第 53 卷 第 12 期 2004 年 12 月
1000-3290/2004/53(12)/4045-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.12,December,2004

非线性 Schrödinger 方程的包络形式解*

李向正[1)] 张金良[1)] 王跃明[1)] 王明亮[1)2)]

1)(河南科技大学数理系,洛阳 471003)

2)(兰州大学数学系,兰州 730000)

(2004 年 3 月 5 日收到;2004 年 4 月 10 日收到修改稿)

扩展了最近提出的 F 展开方法以构造非线性演化方程更多的精确解,即将 F 展开法中的一阶非线性常微分方程和单变量的有限幂级数代之以类似的一阶常微分方程组和两个变量的有限幂级数,这两个变量是一阶常微分方程组的解分量.作为例子,用扩展的 F 展开法解非线性 Schrödinger 方程,得到了很丰富的包络形式的精确解,特别是以两个不同的 Jacobi 椭圆函数表示的解.显然,扩展的 F 展开方法也可以解其他类型的非线性演化方程.

关键词:辅助方程组,非线性 Schrödinger 方程,包络波,亮孤子

PACC:0340,0230

1. 引 言

非线性数学物理研究领域颇具特色的成就之一,就是创造了求非线性数学物理方程的精确解特别是孤波解的各种精巧方法,如早已闻名的反散射方法(IST)、Bäcklund 变换法、Darboux 变换法、Hirota 双线性算子法、Painleve 有限展开法等[1—4].随着计算机符号计算系统(如 Mathematica,Maple)的迅速发展,近年来提出并发展的精确解法主要有:双曲正切有限展开方法及其各种推广[5—9],sine-cosine 和 sinh-cosh 展开方法[10,11]、齐次平衡方法及其推广[12—18]、Jacobi 椭圆函数展开法[19—25]、F 展开法[26—30]等.以上求解非线性数学物理方程(组)精确解的方法均被证明是有效的.

非线性 Schrödinger(NLS)方程

$$\mathrm{i}u_t + \alpha u_{xx} + \beta |u|^2 u = 0, \tag{1}$$

又称立方 Schrödinger 方程,α 和 β 分别称为频散系数和 Landau 系数[3].它在非线性数学物理中居于重要的地位,可用于描述纯交换铁磁介质非线性表面自旋波[31]、平面波的定常二维自聚焦、固体中热脉冲的传播、等离子体中的 Langmuir 波等[1].在光纤中非线性效应与群速色散相互作用,使光脉冲演变为光孤子,光孤子行为由方程(1)描述[32,33].方程(1)的求解也有利于研究初始啁啾对脉冲频谱演变的影响[34].本文目的是借助于齐次平衡原则与 F 展开法的思想,将 F 展开法中的一阶常微分方程换为一阶常微分方程组,从而利用该一阶常微分方程组的解构造出方程(1)的丰富的包络波形式解.对迅速发展的光通信技术中出现的类似非线性方程的求解提供了一种新思路.

2. 方法简述

F展开法是齐次平衡原则的新应用,可视为 Jacobi 椭圆函数、三角函数以及双曲正切函数展开方法的概括.下面简述本文提出的借助于一阶常微分方程组的解求出非线性波动方程周期波解的方法.

给定非线性偏微分方程,为简单起见以含两个自变量为例,

$$P(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{2}$$

P 为其变元的多项式,其中包含有非线性项和线性出现的高阶偏导数项.

求解方程(2)的过程共分四个步骤.

步骤 I 求方程(2)的行波解

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - vt, \tag{3}$$

其中 v 为待定常数.将(3)式代入方程(2),则方程

* 河南省自然科学基金(批准号:0111050200)、河南省教育厅自然科学基金(批准号:2003110003)和河南科技大学科学研究基金(批准号:2003QN13)资助的课题.

