

# 水平流作用下行波对流的成长及周期性重复<sup>\*</sup>

李国栋<sup>†</sup> 黄永念

(北京大学力学与工程科学系, 湍流与复杂系统研究国家重点实验室, 北京 100871)

(2003 年 12 月 16 日收到, 2004 年 2 月 12 日收到修改稿)

数值模拟研究了在极其微弱的水平流动作用下, 混合流体 Rayleigh-Benard 对流系统一维行波斑图的成长及其时空演化问题, 揭示了系统行波对流的周期性现象及其对水平流动强度的依赖性.

关键词: 时空斑图, 混合流体对流, 水平流

PACC: 4754, 4725Q, 4735, 4760

## 1. 引 言

加热剪切流动的研究可以追溯到上个世纪初, 最初的动因起源于像云街及海洋山脉形成等地球物理问题. 当今除了技术上的应用外, Poiseuille-Benard 对流<sup>[1]</sup>与旋转 Rayleigh-Benard 对流<sup>[2]</sup>、倾斜液层中的 Rayleigh-Benard 对流<sup>[3]</sup>等一样, 已发展成为研究在非各向同性系统中斑图形成的一个重要的模型系统. 一个额外施加的流动能极大地影响成长于强制非平衡系统中耗散结构的时空特性. 比如在 Poiseuille-Benard 对流中, 当流动强度较小及槽道较窄时, 流动引起固定的横向对流涡卷向下游推移<sup>[4]</sup>. 而当流动强度较大及槽道较宽时, 系统往往选择与流动方向平行的纵向对流涡卷. 在中等流动强度和槽道宽度时, 横向对流涡卷与纵向对流涡卷的竞争甚至可以导致时间依赖的动力学行为<sup>[5,6]</sup>.

不同于单一成分纯流体的对流, 比如温盐双扩散对流系统<sup>[7,8]</sup>和双流体混合物(比如水和酒精)对流系统中<sup>[9]</sup>, 由于温度梯度和浓度梯度的相互耦合作用, 其分叉特性和时空行为要丰富和复杂得多<sup>[10]</sup>. 在双流体混合物对流中, 不仅能够观测到如单一流体对流中发生的静止的对流涡卷, 还能够观测到对称退化的行波斑图. 不管是静止的对流涡卷, 还是行进的对流涡卷, 其分叉既可能是超临界的, 也可能是亚临界的. 这就使人们有理由相信, 当给双流

体混合物对流结构施加一个横向的剪切流动时, 其时空特性要比单一流体的 Poiseuille-Benard 对流丰富和有趣得多. 然而, 据我们所知, 对于双流体混合物 Poiseuille-Benard 对流的研究还很有限. 文献 [11] 对该系统进行了线性稳定性分析, 结果表明水平的流动作用破坏了对称的左右行波分岔, 它们的临界特性分别依赖于流动 Reynolds 数. 文献 [12] 对空间均一和扩展的横向对流涡卷的研究又表明水平流也戏剧性地改变系统的非线性特性, 形成所谓的对称破缺分叉. 对于空间有限且非均匀振幅的一维(横向)对流斑图, 文献 [13—15] 给出在一个固定 Reynolds 数下行波的一些时空演化现象. 本文主要关心在极其微弱水平流的作用下, 对流的时空演化及其随流动强度即 Reynolds 数的变化规律.

## 2. 物理数学模型

如图 1 所示, 一薄层双流体混合物流过两块相距为  $d$ , 从下面加热的平板. 对流的发生受控于上下温差  $\Delta T = T_{\text{bot}} - T_{\text{top}}$ , 由一个反映浮力与粘性对比的特征量 Rayleigh 数  $R = \frac{\alpha g d^3}{\kappa \nu} \Delta T$  来表征, 其中  $\alpha$  是热膨胀系数,  $\kappa$  是热扩散系数,  $g$  是重力加速度,  $\nu$  是动力粘性系数. 对于单一流体无水平流动的情形, 即通常的 Rayleigh-Benard 系统, 热传导状态失稳的临界 Rayleigh 数是  $R_c^0 = 1708$ . 通常人们乐意使用约

<sup>\*</sup> 国家重点基础研究专项基金(批准号: G20000773)和国家博士后科学基金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: gdl2002@pku.edu.cn

化 Rayleigh 数, 即  $r = R/R_c^0$  作为控制参数.

