第 53 卷 第 11 期 2004 年 11 月
1000-3290/2004/53(11)/4002-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.11, November, 2004

黑洞熵无截断薄层模型的改进与推广*

孙学锋[1)] 景 玲[1)2)] 刘文彪[1)]

[1)] (北京师范大学物理学系,理论物理研究所,北京 100875)

[2)] (驻马店学院数理系,驻马店 463300)

(2003 年 8 月 20 日收到;2004 年 1 月 16 日收到修改稿)

将广义测不准关系引入薄层 brick wall 模型,撇开截断因子计算黑洞熵的方法于 2002 年首次提出.当时这个方法尚存在一些问题,只得到了熵的上限与视界面积成正比.对这个方法做了些改进,得到熵与视界面积成正比的结果,并讨论了比例因子与广义测不准关系中二阶项待定系数的关系.然后把这种方法推广到非球对称的 Rindler 视界,得到了预期的结果.揭示了黑洞熵与引力场量子化之间的关系.

关键词:广义测不准关系,黑洞,熵,Rindler 视界

PACC:9760,0420

1. 引 言

自从 Hawking,Bekenstein 等人提出黑洞具有热效应[1—3]以来,黑洞熵的问题一直是黑洞热力学研究的重要课题之一.1985 年 't Hooft 提出了计算黑洞熵的 brick wall 方法[4],研究了 Schwarzschild 黑洞背景下标量场的统计性质,验证了黑洞的统计熵与其面积成正比的结论.近几年人们又通过改进 brick wall 模型得出的薄层模型研究了各种黑洞的熵[5—14],获得了预期的结果.同时,由于引力场量子化研究的发展,人们又给出了修正的广义测不准关系[15—17].2002 年 Li 把修正后的广义测不准关系引入黑洞熵的计算[18],获得了初步成功.不通过截断消除了 brick wall 模型中熵的积分表达式在视界面上的发散性,丢掉了这个人为的、不自然的、不太令人满意的截断因子.但是,由于计算表达式的复杂,他只得出了静态的一般球对称黑洞熵的上限与视界面积成正比的结论.本文对他的方法作了深入研究,并且完成了他没有完成的计算,得到了熵与视界面积成正比的结果.进一步,本文将此方法应用于非球对称的 Rindler 视界,得到了相同的结果.最后对比例因子与广义测不准关系中二阶项待定系数的关系作了讨论,这对于揭示黑洞熵的起源具有一定的启示作用.

2. 一般球对称黑洞

一般球对称黑洞的线元为

$$\mathrm{d}s^2 = -f\mathrm{d}t^2 + f^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2, \tag{1}$$

广义测不准关系为

$$\Delta x\Delta p \geqslant \hbar + \frac{\lambda}{\hbar}(\Delta p)^2, \tag{2}$$

相空间中一个相格的体积由经典的 $(2\pi\hbar)^3$ 变为 $(2\pi\hbar)^3(1+\lambda p^2)^3$[17].对于光子(以下用 Planck 单位制,$G=\hbar=c=1$),有

$$p = \omega' = \frac{\omega}{\sqrt{-g_{00}}}, \tag{3}$$

其中 ω' 为视界面附近坐标位置不变观者的观测值,ω 为无穷远处观者的观测值,$\sqrt{-g_{00}}$ 即 $\sqrt{f}$ 为红移因子,进而

$$p^2 = \frac{\omega^2}{f}. \tag{4}$$

我们在视界的邻域附近 $r_0 \to r_0+\varepsilon$ 内计算标量粒子的热力学熵.频率低于 ω 的量子态数为[18]

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{(1+\lambda\omega^2/f)^3} \\ &= \frac{2\omega^3}{3\pi}\int\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2(1+\lambda\omega^2/f)^3}, \end{aligned} \tag{5}$$

进而自由能表达式为

* 国家自然科学基金(批准号:10373003)及北京师范大学青年科学基金资助的课题.

$$\begin{aligned}F(\beta) &= \frac{1}{\beta}\int \mathrm{d}g(\omega)\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega}) \\ &= -\int_0^\infty \frac{g(\omega)\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\beta\omega}-1} \\ &= -\frac{2}{3\pi}\int_{r_0}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty \frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)(1+\lambda\omega^2/f)^3},\end{aligned} \tag{6}$$

黑洞熵为

$$\begin{aligned}S &= \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta} \\ &= \frac{2\beta^2}{3\pi}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}\omega^4\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)^2(1+\lambda\omega^2/f)^3} \\ &= \frac{2\beta^{-3}}{3\pi}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{f^2}\int_0^\infty\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-1)\left(1+\frac{\lambda x^2}{f\beta^2}\right)^3}.\end{aligned} \tag{7}$$

