

# 耦合哈密顿系统中测度同步的研究\*

陈绍英<sup>1)2)</sup> 许海波<sup>3)</sup> 王光瑞<sup>3)</sup> 陈式刚<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>中国工程物理研究院北京研究生部, 北京 100088)

<sup>2)</sup>呼伦贝尔学院物理系, 海拉尔 021008)

<sup>3)</sup>北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2004 年 1 月 31 日收到, 2004 年 4 月 12 日收到修改稿)

测度同步现象是耦合哈密顿系统的一种重要性质. 对规则系统和混沌系统的测度同步性质作了深入研究, 重点讨论了耦合哈密顿系统处于混沌状态时, 系统测度同步的特点及系统的相位关系. 提出了一种定量判断测度同步的简单方法, 考虑了高斯白噪声对系统中测度同步性质的影响.

关键词: 耦合哈密顿系统, 测度同步, 相锁定, 高斯白噪声

PACC: 0545

## 1. 引言

同步现象是物理学的一个古老问题, 早在 1673 年 Hugenni<sup>[1]</sup> 研究耦合单摆的同步现象时就已观察到. 早期主要研究的是各种周期系统的同步, 而对混沌系统的同步研究只是最近十几年的事情. 自 Pecora 和 Carroll<sup>[2]</sup> 于 1990 年提出了混沌同步概念后, 这个方面的研究引起了人们的广泛关注. 随着对该现象的深入研究, 人们发现其中蕴涵着丰富的内容和潜在的应用价值. 混沌同步已在保密通信、振荡器设计等方面有了重要的实际应用. 所谓混沌同步, 就是对混沌系统施加控制, 使该系统的轨道与另一混沌系统(或另一演化规律相同但初值不同的同类混沌系统)的轨道渐进地趋向一致<sup>[3]</sup>. 一般意义上的同步是对耗散系统所言的, 而对于保守系统, 由于 Liouville 定理的限制, 故不存在混沌吸引子. 因此, 在保守系统中耗散意义下的混沌同步是不存在的.

Hampton 等<sup>[4]</sup> 在研究耦合哈密顿系统之间关系时发现了测度同步(measure synchronization)现象, 即在相互耦合的哈密顿系统(系统动力学结构相同, 而初值不同)中, 存在一个临界耦合强度值, 当耦合强度大于临界耦合强度时, 各系统在相空间中分享相同的区域并拥有相同的测度; 而且耦合强度的临界值和系统的初始条件有关. 因此, 从宽泛的意义上把这种现象称作测度同步. 测度同步现象是在耦合哈密顿系统中发现的一种新性质, 它显示出耦合

哈密顿系统所具有的一种集体运动形式. 如果说耗散系统的混沌研究有重要的实际意义, 那么保守系统混沌运动的研究还有基本的理论意义. 微观地考察, 任何系统都属于保守系统<sup>[5]</sup>, 因此, 弄清保守系统的性质对研究耗散系统以及量子混沌的性质都有重要的理论意义. 在本文中, 我们将对文献[4]中测度同步性质作更深入的讨论, 特别是当耦合系统处于混沌状态时, 对系统中测度同步的特点和系统相位的性质作进一步的研究. 通过对耦合系统的 Lyapunov 指数、相位差的分析, 得到了一些新的结果. 同时, 为判断耦合系统的测度同步, 我们提出了一种定量判断测度同步的方法, 它比文献[4]中只凭测度密度图来判断系统是否同步更方便、准确. 通过高斯白噪声的引入, 考察了噪声对测度同步的影响.

## 2. 模型和测度同步现象

标准映象是保守系统的局部近似, 是反映保守系统性质最简单又非常重要的一个模型. 给出标准映象的形式为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) + y(t) - k \sin(x(t)), \quad \text{mod } 2\pi, \\y(t+1) &= y(t) - k \sin(x(t)), \quad \text{mod } 2\pi,\end{aligned}\quad (1)$$

式中  $y, x$  是作用-角变量,  $k$  是非线性参数. 一般地, 该映象表现出三种类型的运动轨道<sup>[6]</sup>: 周期轨道、Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 环面和混沌轨道. 当  $k=0$  时, 该映象是可积的; 对于小的  $k$  值 ( $k \ll 1$ ), 前

\* 国家重点基础研究专项基金、国家自然科学基金(批准号: 10147201, 10247003)和激光技术创新基金(批准号: 20030512)资助的课题.