(2)化为 $u(\xi)$ 的常微分方程

$$P(u,u',u'',\cdots)=0. \tag{4}$$

步骤Ⅱ 设 $u(\xi)$ 可表示为 $F(\xi)$ 与 $G(\xi)$ 的二元有限幂级数,

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}a_iF^i(\xi)+\sum_{i=1}^{N}b_iF^{i-1}(\xi)G(\xi)+a_0, \tag{5}$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_N,b_1,\cdots,b_N$ 是待定常数,$a_N\neq0$,$b_N\neq0$,$F(\xi)$ 和 $G(\xi)$ 满足辅助方程组

$$F'^2=P_1F^4+Q_1F^2+R_1, \tag{6}$$

$$G'^2=P_2G^4+Q_2G^2+R_2, \tag{7}$$

其中 P_1,Q_1,R_1,P_2,Q_2,R_2 是待选常数.由方程组(6),(7)易知

$$F''=2P_1F^3+Q_1F, \tag{8}$$

$$G''=2P_2G^3+Q_2G. \tag{9}$$

适当选取 P_1,Q_1,R_1,P_2,Q_2,R_2,的值,可使方程组(6),(7)的解 $F(\xi)$ 和 $G(\xi)$ 为 Jacobi 椭圆函数[26—30],且满足下列恒等式之一(m 为模数,$0<m<1$):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sn}^2\xi+\mathrm{cn}^2\xi=1,\\
&\mathrm{dn}^2\xi+m^2\mathrm{sn}^2\xi=1,\\
&\mathrm{dn}^2\xi-m^2\mathrm{cn}^2\xi=1-m^2,\\
&\mathrm{ns}^2\xi=1+\mathrm{cs}^2\xi,\\
&\mathrm{ns}^2\xi=m^2+\mathrm{ds}^2\xi,\\
&\mathrm{ds}^2\xi=1-m^2+\mathrm{cs}^2\xi,\\
&\mathrm{nc}^2\xi=1+\mathrm{sc}^2\xi,\\
&\mathrm{dc}^2\xi-(1-m^2)\mathrm{nc}^2\xi=m^2,\\
&\mathrm{dc}^2\xi=1+(1-m^2)\mathrm{sc}^2\xi,\\
&\mathrm{nd}^2\xi=1+m^2\mathrm{sd}^2\xi,\\
&(1-m^2)\mathrm{nd}^2\xi+m^2\mathrm{cd}^2\xi=1,\\
&\mathrm{cd}^2\xi+(1-m^2)\mathrm{sd}^2\xi=1.
\end{aligned} \tag{10}$$

正整数 N 可由具支配地位的非线性项与最高阶偏导数项的齐次平衡确定.

步骤Ⅲ 将(5)式代入方程(4),利用(6)—(10)式可将方程(4)的左端变成关于 $F(\xi)$,$G(\xi)$ 的二元多项式.置 $F^i(\xi)G^j(\xi)(j=0,1)$ 的各次幂项的系数为零,得 $a_0,a_1,\cdots,a_N,b_1,\cdots b_N$ 和 v 的代数方程组.

步骤Ⅳ 解上述方程组(可借助 Mathematica 或 Maple),$a_0,a_1,\cdots,a_N,b_1,\cdots,b_N$ 和 v 可由 P_1,Q_1,R_1,P_2,Q_2,R_2 来表示,或直接由方程(2)的系数表示.将这些结果代入(5)式得方程(2)的周期波解.在极限情形,可以得到三角函数和双曲函数表示的精确解.

3. NLS 方程的包络波形式解

因 NLS 方程通常表征非线性的调制作用,所以常求它的包络波形式解,即求形如

$$u(x,t)=\phi(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} \tag{11}$$

的解.这里 $\xi=x-v_gt,\eta=kx-\omega t,v_g$ 为群速,k 为波数,ω 为角频率.