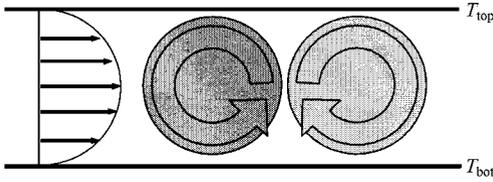


图1 对流模型示意图

对双流体混合体, 垂直方向的温度梯度会诱导一个垂直方向的浓度梯度, 这就是所谓的 Soret 效应. 温度和浓度的这一耦合作用是通过一个称之为分离比 (separation ratio) 的参数  $\psi$  来度量的,  $\psi = S_T C_0 (1 - C_0) \frac{\beta}{\alpha}$ , 其中  $S_T$  是 Soret 系数,  $\beta$  是体积膨胀系数,  $C_0$  是混合体的平均浓度. 当  $\psi$  为正值时, 浓度梯度与温度梯度同向, 浓度分布使系统更不稳定, 对流发生的临界 Rayleigh 数  $r_c$  小于 1. 负的分离比  $\psi$  则对应于浓度梯度和温度梯度反向的情况, 浓度梯度具有稳定静止状态的作用, 对流发生的临界 Rayleigh 数  $r_c$  大于 1. 这时系统发生亚临界的振荡不稳定分叉, 产生行波对流现象, 所以双流体混合体对流的研究绝大部分是对负的  $\psi$  而言.

由于有水平流动, 需要用 Reynolds 数  $Re = \frac{\bar{u}d}{\nu}$  来度量流动的强度, 其中  $\bar{u}$  是水流的平均流速. 另外系统还有两个物性参数 Prandtl 数和 Lewis 数, 它们分别定义为  $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$  和  $L = \frac{D}{\kappa}$ , 其中  $D$  是浓度扩散系数.

在建立该系统的数学模型时, 一般引入 Oberbeck-Boussinesq 近似, 即只考虑对重力产生影响的密度变化, 在其他项中密度取为常量. 在浮力项中密度表示为温度和浓度变化的线性组合,

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0)].$$

本文研究与水平流动方向垂直的一维对流涡卷, 所以只需考虑  $x$ - $z$  平面的情况; 在 Oberbeck-Boussinesq 近似的基础上, 描述系统的二维无量纲化的质量、动量、热量及浓度守恒的方程如下<sup>[13]</sup>:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \sigma \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + Re \alpha [(1 + \psi) \delta T + \delta \eta] \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \delta T = \nabla^2 \delta T, \quad (3)$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \eta = L \nabla^2 \delta \eta - \psi \nabla^2 \delta T, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{u} = (u, w)$  是在  $(x, z)$  坐标系的流速场,  $p$  是压力,  $\delta T$  和  $\delta \eta$  分别是模化的温度和浓度偏移量.

在 Reynolds 数和 Rayleigh 数都小于它们相应的临界值时, 系统处于无垂直对流的层流状态. 该方程组有下列描述水平均匀热传导状态的解:

$$\mathbf{u}_{\text{con}}(x, z, t) = U(z) \mathbf{e}_x = 6Re \sigma z(1-z) \mathbf{e}_x, \quad (5)$$

$$\delta T_{\text{cond}}(x, z, t) = 0.5 - z, \quad (6)$$

$$\delta \eta_{\text{cond}}(x, z, t) = 0, \quad (7)$$

$$p_{\text{con}}(x, z, t) = -\frac{1}{2} \sigma Re (1 + \psi) (0.5 - z)^2 - 12Re \sigma^2 x. \quad (8)$$