Li[18] 已证明,此式的上限与面积成正比,所以它是不发散的.这样,就通过广义测不准关系的引入,消除了视界面上的积分奇异性,这就可以不通过截断直接在视界的邻域内计算标量场的热力学熵.这个邻域应该多大呢?显然不应该趋于零,因为在量子力学中有一个最小线度,这个线度可以由广义测不准关系来定出.由(2)式利用不等式关系很容易得到 $\Delta x\geqslant 2\sqrt{\lambda}$.这里 $2\sqrt{\lambda}$ 应该是用广义测不准关系来衡量的长度的最小单位.对于黑洞的视界,也应以此为最小尺度,所以将固有积分区域定在零到 $2\sqrt{\lambda}$ 的范围内,也就是将 $2\sqrt{\lambda}$ 定义为薄层的固有厚度.利用固有量与坐标量的关系,确定积分上限,可以确定薄层的坐标厚度 ε.

$$\begin{aligned}2\sqrt{\lambda} &= \int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f}} \\ &\approx \int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2\kappa(r-r_0)}} \\ &= \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\kappa}},\end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$f\approx 2\kappa(r-r_0). \tag{9}$$

黑洞熵可进一步化为

$$S = \frac{2\sqrt{\lambda}}{3\pi\lambda^2}\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{f}}\int_0^\infty\frac{\alpha^2X^4\mathrm{d}X}{(\mathrm{e}^{-\alpha X}+\mathrm{e}^{\alpha X}-2)(1+X^2)^3}, \tag{10}$$

其中

$$X=\sqrt{\frac{\lambda}{f}}\frac{x}{\beta},\quad \alpha=\beta\sqrt{\frac{f}{\lambda}}\approx 4\pi\sqrt{\frac{r-r_0}{\varepsilon}}. \tag{11}$$

对(10)式等号右边最后一个积分可用留数定理来求解,被积函数

$$g(z)=\frac{\alpha^2z^4}{(\mathrm{e}^{-\alpha z}+\mathrm{e}^{\alpha z}-2)(1+z^2)^3}, \tag{12}$$

以 $z=0$ 为可去极点,$\alpha\neq 2\pi,4\pi$ 时 $z=\mathrm{i}$ 为三阶极点(扣除有限点不影响积分值),留数为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{\pi\alpha^2}{2^7\sin^4\frac{\alpha}{2}}\Big[-\alpha^2\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \\ &+5\alpha\sin\alpha-6\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big],\end{aligned} \tag{13}$$

$x=\dfrac{2k\pi\mathrm{i}}{\alpha}(k=1,2,3,\cdots)$ 为二阶极点,留数为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}2\pi\sum\left(\frac{\alpha}{2k\pi}\right)^3\frac{3+\left[\left(\frac{\alpha}{2k\pi}\right)^2-1\right]}{\left[\left(\frac{\alpha}{2k\pi}\right)^2-1\right]^4}. \tag{14}$$

当 $r\to r_0$ 时,$\alpha\to 0$,有

$$\int_0^\infty\frac{\alpha^2X^4\mathrm{d}X}{(\mathrm{e}^{-\alpha X}+\mathrm{e}^{\alpha X}-2)(1+X^2)^3}=\frac{\pi}{16}, \tag{15}$$

进而

$$S=\frac{2\sqrt{\lambda}r_0^2}{3\pi\lambda^2}\frac{\pi}{16}2\sqrt{\lambda}=\frac{4\pi r_0^2}{48\pi\lambda}=\frac{A}{48\pi\lambda}, \tag{16}$$

其中 λ 的单位为长度的平方,量级为 Planck 长度 l_h 的平方.设其为 bl_h^2,在 Planck 单位制中 $l_\mathrm{h}=1$,则

$$S=\frac{A}{48\pi b}, \tag{17}$$

其中比例因子 $1/48\pi b$ 无量纲,与 $1/4$ 相比较,可知 $b\approx 1/12\pi$.这与 λ 应具有 l_h^2 的量级相一致.

