要得到实际非线性方程的精确解非常困难, 虽然有不少求解非线性偏微分方程的方法, 但对于变系数非线性偏微分方程, 目前的研究手段主要在数值求解或近似微扰求解^[1,2]. 许多学者对变系数非线性偏微分方程也进行了深入研究, 并提出多种方法^[3-7]. 在线性物理中, 变量分离法和 Fourier 级数展开法是两个重要方法. 逆散射方法被认为是非线性物理中的 Fourier 级数展开法的推广, 但直到最近, 变量分离法才在非线性的物理中得到拓展, 得到了一大类(2+1)维非线性演化方程的通解, 给出了丰富的局域相干结构和相互作用性质^[8-16]. 不过变量分离法对(1+1)维非线性物理模型的推广, 仍存在一定的困难. Zhadnov^[17]把(1+1)维非线性偏微分方程分离为平凡的微分方程. Qu 等人^[18]用对称约化分离变量法获得(1+1)维非线性扩散方程和其他一类方程的

某些精确解. 本文旨在把变量分离法应用于(1+1)维变系数非线性物理系统, 作一些有益的探索.

变系数非线性薛定谔方程在众多物理领域, 如等离子体物理、流体动力学、非线性光学、固体物理, 尤其是纤维光学中有着极其重要的地位, 在实际光纤通讯中传播信息的孤子一般变系数非线性薛定谔方程为

$$i\varphi_z + \frac{1}{2}\beta(z)\varphi_{xx} + \alpha(z)|\varphi|^2\varphi = i\gamma(z)\varphi \quad (2)$$

其中 $\beta(z)$, $\alpha(z)$, $\gamma(z)$ 分别为纵向距离缓变的二阶色散、非线性系数和光纤的损耗因子, $\varphi(z, t)$ 为待求函数. 本文用变量分离法对方程(2)进行了研究, 在此基础上构建了二类色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程的精确解.

2. 变系数非线性薛定谔方程的孤子解

为了方便方程(1)的求解, 先作如下变换:

$$x = \frac{1}{2} \int \beta(z) dz, \quad t = t, \quad (3)$$

则方程(2)变为

$$i\varphi_x + \varphi_{xx} + V(x)|\varphi|^2\varphi = iV_1(x)\varphi, \quad (4)$$

其中

$$V(x) = \frac{2\alpha(\mathcal{A}(x))}{\beta(\mathcal{A}(x))}, \quad V_1(x) = \frac{2\gamma(\mathcal{A}(x))}{\beta(\mathcal{A}(x))}.$$

因此可从方程(4)出发进行讨论, 而方程(2)的解, 经反变换就可得到.

为了利用变量分离法, 现做如下 Bäcklund 变换:

* 国家自然科学基金(批准号:10272072)及浙江省自然科学基金(批准号:100039)资助的课题.

$$\varphi = \frac{g}{f} + \varphi_0, \quad (5)$$

其中 $g(x, t), f(x, t)$ 分别为复函数和实函数, $\varphi_0(x, t)$ 为方程 (4) 的一个任意的已知解. 在 (5) 式的变换下方程 (4) 可写为双线性形式

$$\begin{aligned} & (iD_x + D_t^2)gf + gf^{-1}[V(x)gg^* - D_t^2ff] \\ & + V(x)[2\varphi_0gg^* + g^2\varphi_0^* + (g\varphi_0\varphi_0^* + g^*\varphi_0^2)f] \\ & - iV_t(x)gf = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

符号 D 为 Hirota 意义下的双线性算符

$$D_x^m D_t^n gf \equiv (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n g f |_{(x=x', t=t')}. \quad (7)$$

为了方便讨论, 把种子解 φ_0 设为

$$\varphi_0 = 0, \quad (8)$$

经过深入运算, 发现系统 (6) 拥有如下变量分离解:

$$f = p_1(x) + p_2(x)p_3(x, t), \quad (9)$$

$$g = g_1(x)g_2(x, t)\exp[iq_1(x) + iq_2(x)q_3(x, t)], \quad (10)$$

其中 $p_1 \equiv p_1(x), p_2 \equiv p_2(x), g_1 \equiv g_1(x), q_1 \equiv q_1(x), q_2 \equiv q_2(x)$ 为变量 x 的任意函数, $p_3 \equiv p_3(x, t), g_2 \equiv g_2(x, t), q_3 \equiv q_3(x, t)$ 为变量 x, t 的任意函数. 把 (8)–(10) 式代入 (6) 式, 并令等式的虚部与实部分别为零, 得