一般认为平板是刚性和充分传热的, 这样上下平板处就可以应用无滑移、等温和不可穿透边界条件. 对于进口和出口处, 除了理论分析常用的周期性边界条件外, 边界条件应与具体的实验有关 (对于本文研究的系统, 由于目前尚未见到有关实验研究的报道, 所以下述涉及实验及边界条件的参考文献都是研究有水平流时单一流体对流系统的). 但在数值实验中, 可以人为地规定各种各样的边界条件<sup>[16, 17]</sup>. 我们使用了称之为对流抑制的边界条件<sup>[18]</sup>, 就是在进口处假定对流完全不发生, 对其规定上述的热传导状态的解. 在出口处除了规定垂直方向的速度为零外, 其余变量都采用 Neumann 型条件, 即其法向梯度为零. 这近似于在进口和出口处设置整流网孔对流实验的情形<sup>[19]</sup>.

研究方法是直接数值求解控制方程 (1)–(4). 计算网格在空间的分布是均匀的, 其分辨率是  $\Delta x = \Delta z = 0.05$ , 时间步长  $\Delta t = 0.0005$ . 对流槽道的长高比取为  $\Gamma = 12$ , 分离比取为  $\psi = -0.1$ , 其他物性参数分别是  $\sigma = 10$  和  $L = 0.01$ .

### 3. 对流行波的成长动力学

给系统施加一个极其微弱的水平流动  $Re = 0.02$ , 让温度场有一个  $O(10^{-5})$  量级的摄动, 当  $r = 1.17$  略大于逆行波和顺行波的临界值时, 系统失稳, 对流开始成长. 经过短暂的竞争, 最不稳定的模态得以选择, 对流最大振幅  $|w_{\text{max}}|$  随着时间的增长过程如图 2 所示. 整个对流成长过程可以划分为三个阶段. 在对流很弱时, 对流的振幅以指数成长, 此时对流由一个逆行波和一个顺行波组成, 其时空演化如图 3 所示. 逆行波显然要比顺行波强得多, 所以上游区域由逆行波所支配, 而下游区域二者叠加为不

纯的驻波斑图. 我们把这一阶段称之为线性波指数成长阶段, 它跨越几个数量级直到振幅达到  $O(1)$  量级. 在对数绘制的图上, 斜率给出了不稳定的增长率  $\gamma^U = 0.035$ . 而线性逆行波和顺行波的传播频率分别为  $\omega_c^U = -5.5$  和  $\omega_c^D = 7.4$ . 根据线性稳定性分析<sup>[11]</sup> 线性逆行波和顺行波的传播频率应为

$$\omega_c^{U,D} = \mp \omega_H + 41.9 Re,$$

其中  $\omega_H$  是无水平流动时混合流体对流的 Hopf 振荡频率,  $41.9 Re$  是水平流动推移的结果. 对于  $\psi = -0.1$ ,  $\omega_H = 6.47$ , 理论值为  $\omega_c^{U,D} = -5.63/7.31$ , 与模拟的结果基本一致.

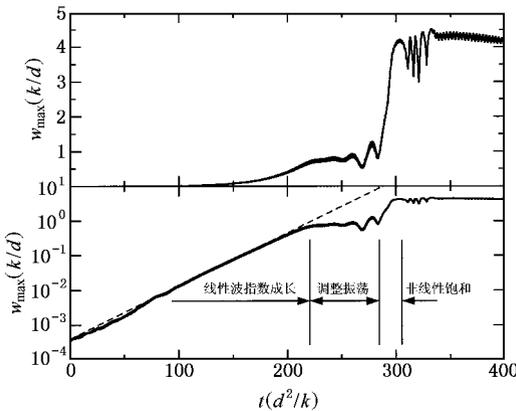


图2 对流行波的成长动力学, 最大振幅随时间的变化. --- 是对流指数成长阶段的拟合直线, 其斜率代表不稳定的增长率.