3. Rindler 视界

Rindler 时空用超前 Eddington-Finkelstein 坐标表示的线元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= -(1-2ar\cos\theta-r^2a^2\sin^2\theta)\mathrm{d}v^2 \\ &+2\mathrm{d}v\mathrm{d}r-2r^2a\sin\theta\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta \\ &+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.\end{aligned} \tag{18}$$

对匀加速观者,Rindler 视界的位置为

$$r_\mathrm{H}=\frac{1}{a(1+\cos\theta)}. \tag{19}$$

光子所遵循的 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\Phi=0. \tag{20}$$

由 Rindler 时空的轴对称性,令

$$\Phi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-m\varphi)}G(r,\theta),$$

$$G(r,\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(r,\theta)},\tag{21}$$

分离变量并采用 WKB 近似,整理后得

$$g^{11}p_r^2+2(g^{12}p_\theta-\omega g^{01})p_r+g^{22}p_\theta^2+m^2g^{33}=0,\tag{22}$$

其中 $p_r=\frac{\partial S}{\partial r}$,$p_\theta=\frac{\partial S}{\partial\theta}$.由(22)式得

$$p_r^{\pm}=\frac{\omega g^{01}-g^{12}p_\theta}{g^{11}}\pm\frac{\sqrt{(g^{12}p_\theta-\omega g^{01})-g^{11}(g^{22}p_\theta^2+m^2g^{33})}}{g^{11}}.\tag{23}$$

参照前面的方法,首先计算 r 方向上波长的红移因子

$$(\mathrm{d}r)^2=\gamma_{11}(\mathrm{d}r')^2,\quad\gamma_{11}=g_{11}-\frac{g_{01}^2}{g_{00}}=\frac{1}{-g_{00}},\tag{24}$$

即

$$\lambda=\sqrt{\gamma_{11}}\lambda'=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\lambda',\tag{25}$$

所以

$$p^2=\omega'^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda'}\right)^2=\frac{\omega^2}{-g_{00}}.\tag{26}$$

能量低于 ω 的量子态数为

$$\begin{aligned}g(\omega)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}p_r\mathrm{d}p_\theta\mathrm{d}p_\varphi}{[1+\lambda\omega^2/-g_{00}]^3}\\&=\frac{1}{4\pi^3}\int\mathrm{d}m\int\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int\mathrm{d}p_\theta\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{(p_r^+-p_r^-)\mathrm{d}r}{[1+\lambda\omega^2/-g_{00}]^3}\\&=\frac{1}{2\pi^3}\int\mathrm{d}m\int\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int\mathrm{d}p_\theta\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{p_r\mathrm{d}r}{[1+\lambda\omega^2/-g_{00}]^3},\end{aligned}\tag{27}$$

其中

$$p_r=\sqrt{(g^{12}p_\theta-\omega g^{01})^2-g^{11}(g^{22}p_\theta^2+m^2g^{33})}/g^{11}.$$

考虑到 p_r 表达式中根号内的部分不能为负,从而限定了 p_θ 和 m 的积分范围,可进一步对 p_θ 和 m 积分,得

$$g(\omega)=\frac{\omega^3}{6\pi^2}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{g_{00}^2[1+\lambda\omega^2/-g_{00}]^3}.\tag{28}$$

进而得到自由能和熵的表达式为

$$\begin{aligned}F(\beta)&=\frac{1}{\beta}\int\mathrm{d}g(\omega)\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\\&=-\int_0^\infty\frac{g(\omega)\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\beta\omega}-1}\\&=-\frac{1}{6\pi^2}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{(-g_{00})^2}\\&\quad\times\int_0^\infty\frac{\omega^2\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)[1+\lambda\omega^2/-g_{00}]^3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S&=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{\beta^2}{6\pi^2}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{g_{00}^2}\\&\quad\times\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}\omega^4\mathrm{d}\omega}{(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)^2[1+\lambda\omega^2/-g_{00}]^3}\\&=\frac{1}{6\pi^2}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{\beta^3g_{00}^2}\mathrm{d}r\\&\quad\times\int_0^\infty\frac{x^4\mathrm{d}x}{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x-1)[1+\lambda x^2/-g_{00}\beta^2]^3}.\end{aligned}\tag{29}$$

令 $\alpha=\beta\sqrt{\frac{-g_{00}}{\lambda}}$,$X=\frac{x}{\alpha}$,则上式变为

$$\begin{aligned}S&=\frac{\sqrt{\lambda}}{6\pi^2\lambda^2}\int\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{-g_{00}}}\\&\quad\times\int_0^\infty\frac{\alpha^2X^4\mathrm{d}X}{(\mathrm{e}^{-\alpha X}+\mathrm{e}^{\alpha X}-2)(1+X^2)^3}.\end{aligned}\tag{30}$$

薄层的固有厚度 $2\sqrt{\lambda}$ 与坐标厚度因子 ε 的关系为

$$\begin{aligned}2\sqrt{\lambda}&=\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{-g_{00}}}\\&\approx\int_{r_0}^{r_0+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{-2a\cos\theta(r-r_0)}}\\&=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a\cos\theta}},\end{aligned}\tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned}g_{00}&=-(1-2ar\cos\theta-r^2a^2\sin^2\theta)\\&\approx2a\cos\theta(r-r_0),\end{aligned}$$

