第 53 卷 第 12 期 2004 年 12 月
1000-3290/2004/53(12)/4061-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.12, December, 2004


# 一个燃烧模型的近似解*

韩祥临

(湖州师范学院理学院,湖州 313000)

(2004 年 2 月 23 日收到;2004 年 6 月 15 日收到修改稿)

运用同伦理论探讨了一类非线性问题的近似解.然后,将其应用于一个燃烧模型,得到了该问题的近似解.

**关键词**:非线性方程,同伦,变分迭代法,燃烧模型,近似解

**PACC**:0340K,0290

## 1.引 言

现实世界中大量的实际问题均可归结为一个非线性方程的求解问题,这已成为目前学术界十分关注的热门课题之一.韩祥临[1—3]曾用匹配法求得一类非线性奇摄动方程的零阶渐近解,其他一些文献对这类问题也有研究,如陈勇等探讨了一类非线性方程的精确解[4—8],那仁满都拉等求得了一类非线性方程的孤波解或行波解[9-11],刘式适等研究了一类非线性方程的周期解[12—15].本文在上述工作的基础上,研究一个燃烧模型并求其近似解.在没有预先混合的燃烧理论中,有以下典型问题:

$$\varepsilon y'' = y^2 - t^2, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

$$y(-1,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 1, \tag{2}$$

其中 $\varepsilon$(假定是十分小的)是扩散效应对反应速度的比率,而 $t$ 是距离坐标.$t=0$ 是燃料与氧化物彼此相遇并反应时火焰的位置.函数 $y-t$ 和 $y+t$ 分别代表燃料与氧化物的物质份额.

人们常用匹配法来对上述奇摄动问题求解,但由于匹配条件的限制,常常是理论上可行,实际计算却比较复杂,甚至无法进行.本文先从理论上借助同伦理论求得较一般的非线性方程的近似解,然后将其应用于燃烧理论,给出了一个燃烧模型的近似解,并为解决该类问题提供了一个有效的方法.

## 2.理论探讨

同伦理论是代数拓扑学[16]的一个分支.设 $f$,$g$:$Z \rightarrow Y$ 是连续映射,$I$ 表示单位区间 $[0,1]$.若存在连续映射 $H$:$Z \times I \rightarrow Y$ 使得对于任意 $x \in Z$,有 $H(x,0)=f(x)$ 和 $H(x,1)=g(x)$,则称 $f$,$g$ 是同伦映射,并称 $H$ 为连接 $f$ 和 $g$ 的一个同伦.研究如下同伦 $H$:

$$H(x,p) = pf(x) + (1-p)g(x), \quad p \in [0,1],$$

其中 $p$ 为嵌入参数.

若 $f(0)=g(0)$,则称 $f$ 和 $g$ 是同伦等价的.这个同伦实质上就是在不变动端点的情况下,将 $f$ 连续地变换到 $g$.

现考虑如下非线性奇摄动方程:

$$L(y) + f(t,y) = 0, \qquad t \in \Omega = [-1,1], \tag{3}$$

$$y(-1,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 1, \tag{4}$$

其中,$L(y) = \varepsilon y'' + ky$,$\varepsilon$ 为正的小参数,$k$ 为非负常数;$f(t,y) = -(y^2 - t^2)^n$,$n$ 为正整数.

构造如下同伦 $H$:$\Omega \times [0,1] \rightarrow R$:

$$\begin{aligned} H(\xi,p) &= (1-p)[L(\xi) - L(y_0)] \\ &\quad + p[L(\xi) + f(t,\xi)] = 0, \\ &\quad p \in [0,1] \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} H(\xi,p) &= L(\xi) - L(y_0) \\ &\quad + p[L(y_0) + f(t,\xi)] = 0, \\ &\quad p \in [0,1], \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $y_0$ 为初始近似.

因为 $H(\xi,0) = L(\xi) - L(y_0) = 0$,$H(\xi,1) = L(\xi) + f(t,\xi) = 0$,所以,当 $p=1$ 时方程(5)就变成

* 浙江省自然科学基金(批准号:102009)资助的课题.

原方程(1),当 $p=0$ 时方程(3)则变成一个易于求解的线性方程. 参数 $p$ 从 0 变到 1 的过程,就是 $H(\xi,p)$ 从 $L(\xi)-L(y_0)$ 变到 $L(\xi)+f(t,\xi)$ 的过程. 即 $L(\xi)-L(y_0)$ 和 $L(\xi)+f(t,\xi)$ 是同胚的,这正是同伦理论中的变形.

