

# Roy-型奇偶非线性相干态的位相概率分布<sup>\*</sup>

王继锁<sup>1)2)3)</sup> 刘堂昆<sup>3)4)</sup> 冯 健<sup>1)</sup> 孙金祚<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 聊城大学物理系,聊城 252059)

<sup>2)</sup> 烟台大学物理系,烟台 264005)

<sup>3)</sup> 中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室,武汉 430071)

<sup>4)</sup> 湖北师范学院物理系,黄石 435002)

(2003 年 7 月 3 日收到,2003 年 12 月 9 日收到修改稿)

借助于数值计算方法,研究了 Roy-型奇偶非线性相干态的位相概率分布特性.结果表明,它们的位相概率分布不同;与通常的奇偶相干态不同,在这种新的奇偶非线性相干态中,Pegg-Barnett 位相概率分布能明显地反映出不同的量子干涉特性.

关键词: Roy-型奇偶非线性相干态, Pegg-Barnett 位相算符公式, 位相概率分布

PACC: 4250, 0365

## 1. 引 言

在近代物理学中,位相是一个极其重要的物理量,它与许多物理现象密切相关.在量子光学中位相问题一直倍受人们的重视.我们知道,高强度的相干态具有半经典的位相性质<sup>[1]</sup>,而压缩态的位相仍保持它的量子特性<sup>[2]</sup>,对压缩相干态的位相人们也已进行了深入的研究<sup>[2-4]</sup>;20 世纪 80 年代末期,Pegg 和 Barnett 提出了量子光场厄米位相算符<sup>[5-7]</sup>,这使得人们从本质上进一步研究量子光场的位相问题成为可能.人们利用 Pegg-Barnett 位相理论,对相干态光场<sup>[7-9]</sup>、压缩态光场<sup>[10,11]</sup>、Jaynes-Cummings 模型<sup>[12]</sup>的位相特性作了较为广泛的研究.

最近,Roy 等人<sup>[13,14]</sup>定义了一种新的非线性相干态,并且研究了它们的非经典特性,我们在文献<sup>[15]</sup>中引入了一种新的奇偶非线性相干态(可称之为 Roy-型奇偶非线性相干态),并且研究了它们的压缩、振幅平方压缩和反聚束效应等量子统计性质.本文在此基础上,运用 Pegg-Barnett 厄米位相公式,研究它们的位相概率分布特性.

## 2. Roy-型奇偶非线性相干态的定义

为了下面行文和完备性起见,本节先来回顾有

关新的非线性相干态<sup>[13,14]</sup>和 Roy-型奇偶非线性相干态<sup>[15]</sup>的一些结果.

按照 Roy 等人<sup>[13,14]</sup>的定义,新的非线性相干态(可称之为 Roy-型非线性相干态,下同)定义为  $f$ -谐振子的一种湮没算符  $B = a \frac{1}{f(N)}$  的本征态

$$B|\beta f\rangle = \beta|\beta f\rangle, \quad (1)$$

式中  $\beta$  为复参数,  $f$  为数算符  $N = a^+ a$  的非负函数,  $a^+$  和  $a$  分别为通常简谐振子的产生和湮没算符.在粒子数表象中,Roy-型非线性相干态可表示为<sup>[13,14]</sup>

$$|\beta f\rangle = N_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n f(n)!}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2)$$

式中

$$f(n)! = f(n)f(n-1)\dots f(1)f(0), \quad f(0) = 1, \quad (3)$$

$$N_f = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{2n} [f(n)!]^2}{n!} \right\}^{-1/2}. \quad (4)$$

与奇偶非线性相干态的定义<sup>[16]</sup>相类似,文献<sup>[15]</sup>中引入了一种新的奇偶非线性相干态,即算符  $B^2$  的两个正交归一本征态(我们称之为 Roy-型奇偶非线性相干态,下同,文中不再注明)

$$|\beta f_{\pm}\rangle = N_{\pm} (|\beta f_{\pm}\rangle - \beta f), \quad (5)$$

式中“+”号对应 Roy-型偶非线性相干态;“-”号对应 Roy-型奇非线性相干态(下同), $N_{\pm}$  为归一化系数,

\* 国家自然科学基金(批准号:10074072)及山东省自然科学基金(批准号:Y2002A05)资助的课题.

$$N_{\pm} = \left\{ 2 \pm 2N_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|\beta|^2)^n [f(n)!]}{n!} \right\}^{-1/2}. \quad (6)$$