两种运动轨道在相平面上占优势<sup>[7]</sup>;当  $k > k_c \approx 0.9716$  时,横贯水平方向的最后一条 KAM 环面破裂,整体随机性开始.因此,当  $k \approx 1$  时,相平面是规则轨道和混沌轨道错综复杂的混合<sup>[8]</sup>.对于适当的参数值,标准映象(1)式既有规则的准周期轨道又有混沌轨道,取决于对初始条件的选择.为了保持耦合后系统仍是保守的, $N$ 个标准映象 $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ )之间耦合方式为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x(t)_i, \quad \text{mod } 2\pi, \\ y_i(t+1) &= y(t)_i + \frac{\beta}{N} \sum \text{sin}[x_j(t) - x_i(t)], \quad \text{mod } 2\pi, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\beta$  是系统之间的耦合强度.

因为我们关心的是耦合后系统中每个子系统的动力学性质(这里考虑两个子系统的耦合),因此,把耦合系统的运动状态“投影”到一个系统运动的相空间平面上,也就是只研究系统的两轨道 $(x_i(t), y_i(t))$  ( $i = 1, 2$ )在 $(x, y)$ 平面上的演化.对于哈密顿系统,初始条件是一个特殊的控制参数.因此,初始值的选择很重要.为了说明测度同步现象,选择规则

区域中两个初值 $(0.2700, 0.3870)$ 和 $(-0.5201, 0.2017)$ ,并取非线性系数  $k = 1.2$ .这两个初始值分别对应两个同心的准周期轨道,如图 1(a)所示.随着耦合强度  $\beta$  的增大,两轨道演化的区域逐渐增大,变成二维的圆环,并且两轨道相邻的边界在不断靠近,当耦合强度增加到  $\beta = 0.0206$  时,两个二维圆环的边界几乎相互接触,如图 1(b)所示.从耦合强度  $\beta$  大于  $\beta_c \approx 0.0207$  起,这两个轨道突然由原来的相互接触变为在相空间分享相同的区域,并拥有相同测度,如图 1(c)(d)所示.我们把两轨道分享相同相空间区域并拥有相同测度的现象叫做测度同步.发生转变时对应的耦合强度称为临界耦合强度  $\beta_c$ .测度同步后,除了某些小的耦合强度间隔外,这个现象一般一直保持着,这些小的不同步间隔称为测度失同步(measure desynchronization)窗口.上述耦合系统达到测度同步时系统的运动是规则的,系统的临界转变是一种突变过程,这个现象在辛映象、耦合  $\varphi^4$  的连续模型<sup>[10]</sup>的规则运动中都存在,可以说该现象是耦合哈密顿系统中一种普遍的集体行为.