$Re = 0.02, r = 1.17$

对流接下来进入了一个调整和震荡的过程. 起先对流处于一种几乎锁定的状态, 对流振幅基本停止了增长, 不过逆行波和顺行波两者都依然存在, 其传播速度也没有改变. 后来, 逆行波与顺行波的竞争导致对流振幅的振荡, 结果顺行波被抑制, 逆行波完全支配了动力学. 最后系统进入了非线性饱和阶段, 对流的振幅以远大于线性波的增长率在很短的时间内从  $O(1)$  量级快速达到饱和状态, 同时也伴随传播速度的减缓, 如图 4 所示. 至此, 对流完成其成长进入了非线性发展阶段.

### 4. 逆行波的周期性重复

图 5 给出  $Re = 0.03$  时非线性对流阶段最大振幅及反映通过槽道中层断面向上对流输运热通量的参数 Nusselt 数  $N-1$  随时间的变化规律. 显然对流呈现周期性重复的动力学状态. 对流在一个周期内的

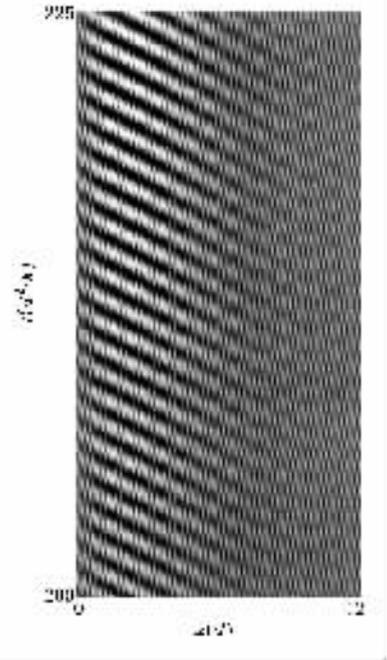


图3 对流行波的成长动力学, 线性行波的时空演化. 暗的部分对应于下降流, 亮的部分对应于上升流, 明暗的程度反映对流的强弱.  $Re = 0.02, r = 1.17$

