第 53 卷 第 11 期 2004 年 11 月
1000-3290/2004/53(11)/3673-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.11, November, 2004

Barriola-Vilenkin 黑洞的统计熵

李固强

(湛江师范学院信息科技学院,湛江 524048)

(2003 年 10 月 8 日收到;2004 年 3 月 10 日收到修改稿)

利用量子统计方法,直接计算 Barriola-Vilenkin 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数,然后利用砖墙膜模型计算和讨论黑洞背景下玻色场和费米场的熵.

关键词:量子统计,砖墙膜模型,Barriola-Vilenkin 黑洞,统计熵

PACC:0420,9760L

1. 引 言

't Hooft[1] 首次引进砖墙模型方法研究了标量场对 Schwarzschild 黑洞熵的量子修正,给出了黑洞熵与视界面积成正比的结果. 1995 年,Solodukhin[2] 通过路径积分方法也讨论了标量场对 Schwarzschild 黑洞熵的量子修正,并指出了它包含一个对数项. 运用砖墙模型方法,文献[3—5]讨论了自旋场对 Barriola-Vilenkin 黑洞熵的量子修正,取得了一些有价值的成果. 由于黑洞熵的主要部分来自于黑洞视界附近量子场的贡献[6],因此改进后的砖墙模型[7] 越来越受到欢迎[8—12]. 不过,以往所有采用改进的砖墙方法计算黑洞熵的文献,都取薄膜厚度与截断因子(薄膜到视界的距离)为同阶无穷小,或默认薄膜厚度远小于截断因子,因而得出黑洞熵与视界面积成正比的结论,并把它作为运用改进的砖墙方法计算黑洞熵的必然结果. 本文避开求解波动方程的困难,直接运用量子统计方法[13],计算 Barriola-Vilenkin 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数,再利用砖墙膜模型得到系统熵的表达式. 本文的计算将表明,黑洞熵与视界面积成正比的结论只有在薄膜的厚度远小于截断因子或两者为同阶无穷小时成立,当无穷小薄膜的厚度远大于无穷小截断因子时,黑洞熵有一个对数项,黑洞熵不再与视界面积成正比.

2. Barriola-Vilenkin 时空

在自然单位制中,Barriola-Vilenkin 黑洞外部时空线元[14] 为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \Big(& \frac{(1-8\pi\eta^2)(r-r_{\mathrm{H}})}{r}\mathrm{d}t^2 \\ & - \frac{r}{(1-8\pi\eta^2)(r-r_{\mathrm{H}})}\mathrm{d}r^2 \\ & - r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)\Big), \end{aligned} \tag{1}$$

式中 $r_{\mathrm{H}}=2M/(1-8\pi\eta^2)$ 为事件视界,η 为对称性破缺的能量尺度.

黑洞的辐射温度为

$$T_0 = \frac{1-8\pi\eta^2}{4\pi r_{\mathrm{H}}}, \tag{2}$$

由文献[15]知无穷远静止观测者测得的固有温度为

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{g_{tt}}}. \tag{3}$$

3. 玻色场的熵

对玻色系统,求巨配分函数

$$\begin{aligned} \ln Z &= -\sum_i g_i \ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}) \\ &= \sum_i g_i \sum_n \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_i}. \end{aligned} \tag{4}$$

在单位体积里,能量在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 或 v 到 $v+\mathrm{d}v$ 间隔内的粒子的量子态数为

$$g(v)\mathrm{d}v = j4\pi v^2\mathrm{d}v, \tag{5}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度,在时空方程(1)中,任意 r 点的二维曲面为

$$A(r) = \int\sqrt{g}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{6}$$

式中

$$g = \begin{vmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi},$$

在视界外,任意 r 点的壳层体积元为

$$\mathrm{d}V = A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

所以在视界外,任意 r 点任意厚度的壳层内系统的巨配分函数为

$$\begin{aligned}\ln Z &= \int A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r\sum_i g_i\sum_n \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_i}\\ &= j4\pi\int A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r\sum_n \frac{1}{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-n\beta\hbar v}v^2\mathrm{d}v\\ &= \frac{j\pi^2}{90}\int\frac{\sqrt{-g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}}{\beta^3}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{j2\pi^3}{45\beta_0^3}\frac{1}{(1-8\pi\eta^2)^2}\int\frac{r^4}{(r-r_{\mathrm{H}})^2}\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{8}$$