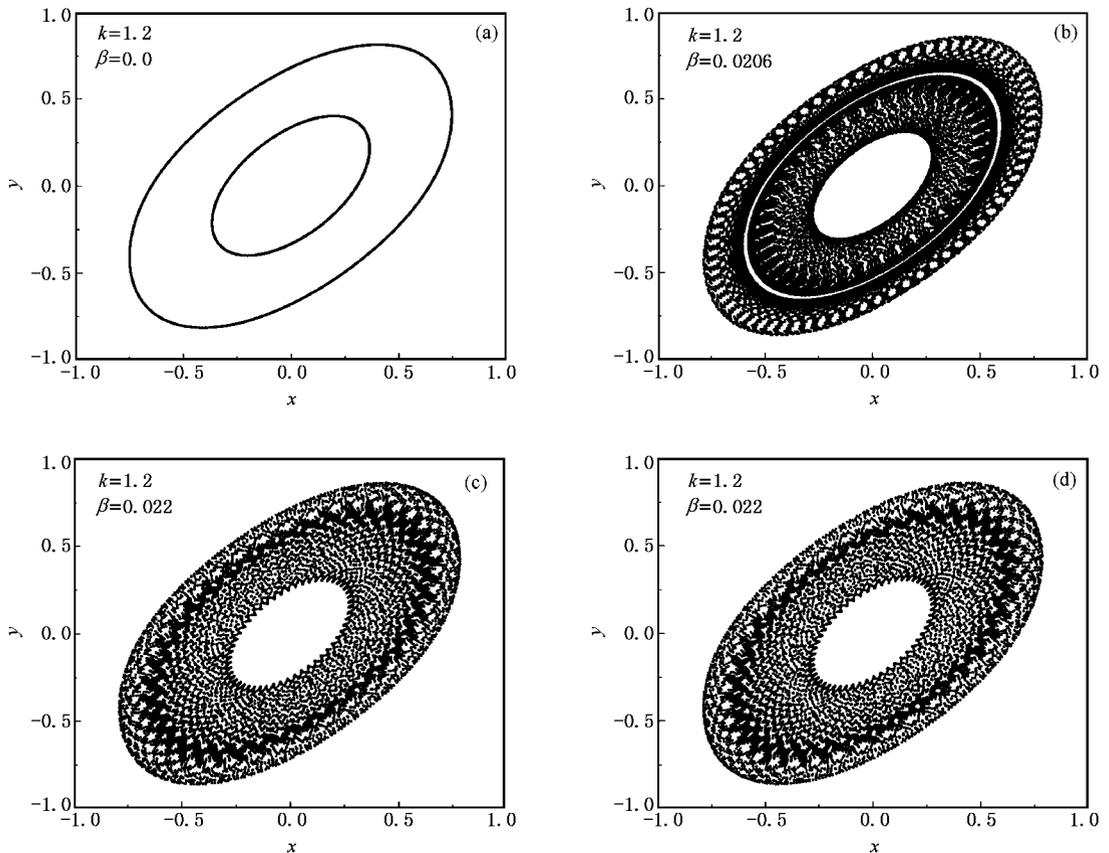


图 1 由方程(2)耦合的两个标准映象的轨道在 $(x, y)$ 上的演化 (a)没有耦合  $\beta = 0$  (b)耦合强度为  $\beta = 0.0206$ , 低于临界耦合强度,两轨道几乎相互接触 (c)和(d)  $\beta = 0.022$  耦合强度大于转变点,分别对应(a)图中小半径轨道和大半径轨道的演化

### 3. 测度同步的判断方法

测度同步与耗散系统的完全混沌同步、广义混沌同步以及相同步在含义上是有本质区别的一种同步. 在 Lyapunov 指数上它们表现出不同的特点. 稳定的完全混沌同步及广义混沌同步, 都要求响应系统的所有条件 Lyapunov 指数全部为负, 所以响应系统实质上是一个具有混沌信号输出的非混沌系统<sup>[9]</sup>. 连续系统的相同步也要求描述系统相位行为的零 Lyapunov 指数穿零变负. 而耦合哈密顿系统的测度同步, 它的 Lyapunov 指数则表现出与它们不同的特征. 对于由两个标准映象耦合的系统而言, Lyapunov 指数对测度同步状态是不敏感的<sup>[4]</sup>. 但对于耦合的连续  $\varphi^4$  模型, Lyapunov 指数又是判断混沌状态下系统测度同步的充分条件<sup>[10]</sup>, 这些不同现象反映出测度同步现象的复杂性.

上述讨论的例子中, 测度同步的达到与否, 在文献 4 中是根据耦合后两子系统的运动投影到一个

子系统的运动平面上的分布区域来判定的. 但这种判断方法有时是不方便的, 特别是对于耦合后系统运动状态是混沌时. 当然, 耦合系统测度同步后, 两子系统在相空间拥有相同的区域与测度, 因此两者的长时间所有统计平均量是相等的. 虽然这些平均量相等只是测度同步的一个必要条件, 但通过这些量可以反映出系统变化的一些特征. 因此, 可以找到一些量来定量判断测度同步现象. 在此, 我们给出一种定量确定测度同步的方法. 基本思想如下: 由保守系统的性质和由测度同步的含义可知, 在投影平面上每一系统演化的相空间中任一相点的任意小的邻域内总能找到另一个系统的运动轨迹. 据此, 把投影平面分成  $N \times N$  个方格子 ( $N$  为正整数, 大小可根据平面细化程度来确定), 在达到测度同步后, 只要系统演化的时间足够长, 两个系统在该投影相平面上对应的每个格子中轨道通过的频率应该趋于相等. 这样, 以每一个格点为平面坐标, 以每个轨道长时间演化在对应格子中出现的次数为纵坐标, 画出的两系统在投影平面上的分布应该是相同的. 按照