将(11)式代入方程(1)得 $\phi(\xi)$ 满足的非线性方程为

$$\alpha\phi''+\mathrm{i}(2\alpha k-v_g)\phi'+(\omega-\alpha k^2)\phi+\beta\phi^3=0. \tag{12}$$

通常我们要求 $\phi(\xi)$ 是实函数形式,故要求 ϕ' 前面的复系数为零,得到

$$v_g=2\alpha k, \tag{13}$$

$$\alpha\phi''+(\omega-\alpha k^2)\phi+\beta\phi^3=0. \tag{14}$$

考虑方程(14)中最高阶导数项 ϕ'' 与具支配地位非线性项 ϕ^3 齐次平衡,可确定(5)式中 $N=1$,于是方程(14)的解具有下列形式:

$$\phi(\xi)=a_0+a_1F(\xi)+b_1G(\xi), \tag{15}$$

其中 $a_1\neq0,b_1\neq0,a_0,a_1,b_1$ 为待定常数.

将(15)式代入方程(14),利用(6)—(10)式可将方程(14)的左端变为关于 $F(\xi)$ 和 $G(\xi)$ 的多项式,$G(\xi)$ 的幂次最大为 1,令 $F^i(\xi)G^j(\xi)(j=0,1)$ 的各次幂项的系数为零,得到关于 a_0,a_1,b_1 和 k,w 的代数方程组.将其解出后代入(15)式可得方程(14)的精确解,再将(15)式以及 k,w 代入(11)式即可得到 NLS 方程(1)的精确解.

下面分情况进行讨论(讨论中不考虑平凡解、重复出现的解以及复数形式的解).

3.1. $\alpha\beta>0$

1) 当取 $P_1=-m^2,Q_1=2m^2-1,R_1=1-m^2$;$P_2=-1,Q_2=2-m^2,R_2=m^2-1$ 时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$\begin{aligned}
&F=\mathrm{cn}\xi,\\
&G=\mathrm{dn}\xi,\\
&G^2=1-m^2+m^2F^2.
\end{aligned} \tag{16}$$

将(15)式代入方程(14),利用(6)—(9)式及(16)式,可将方程(14)的左端变为关于 $F(\xi)$ 和 $G(\xi)$ 的多项式,令 $F^i(\xi)G^j(\xi)(i=0,1,2,3;j=0,1)$ 的各次幂项的系数为零,得 a_0,a_1,b_1 和 k,w 的代数方程

组

$$F^0:\ -k^2\alpha a_0+\omega a_0+\beta a_0^3+3\beta a_0 b_1^2-3m^2\beta a_0 b_1^2=0,$$
$$F^1:\ -\alpha a_1-k^2\alpha a_1+2m^2\alpha a_1+\omega a_1+3\beta a_0^2 a_1+3\beta a_1 b_1^2-3m^2\beta a_1 b_1^2=0,$$
$$F^2:\ 3\beta a_0 a_1^2+3m^2\beta a_0 b_1^2=0,$$
$$F^3:\ -2m^2\alpha a_1+\beta a_1^3+3m^2\beta a_1 b_1^2=0,$$
$$G:\ -k^2\alpha b_1+m^2\alpha b_1+\omega b_1+3\beta a_0^2 b_1+\beta b_1^3-m^2\beta b_1^3=0,$$
$$FG:\ 6\beta a_0 a_1 b_1=0,$$
$$F^2G:\ -2m^2\alpha b_1+3\beta a_1^2 b_1+m^2\beta b_1^3=0.$$

解此代数方程组得

$$a_0=0,\quad a_1=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}m,\quad b_1=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}},\quad \omega=k^2\alpha-\frac{m^2\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\quad (k\text{ 为任意常数}).\tag{17}$$

将(16),(17)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_1=\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}m\,\mathrm{cn}\xi\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}\mathrm{dn}\xi.\tag{18}$$

令 $m\to1$,得到双曲函数表示的精确解

$$\phi_2=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\mathrm{sech}\xi.\tag{19}$$

将解(18),(19)代入(11)式可得方程(1)的精确解

$$u_1=\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}m\,\mathrm{cn}\xi\pm\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}\mathrm{dn}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta},\tag{20}$$

$$u_2=\pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\mathrm{sech}\xi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}.\tag{21}$$

解(18)—(21)中正负号可任意组合,$\xi=x-2\alpha kt$,(20)式中 $\eta=kx-\left(k^2\alpha-\frac{m^2\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)t$,(21)式中 $\eta=kx-\alpha(k^2-1)t$.解(21)与文献[1]中 NLS 方程的单孤子解相同,是方程(1)的亮孤子.