式中

$$\beta_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{4\pi r_{\mathrm{H}}}{1-8\pi\eta^2},\quad \beta = \frac{1}{T} = \sqrt{g_{tt}}\beta_0. \tag{9}$$

利用熵和巨配分函数的关系

$$S = \ln Z - \beta_0\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta_0},$$

得

$$S_{\mathrm{b}} = 4\ln Z = \frac{j(1-8\pi\eta^2)}{360r_{\mathrm{H}}^3}\int\frac{r^4}{(r-r_{\mathrm{H}})^2}\mathrm{d}r. \tag{10}$$

采用薄膜方法,对 r 取积分区间 $[r_{\mathrm{H}}+\varepsilon, r_{\mathrm{H}}+\varepsilon+\delta]$,其中 $0<\varepsilon\ll r_{\mathrm{H}}$ 为无穷小截断因子(薄膜到视界的距离),$0<\delta\ll r_{\mathrm{H}}$ 为无穷小薄膜的厚度.令 $R = r - r_{\mathrm{H}}$,积分(10)式,得

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{b}} = \frac{j(1-8\pi\eta^2)}{360r_{\mathrm{H}}^3}\Big[&\frac{R^3}{3}+2r_{\mathrm{H}}R^2\\ &+6r_{\mathrm{H}}^2R+4r_{\mathrm{H}}^3\ln R-\frac{r_{\mathrm{H}}^4}{R}\Big]_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta}.\end{aligned} \tag{11}$$

当 $\varepsilon\ll\delta\ll r_{\mathrm{H}}$,即薄膜的厚度远大于截断因子时,

$$S_{\mathrm{b}} \approx \frac{j(1-8\pi\eta^2)}{90}\ln\frac{\varepsilon+\delta}{\varepsilon}+\frac{j(1-8\pi\eta^2)r_{\mathrm{H}}}{360\varepsilon}. \tag{12}$$

当薄膜的厚度远小于截断因子或两者为同阶无穷小时,

$$S_{\mathrm{b}} = \frac{j(1-8\pi\eta^2)r_{\mathrm{H}}}{360\varepsilon'}, \tag{12a}$$

式中 $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon(\varepsilon+\delta)}{\delta}$.

引入从视界 r_{H} 到 $r_{\mathrm{H}}+\varepsilon$ 的固有距离

$$l_p = \int_{r_{\mathrm{H}}}^{r_{\mathrm{H}}+\varepsilon}\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{8M\varepsilon}}{1-8\pi\eta^2},$$

然后选取紫外截断因子 ϵ 和红外截断因子 Λ 的取值,使得

$$l_p^2 = \frac{2}{15}\epsilon^2,\quad \Lambda^2 = \frac{(\varepsilon+\delta)\epsilon^2}{\varepsilon}. \tag{13}$$

方程(12)可改写为

$$S_{\mathrm{b}} = \frac{jA}{48\pi\epsilon^2}+\frac{j(1-8\pi\eta^2)}{45}\ln\frac{\Lambda}{\epsilon}, \tag{14}$$

式中 $A = 4\pi r_{\mathrm{H}}^2$ 为视界的表面积.调整固有距离

$$l_p = \int_{r_{\mathrm{H}}}^{r_{\mathrm{H}}+\varepsilon'}\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{8M\varepsilon'}}{1-8\pi\eta^2},$$

仍按(13)式选取紫外截断因子 ϵ 和红外截断因子 Λ 的取值,方程(12a)可改写为

$$S_{\mathrm{b}} = \frac{jA}{48\pi\epsilon^2}. \tag{14a}$$

4. 费米场的熵

对费米系统,巨配分函数

$$\begin{aligned}\ln Z &= \sum_i g_i\ln(1+\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i})\\ &= \sum_i g_i\sum_n\frac{(-1)^{n-1}}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_i},\end{aligned} \tag{15}$$

利用(5)—(7)式,得

$$\begin{aligned}\ln Z &= j4\pi\int A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r\sum_n\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-n\beta\hbar v}v^2\mathrm{d}v\\ &= \frac{7}{8}\frac{j2\pi^3}{45\beta_0^3}\frac{1}{(1-8\pi\eta^2)^2}\int\frac{r^4}{(r-r_{\mathrm{H}})^2}\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{16}$$