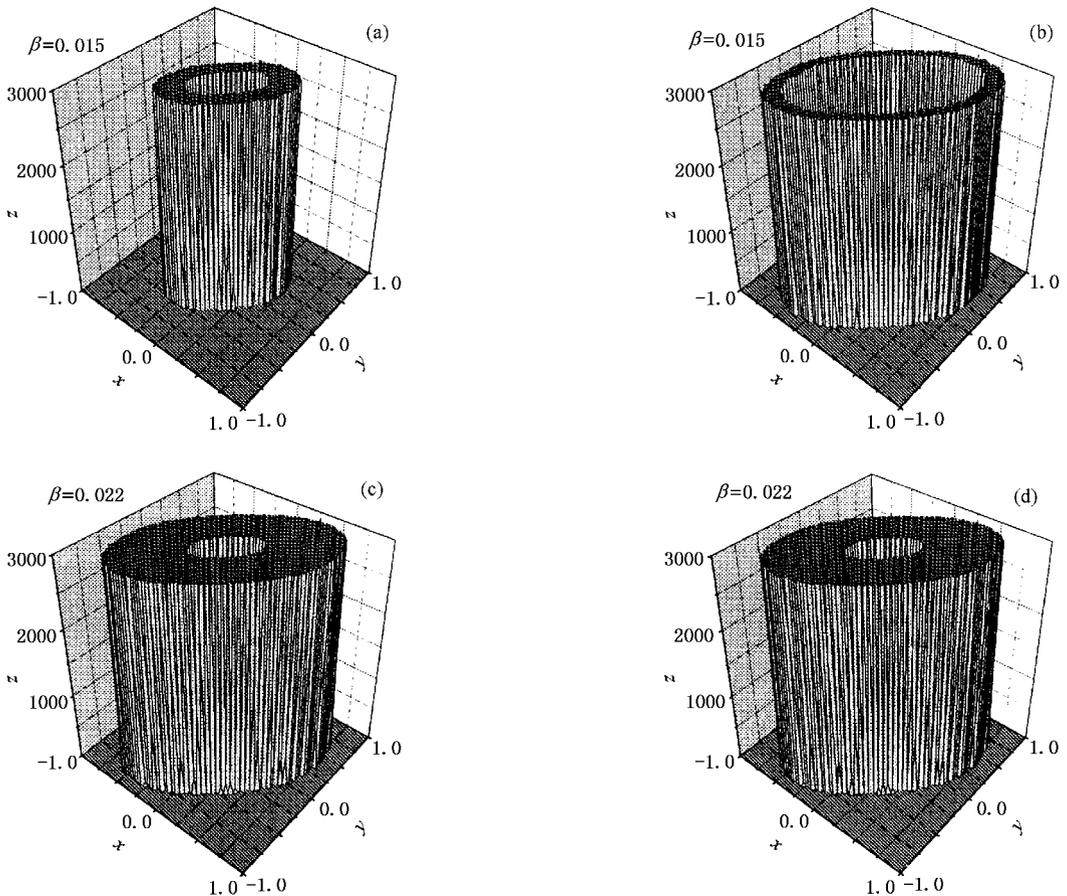


图 2 耦合系统各子系统轨道演化的三维分布示意图 (a)和(b)  $\beta = 0.015$  分别对应图 1(a)中小半径轨道和大半径轨道测度同步前的分布 (c)和(d)  $\beta = 0.022$  分别对应图 1(a)中小半径轨道和大半径轨道测度同步后的分布. 各图截取的都是相同的平面

上述方法,我们给出了对应图 1 初始条件,测度同步前 ( $\beta = 0.015$ ) (见图 2(a)(b)) 和测度同步后 ( $\beta = 0.022$ ) (见图 2(c)(d)) 各子系统对应的测度密度分布的三维图.从图 2 中可以清晰地看到,在测度同步前两轨道在投影平面上的分布不相同,而在测度同步后两轨道在投影平面上分布已趋于相同.