$$\begin{aligned} & f^2[-g_1g_2(q_{1x} + q_{2x}q_3 + q_2q_{3x}) + g_1g_{2u} \\ & - g_1g_2q_2^2q_{3t}^2] + f(g_1g_2p_2p_{3u} - 2g_1g_{2t}p_2p_{3t}) \\ & + g_1g_2[-2p_1p_2p_{3u} - 2p_2^2(p_3p_{3u} - p_{3t}^2) \\ & + V(x)g_1^2g_2^2] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & f[-2p_2p_3q_2q_{3t}g_1g_2 - p_{1x}g_1g_2 - p_{2x}p_3g_1g_2 \\ & - p_2p_{3x}g_1g_2] + f^2[g_1g_{2x} + g_{1x}g_2 + 2g_1g_{2t}q_2q_{3t} \\ & + g_1g_2q_2q_{3u} - g_1g_2V_1(x)] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

令 (11)–(12) 式中 $f^i (i=0, 1, 2)$ 前的系数分别为零, 可得

$$g_1g_2[-2p_1p_2p_{3u} - 2p_2^2(p_3p_{3u} - p_{3t}^2) + V(x)g_1^2g_2^2] = 0, \quad (13)$$

$$g_1g_2p_2p_{3u} - 2g_1g_{2t}p_2p_{3t} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & -g_1g_2(q_{1x} + q_{2x}q_3 + q_2q_{3x}) + g_1g_{2u} \\ & -g_1g_2q_2^2q_{3t}^2 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & -2p_2p_3q_2q_{3t}g_1g_2 - p_{1x}g_1g_2 - p_{2x}p_3g_1g_2 \\ & - p_2p_{3x}g_1g_2 = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & g_1g_{2x} + g_{1x}g_2 + 2g_1g_{2t}q_2q_{3t} + g_1g_2q_2q_{3u} \\ & - V_1(x)g_1g_2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

分析 (13)–(14) 式, 可设 $p_3(x, t)$ 满足

$$p_3p_{3u} - p_{3t}^2 = 0. \quad (18)$$

从 (18) 式可得

$$p_3 = \exp[p_0(x)(a_1t + l_1)], \quad (19)$$

其中 $p_0(x)$ 为关于 x 的任意函数, a_1, l_1 为任意常数, 则由 (13) 式可得

$$g_1^2g_2^2 = \frac{2a_1^2p_0^2p_1p_2p_3}{V(x)}, \quad (20)$$

引入一个任意常数 λ_0 , 则从 (20) 式可分离出

$$g_1 = \delta_1 \sqrt{\frac{2a_1^2\lambda_0p_0^2p_1p_2}{V(x)}}, \quad g_2 = \delta_2 \sqrt{\lambda_0^{-1}p^3}, \quad (21)$$

其中 $\delta_1^2 = \delta_2^2 = 1$. 把 (21) 式代入 (14)–(17) 式, 则可得

$$-q_{1x} + \frac{1}{4}a_1^2p_0^2 - q_{2x}q_3 - q_2q_{3x} - q_2^2q_{3t} = 0, \quad (22)$$

$$p_{1x} + p_2p_3\left[2a_1p_0q_2q_{3t} + \frac{p_{2x}}{p_2} + p_{0x}(a_1t + l_1)\right] = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{V(x)}{2V(x)} + \frac{p_{0x}}{p_0} + \frac{p_{1x}}{2p_1} + \frac{p_{2x}}{2p_2} + \frac{1}{2}p_{0x}(a_1t + l_1) \\ & + a_1p_0q_2q_{3t} + q_2q_{3u} - V_1(x) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

从方程 (22)–(24) 可知, 如果 $V(x), V_1(x)$ 确定, 则可求出 $p_0, p_1, p_2, q_1, q_2, q_3$ 的解. 而方程 (4) 的解可以写成

$$\varphi(x, t) = \pm \sqrt{\frac{2a_1^2p_0^2p_1p_2p_3}{V(x)}} \frac{\exp[i(q_1 + q_2q_3)]}{p_1 + p_2p_3}. \quad (25)$$

下面以具体的系统模型为例进行讨论.