以下为避免形式上的重复,讨论从简.

2)当取 $P_1=-m^2(1-m^2)$,$Q_1=2m^2-1$,$R_1=1$;$P_2=m^2-1$,$Q_2=2-m^2$,$R_2=-1$ 时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$F=\mathrm{sd}\xi,\quad G=\mathrm{nd}\xi,\quad G^2=1+m^2F^2.\tag{22}$$

从而可解得

$$a_0=0,\quad a_1=\pm\sqrt{\frac{\alpha(1-m^2)}{2\beta}}m,\quad b_1=\pm\sqrt{\frac{\alpha(1-m^2)}{2\beta}},\quad \omega=k^2\alpha-\frac{m^2\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\tag{23}$$

(k 为任意常数).

将(22),(23)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_3=\pm\sqrt{\frac{\alpha(1-m^2)}{2\beta}}m\,\mathrm{sd}\xi\pm\sqrt{\frac{\alpha(1-m^2)}{2\beta}}\mathrm{nd}\xi.\tag{24}$$

将解(24)代入(11)式可得方程(1)的精确解

$$u_3=\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha(1-m^3)}{2\beta}}m\,\mathrm{sd}\xi\pm\sqrt{\frac{\alpha(1-m^2)}{2\beta}}\mathrm{nd}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}.\tag{25}$$

解(24),(25)中正负号可任意组合,$\xi=x-2\alpha kt$,$\eta=kx-\left(k^2\alpha-\frac{m^2\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)t$.

3.2. $\alpha\beta<0$

1)当取 $P_1=1$,$Q_1=2-m^2$,$R_1=1-m^2$;$P_2=1$,$Q_2=-(1+m^2)$,$R_2=m^2$ 时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$F=\mathrm{cs}\xi,\quad G=\mathrm{ns}\xi,\quad G^2=1+F^2.\tag{26}$$

从而可解得

$$a_0=0,\quad a_1=\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}},\quad b_1=\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}},\quad \omega=k^2\alpha+m^2\alpha-\frac{\alpha}{2}\quad (k\text{ 为任意常数}).\tag{27}$$

将(26),(27)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_4=\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{cs}\xi\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ns}\xi.\tag{28}$$

令 $m\to1$,得到双曲函数表示的精确解

$$\phi_5=\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{csch}\xi\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\coth\xi;\tag{29}$$

令 $m\to0$,得到三角函数表示的精确解

$$\phi_6=\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\cot\xi\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\csc\xi.\tag{30}$$

将解(28)—(30)代入(11)式可得方程(1)的精确解

$$u_4 = \left(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{cs}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ns}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \tag{31}$$

$$u_5 = \left(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{csch}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\coth\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \tag{32}$$

$$u_6 = \left(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\cot\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\csc\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}. \tag{33}$$

解(28)—(33)中正负号可任意组合,$\xi = x - 2\alpha kt$,(31)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha + m^2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)t$,(32)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)t$,(33)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)t$.

2)当取 $P_1 = 1, Q_1 = 2m^2 - 1, R_1 = -m^2(1-m^2)$;$P_2 = 1, Q_2 = -(1+m^2), R_2 = m^2$ 时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{ds}\xi, \\ G &= \mathrm{ns}\xi, \\ G^2 &= m^2 + F^2. \end{aligned} \tag{34}$$

从而可解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}, \\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}, \\ \omega &= k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} + \alpha \qquad (k\text{ 为任意常数}). \end{aligned} \tag{35}$$

将(34),(35)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_7 = \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ds}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ns}\xi. \tag{36}$$

令 $m\to 0$,得到三角函数表示的精确解

$$\phi_8 = \pm\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}\csc\xi. \tag{37}$$

将解(36),(37)代入(11)式可得方程(1)的精确解

$$u_7 = \left(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ds}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ns}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \tag{38}$$

$$u_8 = \left(\pm\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}\csc\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}. \tag{39}$$

解(36)—(39)中正负号可任意组合,$\xi = x - 2\alpha kt$,(38)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} + \alpha\right)t$,(39)式中 $\eta = kx - (k^2\alpha + \alpha)t$.