当然,图 2 只是把轨道演化过程直观化了.为了定量地描述测度同步的现象,定义一个数值变量  $M$ ,用它来衡量测度同步的程度.在分成  $N \times N$  个方格的相平面上,设两个子系统长时间演化后,它们的轨道到达同一方格  $(i, j)$  中的次数分别是  $n_{i, j}$  和  $n'_{i, j}$ ,这里  $i, j = 1, 2, \dots, N$ .定义

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i, j} c_{i, j} \frac{(n_{i, j} - n'_{i, j})^2}{(n_{i, j} + n'_{i, j})^2} \quad (3)$$

(3) 式中,对于轨道没有到达的格子,系数  $c_{i, j} = 0$ ;对于轨道到达的格子,系数  $c_{i, j} = 1$ .由测度同步的性质可知,当测度同步时两轨道在对应格子中出现的平均次数应趋向相等,则  $M \approx 0$ ;测度不同步时,则  $0 < M \leq 1$ .这样可以通过  $M$  这个数值量,方便地判断出耦合系统是否测度同步.仍取和图 1 相同的初始值,在图 3 中给出了  $M$  的数值随耦合强度  $\beta$  的变化.由图 3 可以看出,从  $\beta_c \approx 0.0207$  起,  $M$  的数值迅速变为零,耦合系统转变为测度同步状态.因此,我们可以用通过  $M$  值的变化来判断系统是否测度同步.

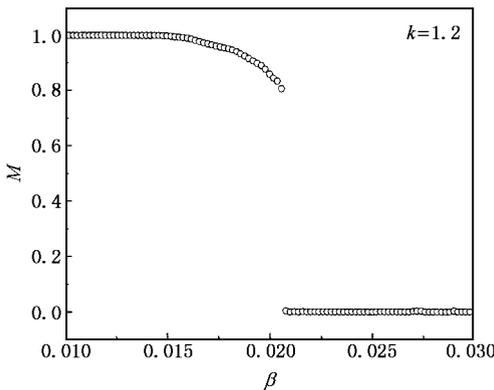


图 3  $M$  的数值随耦合强度  $\beta$  的变化 初始值与图 1 初值相同

我们再来研究以混沌状态达到测度同步的耦合系统.选初始值分别为  $(0.2807, -0.0802)$  和  $(-0.2567, 0.8308)$ ,  $k = 1.2$ , 这两个初始值分别对应一个准周期 1 轨道和准周期 1 轨道破裂形成的六周期椭圆岛链,如图 4(a)所示.随着耦合强度的增

加,两轨道所占区域逐渐增加,例如  $\beta = 0.03$  时,两个准周期轨道变为二维环状,如图 4(b)所示.此时耦合系统已变为混沌,这可以从系统的最大 Lyapunov 指数随耦合强度的变化看出,如图 5 所示.

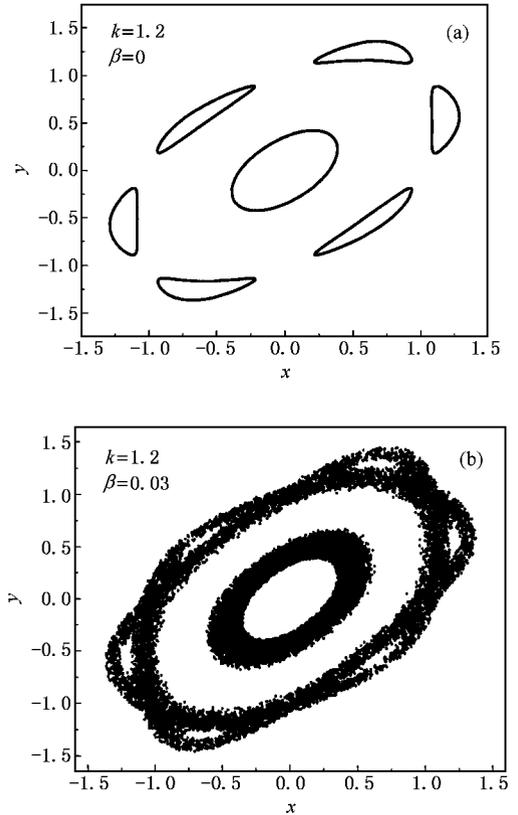


图 4 由方程 (2) 耦合的混沌系统的轨道在  $(x, y)$  上的分布 (a)  $\beta = 0$  没有耦合,中间圆环为准周期 1 轨道,周围分布的月牙形轨道为一个六周期椭圆岛链 (b) 耦合强度  $\beta = 0.03$  时系统已变为混沌状态