时空演化可明显地分为三个阶段, 分别称之为成长

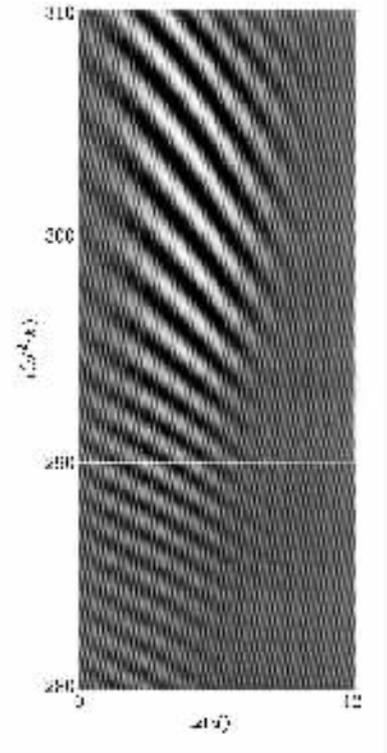


图4 对流行波的成长动力学, 非线性饱和阶段行波演化的时空描绘. 图内说明同图3.  $Re = 0.02, r = 1.17$

饱和阶段、过渡调整阶段和局在行波对流阶段 相应行波的时空演化如图 6 所示. 成长饱和阶段基本上与对流初始启动时的非线性饱和阶段一样. 系统是从一个振幅在  $O(1)$  量级, 行进速度与线性行波相同的逆行波开始, 成长达到振幅饱和, 同时也伴随行进速度的减缓. 接下来系统进入了一个过渡调整阶段, 从下游成长而来的波在进入上游区是往往伴随时空位错缺陷的产生, 在位错的发生时刻对流的振幅下降到一个局部最小值, 这就形成了对流振幅的振荡. 这一阶段对流振幅及  $N-1$  的 4 次振荡就对应于时空演化图 6 中的 4 次时空位错事件. 而这一阶段内行波行进的速度基本不变. 最后下游区域的对流也达到饱和, 同时行进的速度再次减缓, 系统进入局在行波对流阶段. 在该阶段对流与热传导状态的分界面并非静止, 随局在行波波阵面不断向下游推移, 入口处的热传导区不断扩大, 而对流的区域不断变窄. 由于出口边界的影响, 对流的振幅也有所下降. 当对流的区域越来越窄时, 出口抑制的作用越来越大, 对流的振幅下降加速, 当振幅接近  $O(1)$  量级时, 其传播速度迅速加快到线性波的水平, 并传遍整个对流的槽道, 系统又重新回到成长饱和阶段. 对流就这样形成重复性的循环, 对于  $Re = 0.03$ , 重复的周期约是  $110t_v$ .

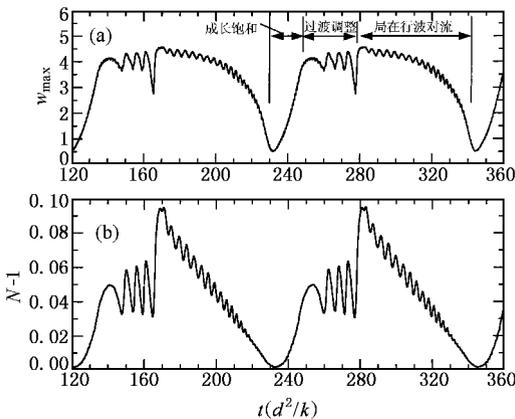


图 5 (a) 对流最大振幅的时间变化表明非线性行波演化的周期性重复 (b) 槽道中层对流传热 Nusselt 数  $N-1$  随时间的变化  $Re = 0.03, r = 1.17$

水平流动是向下游的, 而我们看到波是向上游行进的, 这是因为这里的系统是混合流体系统, 而混合流体本身的对流斑图就是行波. 如前所述, 对流到了非线性阶段只有逆行波得以存活, 尽管由于逆行波频率改变导致行波波速的两次改变, 但是由于流

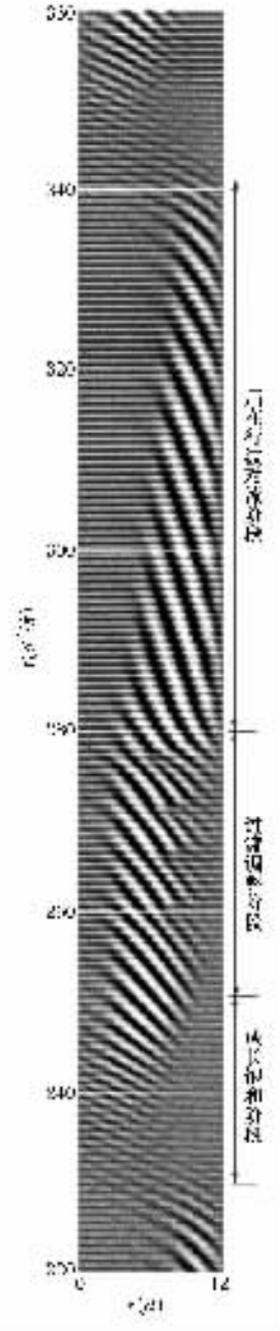


图 6 行波重复演化的时空斑图及相应的三个阶段 图内说明同图 3.  $Re = 0.03, r = 1.17$

动微弱, 所以流动的推移最终没有改变逆行波的传播方向. 如果水平流足够强, 逆行波就会被反向<sup>[13, 14]</sup>.