在粒子数表象中, Roy-型奇偶非线性相干态可表示为<sup>[15]</sup>

$$|\beta f_{\pm}\rangle = N_{\pm} N_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\beta^n \pm (-\beta)^n] f(n)!}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (7)$$

当然, 在(7)式中若选取不同的函数  $f(n)$ , Roy-型奇偶非线性相干态将会有不同的表现形式, 本文中选取函数  $f(n)$  具有在描述囚禁离子运动时已使用过<sup>[17]</sup>的下列形式:

$$f(n) = L_n^1(\eta^2) \mathbf{I}(n+1) L_n^0(\eta^2) \mathbf{I}^{-1}, \quad (8)$$

式中  $\eta$  为 Lamb-Dicke 参数,  $L_n^m(x)$  为缔合 Laguerre 多项式<sup>[18]</sup>.

### 3. Roy-型奇偶非线性相干态的位相概率分布

下面运用 Pegg-Barnett 位相算符公式<sup>[5-7]</sup>, 考察由(7)式所定义的 Roy-型奇偶非线性相干态的位相特性.

Pegg-Barnett 位相算符是基于有限的  $(s+1)$  维 Hilbert 空间的一组正交完备位相态矢  $|\theta_m\rangle$  ( $m=0, 1, 2, \dots, s$ ) 而定义的,

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (9)$$

式中位相  $\theta_m$  为

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2m\pi}{s+1}, \quad m=0, 1, 2, \dots, s, \quad (10)$$

式中  $\theta_0$  为参考位相, Pegg 和 Barnett 假定: 所有位相变量的期待值在  $(s+1)$  维 Hilbert 空间进行, 然后允许  $s$  趋于无穷. 在该空间中, 厄米位相算符被定义为

$$\Phi_0 = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (11)$$

对于形式如  $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\varphi} |n\rangle$  的叠加态, 经计算可得到其位相概率分布为

$$|\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} \sum_{n>k} b_n b_k \times \cos[(n-k)\varphi - \theta_m]. \quad (12)$$

这里将参考位相  $\theta_0$  作如下选择:

$$\theta_0 = \varphi - \frac{s\pi}{s+1}, \quad (13)$$

由(10)式可以得到

$$\theta_m = \varphi + \frac{2\pi\mu}{s+1}, \quad (14)$$

式中  $\mu = m - s/2$  为  $-s/2$  到  $s/2$  整数步长的新位相标号,  $\theta_0$  的这种选择使得位相概率分布相对于  $\mu$  对称. 因此由(11)式可得

$$|\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+1} \sum_{n>k} b_n b_k \times \cos\left[(n-k)\frac{2\mu\pi}{s+1}\right]. \quad (15)$$

在  $s \rightarrow \infty$  的连续谱极限下,  $\theta_m$  为连续变量, 可以用  $\theta$  代替  $2\pi\mu/(s+1)$ , 用  $d\theta$  代替  $2\pi/(s+1)$ , 于是可得到连续位相概率分布  $P(\theta)$  为

$$P(\theta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{2\pi} |\langle \theta_m | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] \right) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi). \quad (16)$$

因此, 对于由(7)式所定义的 Roy-型奇偶非线性相干态, 其连续位相概率分布  $P_{\pm}(\theta)$  分别为

$$P_{\pm}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n>k} (b_{\pm})_n (b_{\pm})_k \cos[(n-k)\theta] \right) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi), \quad (17)$$

式中

$$(b_{\pm})_n = N_{\pm} N_f \frac{[r^n \pm (-r)^n] f(n)!}{\sqrt{n!}}, \quad \beta = r \exp(i\phi). \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式, 并考虑到(3)(4)(6)和(8)式, 借助于数值计算方法, 可以得到 Roy-型奇偶非线性相干态的连续位相概率分布, 如图1至图4所示.

图1和图2分别给出当参数  $\beta$  取某一固定值 ( $\beta=0.4$ ) 而 Lamb-Dicke 参数  $\eta$  分别取不同值 ( $\eta=0.3, 0.6$  和  $0.8$ ) 时, Roy-型奇偶非线性相干态的位相概率分布随  $\theta$  的变化规律. 由图1可以看出, 对于 Roy-型偶非线性相干态, 当 Lamb-Dicke 参数  $\eta$  较小 ( $\eta=0.3$ ) 时, 其位相概率分布呈单峰结构, 位于中心  $\theta=0$  附近 (见图1中曲线 a). 随 Lamb-Dicke 参数  $\eta$  的增加 ( $\eta=0.6$  和  $0.8$ ), 中心峰消失, 分别变为四峰 (分别位于  $\theta = \pm\pi/4$  和  $\theta = \pm 3\pi/4$  附近, 见图1中曲线 b) 或双峰 (分别位于  $\theta = \pm\pi/2$  附近, 见图1中曲线 c) 结构, 由此可以看到, 对于相对而言 Lamb-Dicke 参数  $\eta$  较大的值, Roy-型偶非线性相干态的量子干涉效应变得显著. 而对于 Roy-型奇非线性相干态, 由图2可以看出, 这时当  $\eta$  取不同值时, 其位相概率分布均呈现峰值位于中心  $\theta=0$  附近的单峰结构, 且随 Lamb-Dicke 参数  $\eta$  的增加, 峰宽渐窄, 峰高增加, 即随 Lamb-Dicke 参数  $\eta$  的增加, 峰的结构越