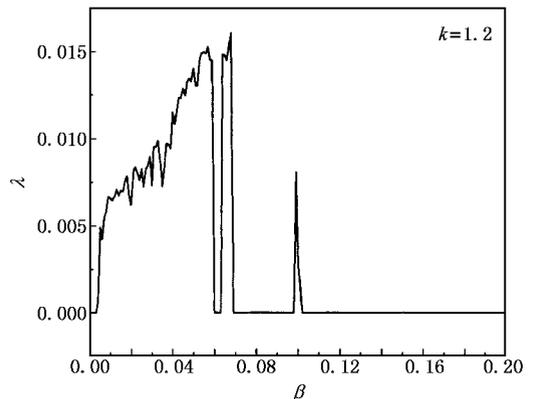


图 5 混沌系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda$  随耦合强度  $\beta$  的变化

由于耦合系统在测度同步前已处于混沌状态,

临界慢化现象使得测度同步临界点的判断需要系统演化很长时间. 这样, 只从轨道分布图上寻找测度同步的临界点会很不方便并难以做到准确, 因此需要结合其他量的帮助共同确定测度同步临界点. 在文献 [10] 中, 作者通过系统的最大 Lyapunov 指数的变化来确定连续  $\varphi^4$  模型中混沌运动时的测度同步的临界点, 但该方法对标准映象耦合的模型是不适用的<sup>[4, 10]</sup>. 因此, 我们通过已定义的  $M$  量来判断耦合系统的测度同步的临界点, 该方法不受模型的限制. 图 6 给出了不同迭代时间下,  $M$  的数值随耦合强度

的变化. 由图 6 可看出, 对应  $M$  值混乱的部分经系统长时间的演化才逐渐趋于零, 而且在  $\beta \approx 0.032$  也显出突变的特征. 图 7 也给出了确定耦合强度下  $M$  值随时间的变化. 从图 7 可看出, 随着时间的增加,  $M$  值总的趋势是减小的, 而在  $\beta \approx 0.032$  则需要更长的时间(迭代  $10^9$  以上的次数  $M$  才趋于零, 图 7 (b) 没有画出这么长时间). 因此综合图 6、图 7 中  $M$  的变化趋势, 从长时间的平均效果可以确定系统的临界耦合强度为  $\beta_c \approx 0.032$ . 我们看到混沌系统测度同步现象不像规则系统那样容易出现.