1) 第一类色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程^[19]为

$$i\varphi_z + \frac{1}{2}\exp(-\theta z)\varphi_{uu} + |\varphi|^2\varphi = 0. \quad (26)$$

Ruan^[20]已用推广的对称群和相应的有限变换, 研究了方程 (26), 给出了方程的精确解. 对于方程 (26), 具体的变换关系可给出

$$x = -\frac{1}{2\theta}\exp(-\theta z) - x_0, \quad t = t, \quad (27)$$

$$V(x) = -\frac{1}{\theta(x + x_0)}, \quad V_1(x) = 0, \quad (28)$$

其中 θ 为常数参量, x_0 为任意常数.

把 (28) 式代入 (24) 式, 则从非线性微分方程 (22)–(24) 得到分离解

$$q_1 = c_0 - \frac{(c_1 - 1) + a_1^2 c_2^2}{4(x + x_0)}, \quad (29)$$

$$q_2 = \frac{1}{4(x + x_0)}, \quad (30)$$

$$q_3 = t^2 + 2t + c_1, \quad (31)$$

$$p_1 = a_2, \quad p_2 = c_3 \exp\left(\frac{c_2 a_1 - c_2 l_1}{x + x_0}\right),$$

$$p_0 = \frac{c_2}{(x + x_0)}, \quad (32)$$

其中 $c_0, c_1, c_2, c_3, a_1, l_1, a_2$ 为任意常数.

把 (19)(29)–(32) 式代入 (25) 式, 可得到第一类色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程经变换方程 (27)(28) 后的精确解

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \pm \frac{\sqrt{-\frac{2a_1^2 a_2 c_2^2 c_3 \theta}{(x + x_0)} \exp\left[\frac{c_2 a_1}{2(x + x_0)}(t + 1)\right]}}{\left\{a_2 + c_3 \exp\left[\frac{c_2 a_1}{x + x_0}(t + 1)\right]\right\}} \\ & \times \exp\left\{i\left[c_0 + \frac{t^2 + 2t + 1 - a_1^2 c_2^2}{4(x + x_0)}\right]\right\}. \quad (33) \end{aligned}$$

如果取 $c_3 = a_2 \exp(2c_{30})$ (33) 式可变为

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{2a_1^2 c_2^2 \exp(2c_{30}) \theta}{(x + x_0)}} \\ & \times \operatorname{sech}\left[\frac{c_2 a_1}{2(x + x_0)}(t + 1) + c_{30}\right] \\ & \times \exp\left\{i\left[c_0 + \frac{t^2 + 2t + 1 - a_1^2 c_2^2}{x + x_0}\right]\right\}. \quad (34) \end{aligned}$$

利用 (26) 式进行反变换, 则色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程 (26) 的孤子解为

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) = & \pm a_1 c_2 \theta \exp\left(\frac{1}{2} \theta z\right) \operatorname{sech}\left[-c_2 a_1 \theta \exp(\theta z)\right] \\ & \times (t + 1) + c_{30} \exp\left\{i\left[c_0 - \frac{1}{2} \theta \exp(\theta z)\right]\right\} \\ & \times (t^2 + 2t + 1 - a_1^2 c_2^2). \quad (35) \end{aligned}$$

从 (35) 式可见, 光孤子在色散缓变光纤中传输时, 其幅值和脉宽都与传播距离有关, 其幅值与传播距离呈指数增加, 脉宽与传播距离呈指数衰减. 这种效应正好与光纤损耗的影响相反, 所以适当地选择光纤色散变化率可以完全补偿光纤损耗的影响, 从而维持孤子无变形传输. 为了更清楚地了解孤子解 (35) 式的物理意义, 可用 Mathematica 软件画出其模变量 $G = |\varphi(x, t)|$ 随空间 z 和时间 t 演化图. 图 1 正好说明以上结论.