我们设方程(5)的解具有 $p$ 的幂级数形式,

$$\xi = \xi_0 + p\xi_1 + p^2\xi_2 + \cdots + p^n\xi_n + \cdots, \tag{6}$$

则原方程(3)的解为

$$y = \lim_{p\to 1}\xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n + \cdots$$

### 2.1. 当 $k\neq 0$ 的情形

问题

$$\varepsilon y'' + ky = 0, \qquad y(-1,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 1$$

的解为

$$\bar{y}(t,\varepsilon) = \cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t/\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}.$$

我们取

$$y_0 = \bar{y}(t,\varepsilon) = \cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t/\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}.$$

将(6)式代入(5)式得

$$L(\xi_0) - L(y_0) = 0,$$

$$L(\xi_1) + L(y_0) - (y_0^2 - t^2)^n = 0, \tag{7}$$

$$\xi_1(-1) = \xi_1(1) = 0. \tag{8}$$

……

解(7),(8)式得

$$\xi_0 = y_0 = \cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t/\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}},$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\tan\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\cot\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t\,\mathrm{d}t\Big] \\ &\quad \times\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t + \Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\cot\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\mathrm{d}t \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\mathrm{d}t\Big]\sin\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t,\end{aligned}$$

于是,当 $k\neq 0$ 时问题(3),(4)的一阶近似解为

$$\begin{aligned}y &= \xi_0 + \xi_1 \\ &= \cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t/\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}} + \Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\tan\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\cot\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t\,\mathrm{d}t\Big] \\ &\quad \times\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t + \Big[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\cot\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\mathrm{d}t \\ &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}\int_{-1}^{1}(y_0^2-t^2)^n\cos\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t\,\mathrm{d}t\Big]\sin\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}t.\end{aligned} \tag{9}$$

### 2.2. 当 $k=0$ 的情形

问题

$$\varepsilon y'' = 0, \qquad y(-1,\varepsilon) = y(1,\varepsilon) = 1$$

的解为

$$\bar{y}(t,\varepsilon) = 1.$$

我们取 $y_0=1$. 由(7),(8)式得

$$\xi_0 = y_0 = 1,$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t}\int_{-1}^{u}(1-s^2)^n\mathrm{d}s\mathrm{d}u - \frac{1+t}{2\varepsilon}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{u}(1-s^2)^n\mathrm{d}s\mathrm{d}u.$$

于是,当 $k=0$ 时问题(3),(4)的一阶近似解为

$$\begin{aligned}y &= \xi_0 + \xi_1 \\ &= 1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t}\int_{-1}^{u}(1-s^2)^n\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\ &\quad - \frac{1+t}{2\varepsilon}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{u}(1-s^2)^n\mathrm{d}s\mathrm{d}u.\end{aligned} \tag{10}$$

## 3. 燃烧模型的近似解

易知,问题(1),(2)是问题(3),(4)当 $n=1$ 且 $k=0$ 的特殊情况.

由(10)式得问题(3),(4)的近似解为

$$\begin{aligned}y &= 1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t}\int_{-1}^{u}(1-s^2)\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\ &\quad - \frac{1+t}{2\varepsilon}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{u}(1-s^2)\mathrm{d}s\mathrm{d}u \\ &= 1 + \frac{1}{12\varepsilon}(6t^2 - t^4 - 5).\end{aligned} \tag{11}$$

此结果与用奇摄动法所得结果相符,但更为简洁、精确.

由于 $\xi_2$ 的求解比较复杂,为进一步提高近似解的精度,构造泛函(这一方法的有效性可参见文献[17])

$$\bar{y}(t) = y(t) + \int_0^t \lambda[\varepsilon y''(s) - (y^2(s) - s^2)]\mathrm{d}s, \tag{12}$$

其中 $\lambda$ 为广义拉氏乘子.