利用第三部分的结果,可得费米场的熵.当薄膜的厚度远大于截断因子时,

$$S_{\mathrm{F}} = \frac{7}{8}\left(\frac{jA}{48\pi\epsilon^2}+\frac{j(1-8\pi\eta^2)}{45}\ln\frac{\Lambda}{\epsilon}\right). \tag{17}$$

当薄膜的厚度远小于截断因子或两者为同阶无穷小时,

$$S_{\mathrm{F}} = \frac{7}{8}\frac{jA}{48\pi\epsilon^2}. \tag{17a}$$

5. 结果与讨论

本文直接运用量子统计方法,计算 Barriola-Vilenkin 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数,再利用砖墙膜模型计算了系统的熵.本文的计算表明,黑洞的熵与视界面积成正比的结论只有在薄膜的厚度远小于截断因子或两者为同阶无穷小时成立.这种情形下,只要选取恰当的截断因子,黑洞熵还可以写为其视界面积的 1/4,这与 Bekenstein 的理论一致[16].当 $j=1$,$\eta=0$ 时,结论回到 't Hooft 的结果.当

$j=2$ 时，结论回到 Li[3] 的结果.

当薄膜的厚度远大于截断因子但仍然远小于视界半径时，黑洞熵除了一个与面积成正比的发散项以外，还有一个对数发散项，黑洞熵不再与视界面积成正比. 我们注意到，由于计算仍然限于视界附近，故远离围绕系统的真空的贡献项不会出现. 当 $j=1$，$\eta=0$ 时，结论回到 Solodukhin[2] 的结果.

此外，本文的计算还表明，黑洞熵与粒子自旋简并度成正比，在取相同的截断因子时，费米场的熵为玻色场的熵的 7/8 倍.

[1] 't Hooft G 1985 *Nucl*. *Phys*. B **256** 727
[2] Solodukhin S N 1995 *Phys*. *Rev*. D **51** 609
[3] Li Z H 2000 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **17** 396
[4] Lu M W and Jing J L 2000 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 1331
[5] Li G Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1346 (in Chinese)[李固强 2003 物理学报 **52** 1346]
[6] Li X and Zhao Z 2000 *J*. *Beijing Normal Univ*.(Natur. Sci.) **36** 69 (in Chinese)[李　翔、赵　峥 2000 北京师范大学学报(自然科学版) **36** 69]
[7] Li X and Zhao Z 2000 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **15** 1739
[8] Li C A，Wei X Q，Meng Q M and Liu J L 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2173 (in Chinese)[李传安、魏显起、孟庆苗、刘景伦 2002 物理学报 **51** 2173]
[9] Song T P，Hou C X and Huang J S 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1901 (in Chinese)[宋太平、侯晨霞、黄金书 2002 物理学报 **51** 1901]
[10] Zhao R and Zhang L C 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1167 (in Chinese)[赵　仁、张丽春 2002 物理学报 **51** 1167]
[11] Li C A，Meng Q M and Su J Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1897 (in Chinese)[李传安、孟庆苗、苏九清 2002 物理学报 **51** 1897]
[12] Sun M C 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1350 (in Chinese)[孙鸣超 2003 物理学报 **52** 1350]
[13] Zhao R，Zhang J F and Zhang L C 2001 *Nucl*. *Phys*. B **609** 247
[14] Barriola M and Vilenkin A 1989 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **63** 341
[15] Lee M H and Kim J K 1996 *Phys*. *Rev*. D **54** 3904
[16] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333

Statistical entropy of Barriola-Vilenkin black hole

Li Gu-Qiang
(*School of Information Technology and Science*，*Zhanjiang Normal College*，*Zhanjiang* 524048，*China*)

(Received 8 October 2003；revised manuscript received 10 March 2004)

Abstract

The partition functions of bosonic and fermionic field in Barriola-Vilenkin black hole are directly derived by using the method of quantum statistics. Then the entropy of the Barriola-Vilenkin black hole is calculated by using the improved brick-wall method in the frame of membrane model.

Keywords：quantum statistics，brick-wall membrane model，Barriola-Vilenkin black hole，statistical entropy
PACC：0420，9760L