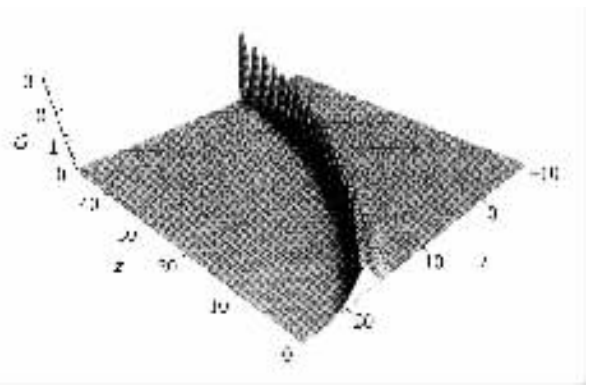


图 1 $\theta = 0.04, c_{30} = -20, c_2 = 25, a_1 = -1$ 时 $G = |\varphi(x, t)|$ 的图像

程^[21]为

$$\begin{aligned} i\varphi_z + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{\theta_1}\right)\varphi_{tt} + \exp(-\theta_2 z)|\varphi|^2\varphi \\ = -\frac{i}{R} \frac{dR}{dz}\varphi, \quad (36) \end{aligned}$$

其中 $R(z)$ 为光纤的有效半径. (36) 式描述了皮秒脉冲在色散缓变单模光纤中孤子效应压缩过程的数学模型, 文献 [19] 用数值计算进行了研究. 对于方程 (36), 具体的变换关系可给出

$$x = -\frac{(\theta_1 - z)^2}{4\theta_1} - x_0, \quad t = t, \quad (37)$$

$$W(x) = \frac{\theta_1 \exp[-\theta_2 z(x)]}{\theta_1 - z(x)},$$

$$V_1(x) = -\frac{2\theta_1}{\theta_1 - z(x)} \frac{dR}{dz}. \quad (38)$$

按同样方法可获得第二类色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程 (36) 的精确解为

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) \\ = \pm \frac{\sqrt{\frac{32a_1^2 a_2 c_2^2 c_3 \theta_1}{(\theta_1 - z)^3} \exp\left(\frac{1}{2} \theta_2 z\right) \exp\left[-\frac{2\theta_1 c_2 a_1}{(\theta_1 - z)}(t + 1)\right]}}{\left\{a_2 + c_3 \exp\left[-\frac{4\theta_1 c_2 a_1}{(\theta_1 - z)}(t + 1)\right]\right\}} \\ \times \exp\left\{i\left[c_0 - \frac{\theta_1(t^2 + 2t + 1 - a_1^2 c_2^2)}{(\theta_1 - z)}\right]\right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

如果取 $c_3 = a_2 \exp(2c_{30})$ (39) 式可变为

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) = & \pm 4a_1 c_2 \sqrt{\frac{2\theta_1 \exp(2c_{30})}{(\theta_1 - z)^3}} \exp\left(\frac{1}{2} \theta_2 z\right) \\ & \times \operatorname{sech}\left[-\frac{2\theta_1 c_2 a_1}{(\theta_1 - z)}(t + 1) + c_{30}\right] \\ & \times \exp\left\{i\left[c_0 - \frac{\theta_1(t^2 + 2t + 1 - a_1^2 c_2^2)}{(\theta_1 - z)}\right]\right\}. \quad (40) \end{aligned}$$

2) 第二类色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方

光纤的有效半径 $R(z)$ 为

$$R(z) = A_0(\theta_1 - z)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\theta_2}{2}z\right), \quad (41)$$

其中 A_0 为积分常数, c_{30} 为任意常数. 从(40)(41)式可见, 光孤子在色散缓变光纤中传输时, 其幅值和脉宽都与传播距离有关, 其幅值与传播距离呈指数增加, 脉宽与传播距离呈指数增加(即展宽), 光纤的有效半径与传播距离呈指数缓慢衰减.

3) 常系数非线性薛定谔方程(1)

为了统一起见, 仍然作如下变换:

$$x = \frac{z}{2}, \quad t = t, \quad (42)$$

$$V(x) = 2, \quad V_1(x) = 0. \quad (43)$$

把(43)式代入(24)式, 则从非线性微分方程(22)-(24)得到分离解为

$$q_1 = c_0 + \left(\frac{a_1^2 c_2^2}{4} - c_4^2\right)x, \quad (44)$$

$$q_2 = \frac{c_4}{x}, \quad q_3 = xt,$$

$$p_1 = a_2, \quad p_2 = c_3 \exp(-2a_1 c_2 c_4 x), \quad p_0 = c_2, \quad (45)$$