根据图 5(b) 可以看出, 在一个循环周期内, 对流传热有如下特点. 在振幅最小时, 由于对流很微弱, 该值接近零, 随振幅的增强, 到了成长饱和阶段末, 该值达到了其第一个高峰 0.05. 在整个过渡调整阶段,  $N-1$  随对流振幅的振荡而振荡, 但其平均值

仍保持在0.05.这是因为在该阶段发生强对流的区域基本没有扩张的原故.到了该阶段末,由于强对流快速扩张充满下游区域,对流向上的传热大为加强,  $N-1$  突然抬升到其另一个高数值 0.95,几乎是前一个峰值的两倍.接下来在局在对流阶段由于进口传热区域的渐渐扩大,该值又逐渐下降至其最小值.

增大水平流强度时,行波重复的周期会不断下降,特别是在水平流强度很小时,其变化对水平流强度的改变非常敏感.如图 7 所示,  $Re = 0.02$  时,演化的周期是  $300t_v$ ,而当  $Re$  增大到 0.03 时,循环的周期就下降至  $110t_v$ ,在  $Re = 0.04$  时,又下降至  $60t_v$ ,其后周期的变化变得很平坦.通过拟合发现对流的循环周期基本与流动雷诺数  $Re$  的平方成反比,及

$$T = 0.11 Re^{-2}.$$

在长周期的演化中,对流大部分时间处于局在行波对流阶段,比如  $Re = 0.02$  时,局在行波对流阶段长达  $220t_v$ ,占总周期的 73%.

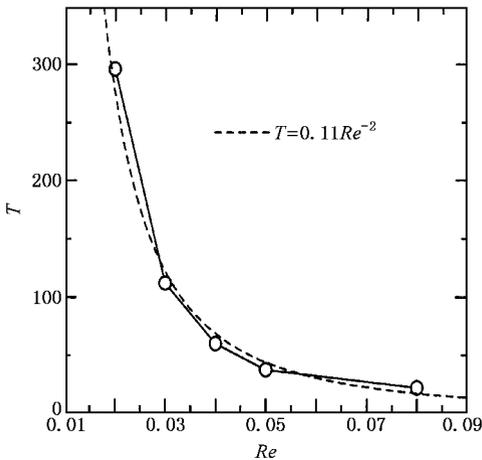


图 7 行波演化周期与水平流动强度  $Re$  的关系 --- 是对周期的拟合曲线.  $r = 1.17$

$Re = 0.05$  时,对流时空演化的情形如图 8 所示,与长周期的演化相比,局在行波对流阶段已变得非常短,调整震荡阶段基本上消失了,而成长饱和阶段的变化不大.在较大流动强度和较小 Rayleigh 数时,对流基本呈现这样的时空演化特征<sup>[13]</sup>.

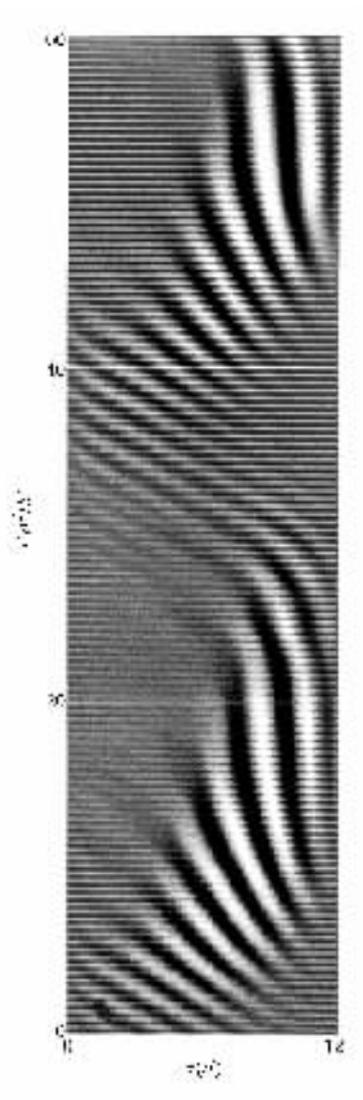


图 8 较强水平流  $Re = 0.05$  时,短周期的行波演化  $r = 1.17$

### 5. 总 结

研究表明,有微弱水平流动作用时,混合流体 Rayleigh-Benard 对流一次失稳基本的斑图动力学现象是逆行波的周期性演化.在一个周期内,系统经历线性波的成长、过渡和局在对流三个阶段,及两次传播速度的改变.随  $Re$  的减小,对流的周期变得越来越长,系统大部分时间处于局在对流状态.在较大  $Re$  时,后两个阶段基本和行波的成长占同样的时间尺度.