来越明显.另外,由图 1 和图 2 易见,Roy-型奇非线性相干态和 Roy-型偶非线性相干态的位相概率分布很不同,因此与通常的奇偶相干态不同,在 Roy-型奇偶非线性相干态中,Pegg-Barnett 位相概率分布能明显地反映出不同的量子干涉特性.

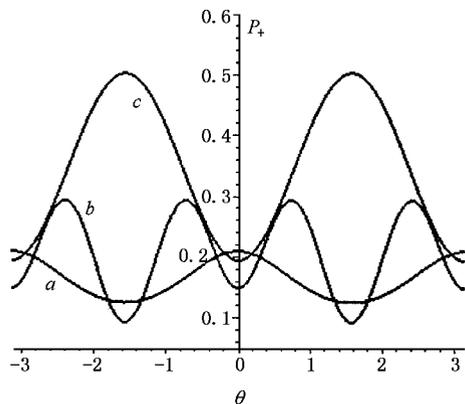


图 1 当  $\beta = 0.4$  时 Roy-型偶非线性相干态的位相分布  $\eta = 0.3$  (曲线 a)  $\beta = 0.6$  (曲线 b) 和  $0.8$  (曲线 c).

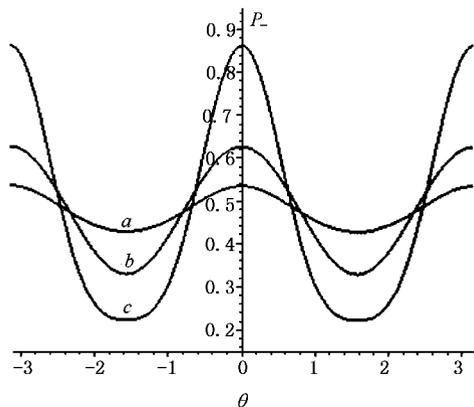


图 2 当  $\beta = 0.4$  时 Roy-型奇非线性相干态的位相分布 图注同图 1

图 3 和图 4 分别给出当 Lamb-Dicke 参数  $\eta$  取某一固定值( $\eta = 0.3$ )时,Roy-型奇偶非线性相干态的位相概率分布随  $|\beta|$  和  $\theta$  的变化规律.由图 3 和图 4 可以看出,当  $\eta$  取某一固定值(例如  $\eta = 0.3$ )时,对于 Roy-型奇偶非线性相干态,它们的位相概率分布有一个共同的特点,即均只呈现峰值位于中心  $\theta = 0$  附近的单峰结构,并且随参数  $\beta$  的增大,峰高增高,

即随参数  $\beta$  的增加其峰结构越来越明显;但是,对于参数  $\beta$  的同一值,Roy-型奇非线性相干态位相概率分布的单峰要比 Roy-型偶非线性相干态的峰值高,且峰宽稍窄.总之,Roy-型奇偶非线性相干态位相概率分布的峰结构完全不同.

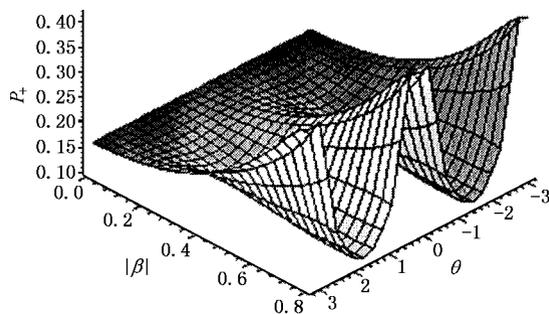


图 3 当  $\eta = 0.3$  时 Roy-型偶非线性相干态的位相分布随  $|\beta|$  的变化曲线

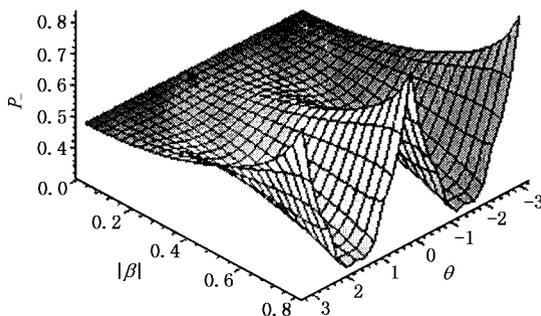


图 4 当  $\eta = 0.3$  时 Roy-型奇非线性相干态的位相分布随  $|\beta|$  的变化曲线.