其中 $c_0, c_2, c_3, c_4, a_1, l_1, a_2$ 为任意常数. 把(19), (44)(45)式代入(25)式, 并经反变换, 可得常系数非线性薛定谔方程(1)的精确解

$$\varphi(z, t)$$

$$= \pm \sqrt{a_1^2 a_2 c_2^2 c_3} \frac{\exp\left[\frac{1}{2}c_2(a_1 t + l_1) - \frac{1}{2}a_1 c_2 c_3 z\right]}{a_2 + c_3 \exp\left[\frac{1}{2}c_2(a_1 t + l_1) - \frac{1}{2}a_1 c_2 c_3 z\right]} \times \exp\left\{i\left[c_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2 c_2^2}{4} - c_4^2\right)z + c_4 t\right]\right\}. \quad (46)$$

如果取 $c_3 = a_2$ (46)式可变为

$$\varphi(z, t) = \pm \frac{1}{2} a_1 c_2 \operatorname{sech}\left[\frac{1}{2}c_2(a_1 t + l_1) - \frac{1}{2}a_1 c_2 c_3 z\right] \times \exp\left\{i\left[c_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2 c_2^2}{4} - c_4^2\right)z + c_4 t\right]\right\} \quad (47)$$

这就是常系数非线性薛定谔方程包络型的孤子解.

3. 结 语

本文把变量分离法应用于(1+1)维非线性物理模型, 讨论了一般变系数非线性薛定谔方程, 构建了色散缓变光纤变系数非线性薛定谔方程二类模型和常系数非线性薛定谔方程的变量分离解. 由于变系数非线性偏微分方程求解的复杂性, 相信用变量分离法求解变系数物理模型不失为有效的途径, 值得继续探讨. 今后将进一步研究, 以使有益于把变量分离法推广于一大类(1+1)维非线性物理模型, 寻找其变量分离解.

[1] Bordon E E and Anderson W L 1989 *J. Lightwave Technol.* **19** 566
Kivshar Y S and Konotop V V 1989 *J. Quantum Electron.* **7** 353

[2] Xu W C *et al* 1994 *Acta Opt. Sin.* **14** 287 (in Chinese) [徐文成等 1994 光学学报 **14** 287]

[3] Zhang J F and Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]

[4] Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适等 2002 物理学报 **51** 1923]

[5] Zhu Z N 1995 *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** 5673

[6] Lou S Y and Ruan H Y 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 182 (in Chinese) [楼森岳、阮航宇 1992 物理学报 **41** 182]

[7] Zhen Y K and Chan W L 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 441

[8] Tang X Y, Lou S Y and Zhang Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 46601

[9] Lou S Y 2002 *Phys. Scr.* **65** 7

Lou S Y 2000 *Phys. Lett. A* **277** 94

[10] Ruan H Y and Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 586]

[11] Zhang J F 2002 *Commun. Theor. Phys.* **37** 277

[12] Zheng C L *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 11

[13] Zhang J F *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2676 (in Chinese) [张解放等 2002 物理学报 **51** 2676]

[14] Ruan H Y and Chen Y X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1313 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2003 物理学报 **52** 1313]

[15] Zhang J F 2002 *Chin. Phys.* **11** 651

[16] Zheng C L *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 472

[17] Zhadnov R Z 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** 291

[18] Zhang S L, Lou S Y and Qu C Z 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1741
Qu C Z, Zhang S L and Liu R C 2000 *Physica D* **144** 97

[19] Wen S C *et al* 1997 *Sci. China A* **27** 1300

[20] Ruan H Y and Chen Y X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 177 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2000 物理学报 **49** 177]

Ruan H Y, Chen Y X and Lou S Y 2001 *Commun. Theor. Phys.* **35** 641

[21] Cao W H *et al* 1994 *Acta Opt. Sin.* **14** 119 (in Chinese) [曹文华等 1994 光学学报 **14** 119]

The variable separation approach and study on solving the variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation *

Zhang Jie-Fang¹⁾ Xu Chang-Zhi¹⁾²⁾ He Bao-Gang¹⁾²⁾

¹⁾*Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*

²⁾*Department of Physics, Jinhua Educational College, Jinhua 321000, China*

(Received 24 July 2003; revised manuscript received 2 January 2004)

Abstract

In this paper, a variable separation approach is proposed and successfully extended to the $(1+1)$ -dimensional physics models. The new exact solution of two classes of variable-coefficient nonlinear Schrödinger equations are obtained. As a specific example, the envelope soliton solution for nonlinear Schrödinger equations are a by-product, which is somewhat different in form, from the present result.

Keywords : variable separation approach, variable-coefficient, Schrödinger equation, envelope soliton solution

PACC : 0340, 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272072), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 100039).