3)当取 $P_1 = 1, Q_1 = 2 - m^2, R_1 = 1 - m^2$;$P_2 = 1, Q_2 = 2m^2 - 1, R_2 = -m^2(1-m^2)$时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{cs}\xi, \\ G &= \mathrm{ds}\xi, \\ G^2 &= 1 - m^2 + F^2. \end{aligned} \tag{40}$$

从而可解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}, \\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}, \\ \omega &= k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \qquad (k\text{ 为任意常数}). \end{aligned} \tag{41}$$

将(40),(41)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_9 = \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{cs}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ds}\xi. \tag{42}$$

令 $m\to 1$,得到双曲函数表示的精确解

$$\phi_{10} = \pm\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}\mathrm{csch}\xi. \tag{43}$$

将解(42),(43)代入(11)式可得到方程(1)的精确解

$$u_9 = \left(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{cs}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{ds}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \tag{44}$$

$$u_{10} = \left(\pm\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}\mathrm{csch}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}. \tag{45}$$

解(42)—(45)中正负号可任意组合,$\xi = x - 2\alpha kt$,(44)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)t$,(45)式中 $\eta = kx - (k^2\alpha - \alpha)t$.

4)当取 $P_1 = 1 - m^2, Q_1 = 2 - m^2, R_1 = 1$;$P_2 = 1 - m^2, Q_2 = 2m^2 - 1, R_2 = -m^2$ 时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{sc}\xi, \\ G &= \mathrm{nc}\xi, \\ G^2 &= 1 + F^2. \end{aligned} \tag{46}$$

从而可解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}, \\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}, \\ \omega &= k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \qquad (k\text{ 为任意常数}). \end{aligned} \tag{47}$$

将(46),(47)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_{12} = \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{sc}\xi \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{nc}\xi. \tag{48}$$

令 $m\to 0$,得到三角函数表示的精确解

$$\phi_{13} = \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\tan\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\sec\xi. \tag{49}$$

将解(48),(49)代入(11)式可得方程(1)的精确解

$$u_{12} = \left(\pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{sc}\xi \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{nc}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \tag{50}$$

$$u_{13} = \left(\pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\tan\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\sec\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}. \tag{51}$$

解(48)—(51)中正负号可任意组合,$\xi = x-2\alpha kt$,(50)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)t$,(51)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)t$.

5)当取 $P_1 = 1-m^2$,$Q_1 = 2m^2-1$,$R_1 = -m^2$;$P_2 = 1$,$Q_2 = -(1+m^2)$,$R_2 = m^2$ 时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{nc}\xi,\\ G &= \mathrm{dc}\xi,\\ G^2 &= m^2 + (1-m^2)F^2. \end{aligned} \tag{52}$$

从而可解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,\\ a_1 &= \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}},\\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}},\\ \omega &= k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} + \alpha \quad (k\ \text{为任意常数}). \end{aligned} \tag{53}$$

将(52),(53)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_{14} = \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{nc}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{dc}\xi. \tag{54}$$

令 $m\to 0$,得到三角函数表示的精确解

$$\phi_{15} = \pm\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}\sec\xi. \tag{55}$$

将解(54),(55)代入(11)式可得方程(1)的精确解

$$u_{14} = \left(\pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{nc}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{dc}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}, \tag{56}$$

$$u_{15} = \pm\sqrt{\frac{-2\alpha}{\beta}}\sec\xi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}. \tag{57}$$

解(54)—(57)中正负号可任意组合,$\xi = x-2\alpha kt$,(56)式中 $\eta = kx - \left(k^2\alpha - \frac{m^2\alpha}{2} + \alpha\right)t$,(57)式中 $\eta = kx - (k^2\alpha + \alpha)t$.