- [ 1 ] Kato Y and Fujimura K 2000 *Phys. Rev. E* **62** 601
- [ 2 ] Bajaj K M S , Liu J , Naberhuis B and Ahlers G 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 806
- [ 3 ] Daniels K E , Plapp B B and Bodenschatz E 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5320
- [ 4 ] Platten J K and Legros J C 1984 *Convection in Liquids* ( Berlin : Springer )
- [ 5 ] Ouazzani M T , Platten J K and Mojtabi A 1990 *Int. J. Heat Mass Transfer* **33** 1417
- [ 6 ] Brand H R , Ahlers H R and Deissler R J 1991 *Phys. Rev. A* **43** 4262
- [ 7 ] Zhan J M and Li Y S 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 828 [ in Chinese ] 詹杰民、李毓湘 2002 物理学报 **51** 828 ]
- [ 8 ] Zhan J M and Li Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 60
- [ 9 ] Niemela J J , Ahlers G and Cannel D S 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1365
- [ 10 ] Cross M C and Hohenberg P C 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 851
- [ 11 ] Jung C , Lücke M and Büchel P 1996 *Phys. Rev. E* **54** 1510
- [ 12 ] Büchel P and Lücke M 2000 *Phys. Rev. E* **61** 3793
- [ 13 ] Li G D 2001 *Prog. Theor. Phys.* **106** 293
- [ 14 ] Li G D , Ogawa A and Harada Y 2001 *Prog. Theor. Phys.* **106** 1115
- [ 15 ] Li G D and Huang Y N 2004 *Adv. Mech.* **34** 82 [ in Chinese ] 李国栋、黄永念 2004 力学进展 **34** 82 ]
- [ 16 ] Roth D , Büchel P , Lücke M , Müller H W , Kamps M and Schmitz R 1996 *Physica D* **97** 253
- [ 17 ] Xu C J and Lin Y M 2000 *Acta Mech. Sin.* **30** [ in Chinese ] 许传炬、林玉闽 2000 力学学报 **30** 1 ]
- [ 18 ] Müller H M , Lücke M and Büchel P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 3714
- [ 19 ] Luijckx J M , Platten J K and Legros J C 1981 *Int. J. Heat Mass Transfer* **24** 1287

## Growth and periodic repeating of traveling-wave convection with through-flow<sup>\*</sup>

Li Guo-Dong<sup>†</sup> Huang Yong-Nian

( Department of Mechanics and Engineering Science , State Key Laboratory for Studies of Turbulence and Complex Systems , Peking University , Beijing 100871 , China )

( Received 16 December 2003 ; revised manuscript received 12 February 2004 )

### Abstract

Growth dynamics and spatiotemporal evolutions of one-dimensional traveling-wave pattern in a binary-fluid-mixture Rayleigh-Benard convection with extremely weak through-flows are investigated by numerically simulating basic hydrodynamic equations. We show that the system exhibits repeated dynamics of traveling-wave convection , and their repeating periods depend sensitively on the strength of through-flow

**Keywords** : spatiotemporal pattern , binary mixture convection , through-flow

**PACC** : 4754 , 4725Q , 4735 , 4760

<sup>\*</sup> Project supported by the Special Foundation for State Major Basic Research Program of China ( Grant No. G20000773 ) , and the Science Foundation for Post Doctorate of China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : glli2002@pku.edu.cn