我们使用变分迭代法,(12)式的等号两边对 $y$ 独立变分,有

$$\delta\bar{y}(t) = \delta y(t) + \varepsilon\lambda\delta y'(s)\big|_{s=t}$$

$$-\varepsilon\lambda'\delta y(s)\big|_{s=t}+\varepsilon\int_0^t\lambda''\delta y(s)\mathrm{d}s$$

$$-\int_0^t\lambda\bar{y}(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\bar{y}(s)$表示对$(y^2-t^2)$的限制变分量.于是可得如下驻值条件：

$$\lambda''(s)=0,$$
$$\lambda(s)\big|_{s=t}=0,$$
$$1-\varepsilon\lambda'(s)\big|_{s=t}=0.$$

由此可识别拉氏乘子

$$\lambda=\frac{1}{\varepsilon}s. \tag{13}$$

把(13)式代入(12)式,得到迭代公式

$$\bar{y}(t)=y(t)+\int_0^t\frac{1}{\varepsilon}s\left[\varepsilon y''(s)-(y^2(s)-s^2)\right]\mathrm{d}s. \tag{14}$$

为简便,我只进行一次迭代.将(11)式代入(14)式,于是我们就得到近似解

$$\begin{aligned}\bar{y}(t)&=1+\frac{1}{12\varepsilon}(6t^2-t^4-5)\\&\quad+\int_0^t\frac{s}{\varepsilon}\left[1+\left(1-\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{12\varepsilon^2}\right)s^2-\frac{13}{72\varepsilon^2}s^4+\frac{s^6}{12\varepsilon^2}-\frac{s^8}{144\varepsilon^2}\right]\mathrm{d}s\\&=1+\frac{1}{12\varepsilon}(6t^2-t^4-5)+\frac{t^2}{2\varepsilon}\\&\quad+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{12\varepsilon^2}\right)t^3\\&\quad-\frac{13t^5}{360\varepsilon^2}+\frac{t^7}{84\varepsilon^2}-\frac{t^9}{1296}\\&=\left(1+\frac{5}{12\varepsilon}\right)+\frac{t^2}{\varepsilon}-\frac{t^4}{12\varepsilon}\\&\quad+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{12\varepsilon^2}\right)t^3\\&\quad-\frac{13t^5}{360\varepsilon^2}+\frac{t^7}{84\varepsilon^2}-\frac{t^9}{1296}.\end{aligned} \tag{15}$$

## 4. 结　论

由上述分析求解可以看出,同伦理论和变分思想可以求得精度较高的非线性问题的解.本文通过分析探讨,得到了问题(1),(2)的近似解(15),为实际应用提供了理论依据.同时,这一方法还可以用于解决更一般的燃烧问题.

$$\varepsilon y''=(y^2-t^2)^n,\qquad n\geqslant 1$$

和

$$\varepsilon y''=(y+t)^n(y-t)^m,\qquad m>n\geqslant 1.$$


[1] Han X L 2003 *Acta Math. Appl. Sin.* **26** 359 (in Chinese) [韩祥临 2003 应用数学学报 **26** 359]

[2] Han X L 2003 *Acta Math. Sci.* **23** 253 (in Chinese) [韩祥临 2003 数学物理学报 **23** 253]

[3] Han X L 2003 *Chin. Quart. J. Math.* **18** 198

[4] Chen Y, Yan Z Y, Li B *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 1

[5] Zhang W G 2003 *Chin. Phys.* **12** 144

[6] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[7] Bai C L 2001 *Chin. Phys.* **10** 1091

[8] Chen S L, Hou W G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1842 (in Chinese) [陈松林、侯为根 2001 物理学报 **50** 1842]

[9] Na R M D, Wu E B Y, Wang K X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 11 (in Chinese) [那仁满都、乌恩保音、王克协 2004 物理学报 **53** 11]

[10] Li H M, Lin J, Xu Y S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 349 (in Chinese) [李画眉、林　机、许友生 2004 物理学报 **53** 349]

[11] Lü K P, Shi Y R, Duan W S *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁、段文山等 2001 物理学报 **50** 2074]

[12] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10]

[13] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[14] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2373 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 2373]

[15] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2379 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 2379]

[16] Yang D W 1992 *Foundations of Algebraic Topology* (Beijing: Science Press) pp1—50 (in Chinese) [杨鼎文 1992 代数拓扑学基础 (北京: 科学出版社) 第 1—50 页]

[17] He J H 1998 *Computer Methods Appl. Mech. Eng.* **167** 69

# The approximate solution for a combustion model*

Han Xiang-Lin
(*Institute of Science*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

(Received 23 February 2004; revised manuscript received 15 June 2004)

Abstract

Using the homotopic theory, an approximate solution for a class of nonlinear problems is first discussed. Then, the precision is raised by using variational interactive methods. Finally, a combustion model is applied and the approximate solution is obtained.

**Keywords**: nonlinear equation, homotopy, variational interactive methods, combustion model, approximate solution

**PACC**: 0340K, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 102009).