6)当取 $P_1 = 1-m^2$,$Q_1 = 2-m^2$,$R_1 = 1$;$P_2 = 1$,$Q_2 = -(1+m^2)$,$R_2 = m^2$ 时,辅助方程组(6),(7)有特解

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{sc}\xi,\\ G &= \mathrm{dc}\xi,\\ G^2 &= 1 + (1-m^2)F^2. \end{aligned} \tag{58}$$

从而可解得

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,\\ a_1 &= \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}},\\ b_1 &= \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}},\\ \omega &= k^2\alpha + m^2\alpha - \frac{\alpha}{2} \quad (k\ \text{为任意常数}). \end{aligned} \tag{59}$$

将(58),(59)式代入(15)式得到方程(14)的精确解

$$\phi_{16} = \pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{sc}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{dc}\xi. \tag{60}$$

将解(60)式代入(11)式可得方程(1)的精确解

$$u_{16} = \left(\pm\sqrt{\frac{\alpha(m^2-1)}{2\beta}}\mathrm{sc}\xi \pm\sqrt{\frac{-\alpha}{2\beta}}\mathrm{dc}\xi\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}. \tag{61}$$

解(60),(61)中正负号可任意组合,$\xi = x-2\alpha kt$,$\eta = kx - \left(k^2\alpha + m^2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)t$.

4. 推　　论

推论　设 $u(x,t)$是 NLS 方程(1)的解,则

$$v(x,t) = u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bt} \tag{62}$$

是 Ginzburg-Landau 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta|v|^2 v - bv = 0 \tag{63}$$

的解.因而由本文求得方程(1)的解后,可由(62)式直接求得方程(63)的解.

5. 结　　论

本文所用到的 F 展开法对文献[26—30]中的方法进行了变化.若取(5)式中 $b_i = 0(i = 1,\cdots,N)$,即可得到文献[26—30]中的 F 展开法.利用本文提出的方法,可以得到文献[22]中的包络波解.除此之外,本文得到了更丰富的包络波形式解,特别是用两个不同 Jacobi 椭圆函数表示的解.利用本文提出的方法可求解一大类非线性数学物理方程的周期波解.

[1] Ablowitz M J，Clarkson P A 1991 *Solitons*，*Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scatting*（Cambridge：Cambridge University Press）

[2] Gu C H，Hu H S，Zhou Z X 1999 *Darboux Transformation in Soliton Theory and Its Geometric Applications*（Shanghai：Shanghai Scientific and Technical Publishers）（in Chinese）[谷超豪、胡和生、周子翔 1999 孤立子理论中的达布变换及其几何应用（上海：上海科学技术出版社）]

[3] Liu S K，Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics*（Beijing：Peking University Press）（in Chinese）[刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程（北京：北京大学出版社）]

[4] Fan E G，Zhang H Q，Lin G 1998 *Chin*. *Phys*. **7** 649

[5] Parkes E J，Duffy B R 1997 *Phys*. *Lett*. A **229** 217

[6] Li Z B，Pan S Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 402（in Chinese）[李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]

[7] Li Z B，Yao R X 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2062（in Chinese）[李志斌、姚若侠 2001 物理学报 **50** 2062]

[8] Xia T C，Zhang H Q，Yan Z Y 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 694

[9] Guo G P，Zhang J F 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1159（in Chinese）[郭冠平、张解放 2002 物理学报 **51** 1159]

[10] Yan Z Y，Zhang H Q，Fan E G 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1（in Chinese）[闫振亚、张鸿庆、范恩贵 1999 物理学报 **48** 1]

[11] Yan Z Y，Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1962（in Chinese）[闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[12] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[13] Wang M L 1996 *Phys*. *Lett*. A **213** 279