此时

$$\begin{aligned}\alpha&=\beta\sqrt{\frac{-g_{00}}{\lambda}}\\&\approx2\pi\cos\theta\sqrt{\frac{r-r_0}{\varepsilon}}.\end{aligned}\tag{32}$$

当 $r\to r_0$ 时,$\alpha\to0$,有

$$\begin{aligned}S&=\frac{\sqrt{\lambda}}{6\pi^2\lambda^2}\int r_0^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi2\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{16}\\&=\frac{1}{48\pi\lambda}\int r_0^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{1}{48\pi\lambda}\int\mathrm{d}A.\end{aligned}\tag{33}$$

可见,Rindler 视界单位面积熵为常量 $1/48\pi\lambda$,与一般球对称的结果相一致.

4. 讨 论

广义测不准关系的引入,改变了经典量子论中

相格的大小.应用到量子统计方程后,消除了熵的积分表达式在视界面上的发散.通过在一般球对称时空和 Rindler 时空上的应用,得到了满意的结果,这就看到了这种方法的可行性.这一方面检验了面积定理,揭示了黑洞熵的可能的物理意义,同时也是对广义测不准关系的一种检验.若要求熵和面积间的比例系数是1/4,则广义测不准关系中二阶项系数的量级就应该是 Planck 长度的平方.与用引力场量子化方法得到的结果相一致,揭示了两者之间的联系和相容性.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333

[2] Bardeen J M, Carter B and Hawking S W 1973 *Math*. *Phys*. **31** 161

[3] Hawking S W 1975 *Commun*. *Math*. *Phys*. **43** 199

[4] 't Hooft G 1985 *Nucl*. *Phys*. B **256** 727

[5] Gao C J and Liu W B 2000 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 2221

[6] Li X and Zhao Z 2000 *Phys*. *Rev*. D **62** 104001

[7] Liu W B, Zhu J Y and Zhao Z 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **40** 581 (in Chinese) [刘文彪、朱建阳、赵 峥 2000 物理学报 **49** 581]

[8] Gao C J and Shen Y G 2001 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **18** 1167

[9] Liu W B and Zhao Z 2001 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **18** 310

[10] Zhu B, Yao G Z and Zhao Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2656 (in Chinese) [朱 斌、姚国政、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2656]

[11] He H and Zhao Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2661 (in Chinese) [贺 晗、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2661]

[12] He H and Zhao Z 2001 *J*. *Beijing Normal Univ*. (Natur. Sci.) **37** 499 (in Chinese) [贺 晗、赵 峥 2001 北京师范大学学报(自然科学版) **37** 499]

[13] Li X and Zhao Z 2000 *J*. *Beijing Normal Univ*. (Natur. Sci.) **36** 193 (in Chinese) [李 翔、赵 峥 2000 北京师范大学学报(自然科学版) **36** 193]

[14] Liu W B and Zhao Z 2003 *J*. *Math*. *Phys*. A **23** 169 (in Chinese) [刘文彪、赵 峥 2003 数学物理学报 A **23** 169]

[15] Kempf A, Mangano G and Mann R B 1995 *Phys*. *Rev*. D **52** 1108

[16] Adler R J, Chen P and Santiago D I 2001 *Gen*. *Rel*. *Grav*. **33** 2101

[17] Chang L N *et al* 2002 *Phys*. *Rev*. D **65** 125028

[18] Li X 2002 *Phys*. *Lett*. B **540** 9

Improvement and extension of the thin film brick wall model without cut-off*

Sun Xue-Feng[1)] Jing Ling[1)2)] Liu Wen-Biao[1)]

[1)] (*Department of Physics*, *Institute of Theoretical Physics*, *Beijing Normal University*, *Beijing* 100875, *China*)

[2)] (*Department of Mathematics and Physics*, *Zhumadian College*, *Zhumadian* 463300, *China*)

(Received 20 August 2003; revised manuscript received 16 January 2004)

Abstract

Applying the generalized uncertainty relation to the thin film brick wall model, the method of calculating black hole entropy without cutoff was first proposed in 2002. However, it was then only determined that the upper bound of entropy is proportional to the event horizon. Since the method is studied more deeply, the entropy itself is found proportional to the horizon too. The relation between the ratio coefficient and the second-order uncertainty parameter is also discussed. Moreover, the non-spherical Rindler horizon is studied, and the expected result is given. It is apparent that the cut-off in the brick wall model is something related to the quantum theory of gravity.

Keywords: generalized uncertainty relation, black hole, entropy, Rindler horizon

PACC: 9760, 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10373003), and the Foundation for Young Scientists of Beijing Normal University, China.