### 4. 结 论

位相概率分布是研究各种位相特性的基本工具,本文在文献 [15] 工作的基础上,运用 Pegg-Barnett 厄米位相算符公式,研究了 Roy-型奇偶非线性相干态位相概率分布特性.结果表明,它们的位相概率分布很不同;与通常的奇偶相干态不同,在这种新的奇偶非线性相干态中,Pegg-Barnett 位相概率分布能明显地反映出它们不同的量子干涉特性.

- [ 1 ] Carruthers P and Nieto M 1968 *Rev. Mod. Phys.* **40** 411
- [ 2 ] Sanders B C , Barnett S M and Knight P L 1986 *Opt. Commun.* **58** 290
- [ 3 ] Fan H Y and Zaidi H R 1988 *Opt. Commun.* **68** 143
- [ 4 ] Yao D 1987 *Phys. Lett. A* **122** 77
- [ 5 ] Pegg D T and Barnett S M 1988 *Europhys. Lett.* **6** 483
- [ 6 ] Pegg D T and Barnett S M 1989 *Phys. Rev. A* **39** 1665
- [ 7 ] Barnett S M and Pegg D T 1989 *J. Mod. Opt.* **36** 7
- [ 8 ] Gantsog T and Tanas R 1991 *Opt. Commun.* **82** 145
- [ 9 ] Lynch R 1990 *Phys. Rev. A* **41** 2841
- [ 10 ] Grabech-Jensen N *et al* 1989 *J. Opt. Soc. Am. B* **6** 2423
- [ 11 ] Schleich W , Horowicz R J and Varro S 1989 *Phys. Rev. A* **40** 7405
- [ 12 ] Ho T D *et al* 1991 *J. Mod. Opt.* **38** 2069
- [ 13 ] Roy B and Roy P 2000 *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **2** 65
- [ 14 ] Roy B and Roy P 2000 *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **2** 505
- [ 15 ] Wang J S , Feng J , Liu T K and Zhan M S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2509 ( in Chinese ) 王继锁、冯 健、刘堂昆、詹明生 2002 物理学报 **51** 2509 ]
- [ 16 ] Mancini S 1997 *Phys. Lett. A* **233** 291
- [ 17 ] de Matos Filho R L and Vogel W 1996 *Phys. Rev. A* **54** 4560
- [ 18 ] Abramowitz M and Stegun I A ( eds ) 1972 *Handbook of Mathematical Functions* ( New York :Dover )

## Phase probability distributions of Roy-type even and odd nonlinear coherent states <sup>\*</sup>

Wang Ji-Suo<sup>1)2)3)</sup> Liu Tang-Kun<sup>3)4)</sup> Feng Jian<sup>1)</sup> Sun Jin-Zuo<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>( Department of Physics , Liaocheng University , Liaocheng 252059 , China )

<sup>2)</sup>( Department of Physics , Yantai University , Yantai 264005 , China )

<sup>3)</sup>( State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics , Wuhan Institute of Physics and Mathematics , Chinese Academy of Sciences , Wuhan 430071 , China )

<sup>4)</sup>( Department of Physics , Hubei Normal University , Huangshi 435002 , China )

( Received 3 July 2003 ; revised manuscript received 9 December 2003 )

### Abstract

Based on our previous work , with the aid of the numerical method , the phase probability distributions of Roy-type even and odd nonlinear coherent states are investigated. It is shown that the distributions for the states are rather different , and unlike the case of ordinary even and odd coherent states the Pegg-Barnett distribution clearly reflects the different characters of quantum interference in the case of Roy-type even and odd nonlinear coherent states.

**Keywords :** Roy-type even and odd nonlinear coherent states , Pegg-Barnett formalism of phase operator , phase probability distribution

**PACC :** 4250 , 0365

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10074072 ) , and the Natural Science Foundation of Shandong Province , China ( Grant No. Y2002A05 ) .