[14] Zhang J F 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 651

[15] Zhang J F，Guo G P，Wu F M 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 533

[16] Zhang J F，Wu F M 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 425

[17] Zhao X Q，Tang D B，Wang L M *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1827（in Chinese）[赵熙强、唐登斌、王利民等 2003 物理学报 **52** 1827]

[18] Xu G Q，Li Z B 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1848（in Chinese）[徐桂琼、李志斌 2003 物理学报 **52** 1848]

[19] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2001 *Phys*. *Lett*. A **289** 69

[20] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2068（in Chinese）[刘式适、付遵涛、刘式达等 2001 物理学报 **50** 2068]

[21] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10（in Chinese）[刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10]

[22] Liu S D，Fu Z T，Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 718（in Chinese）[刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[23] Liu S K，Fu Z T，Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1923（in Chinese）[刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 1923]

[24] Zhang S Q，Li Z B 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1066（in Chinese）[张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 1066]

[25] Guo G P，Zhang J F 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2660（in Chinese）[郭冠平、张解放 2003 物理学报 **52** 2660]

[26] Zhou Y B，Wang M L，Wang Y M 2003 *Phys*. *Lett*. A **308** 31

[27] Wang M L，Zhou Y B 2003 *Phys*. *Lett*. A **318** 84

[28] Wang M L，Wang Y M，Zhang J L 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 1341

[29] Zhang J L，Wang Y M，Wang M L *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1574（in Chinese）[张金良、王跃明、王明亮等 2003 物理学报 **52** 1574]

[30] Li X Z，Wang Y M，Li X Y *et al* 2003 *J*. *Henan Univ*. *Sci*. *Techn*. **24**（4）104（in Chinese）[李向正、王跃明、李晓燕等 2003 河南科技大学学报 **24**（4）104]

[31] Xu Y，Xue D S，Zuo W *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2896（in Chinese）[徐 岩、薛德胜、左 维等 2003 物理学报 **52** 2896]

[32] Liu S L 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2825（in Chinese）[刘山亮 2003 物理学报 **52** 2825]

[33] Shen T G，Tan X L 2003 *Spectroscopy and Spectral Analysis* **23** 35（in Chinese）[沈廷根、谭锡林 2003 光谱学与光谱分析 **23** 35]

[34] Miao H L，Wang J，Meng J W 2003 *Spectroscopy and Spectral Analysis* **23** 38（in Chinese）[苗洪利、王 晶、孟继武 2003 光谱学与光谱分析 **23** 38]

Envelope solutions to nonlinear Schrödinger equation*

Li Xiang-Zheng[1)]　Zhang Jin-Liang[1)]　Wang Yue-Ming[1)]　Wang Ming-Liang[1)2)]

[1)] (*Department of Mathematics and Physics, Henan University of Science and Technology, Luoyang* 471003, *China*)

[2)] (*Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou* 730000, *China*)

(Received 5 March 2004; revised manuscript received 10 April 2004)

Abstract

F-expansion method proposed recently is extended to construct more exact solutions of nonlinear evolution equations. To be more precise, it means that instead of the first-order ordinary differential equation (ODE) and finite power series of one variable in F-expansion method, we introduce similar first-order ODEs and finite power series of two variables, each one of which is the component of solution to ODEs. As an illustrative example, using this extended F-expansion method we solve nonlinear Schrödinger (NLS) equation, an abundance of envelope solutions, especially the solutions expressed by two different Jacobi elliptic functions, to the NLS equation have been obtained. Obviously, the extended F-expansion method can be applied to solve other type of nonlinear evolution equations as well.

Keywords: auxiliary equations, nonlinear Schrödinger equation, envelope waves, bright solitons

PACC: 0340, 0230

* Project supported by the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 0111050200), the Natural Science Foundation of Education Department of Henan Province, China (Grant No. 2003110003), and the Science Foundation of Henan University of Science and Technology, China (Grant No. 2003QN13).