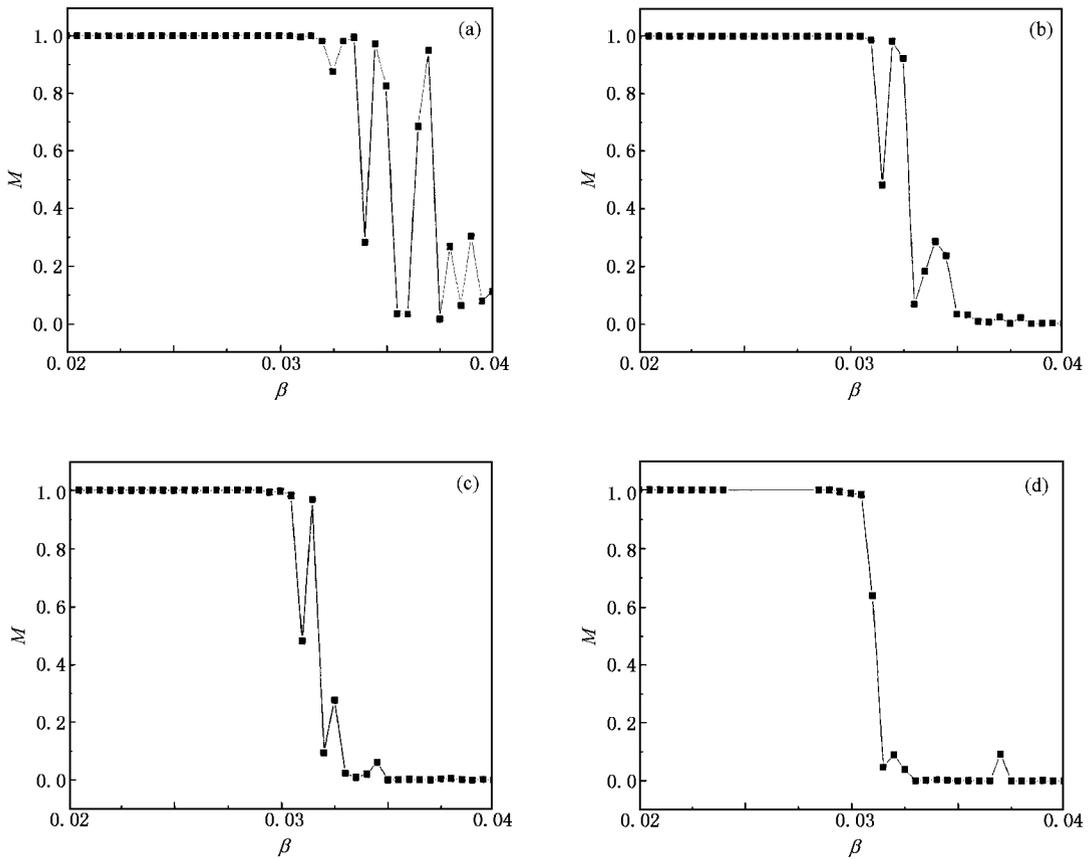


图 6 混沌系统不同迭代时间下的  $M$  值随耦合强度  $\beta$  的变化 (a) 迭代  $10^6$  次 (b) 迭代  $10^7$  次 (c) 迭代  $10^8$  次 (d) 迭代  $10^9$  次

对于图 4 所给的系统, 测度同步后系统在观察范围内交替地处在混沌与周期运动中, 这可以通过系统的最大 Lyapunov 指数的变化看出. 在图 8 (a), (b) 中  $\beta = 0.04$ , 系统就是以混沌状态处于测度同步的. 测度同步后, 一般都存在测度失同步窗口, 表现为原来分享相同相空间区域的两个轨道突然彼此分开, 具有了不同的测度. 在本系统中  $\beta = 0.65$  就存在一个失同步窗口. 失同步窗口可能是系统对它们原

来的周期窗口的记忆, 在适合的耦合强度下显现出来. 混沌系统的测度同步, 需要演化较长的时间才能达到稳定, 而高维系统存在阿诺德(Arnol'd)扩散, 它是否对系统的测度同步产生影响呢? 我们观察了上述系统, 发现当系统达到测度同步后延长演化时间对系统的测度同步并没有产生明显的影响. 因此, 测度同步是耦合哈密顿系统中一种稳定的性质.

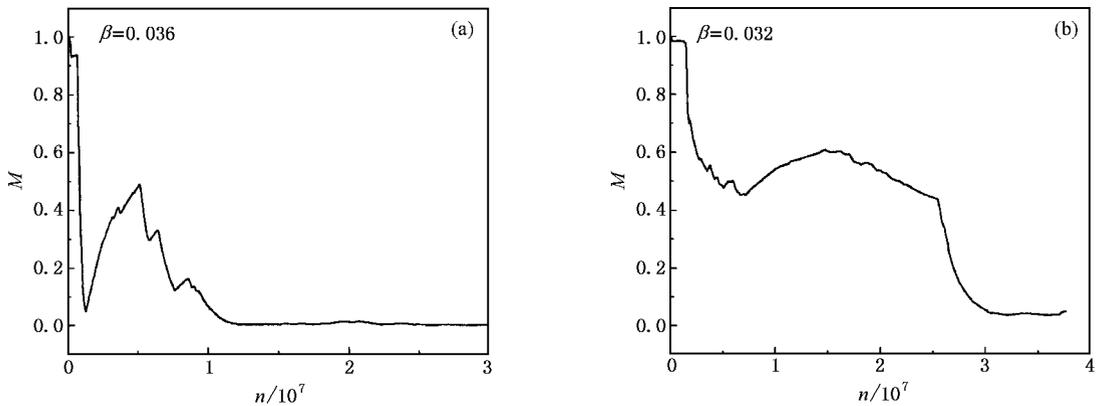


图 7 混沌系统耦合强度  $\beta$  一定时,  $M$  随迭代次数的变化 (a)  $\beta = 0.036$  (b)  $\beta = 0.032$

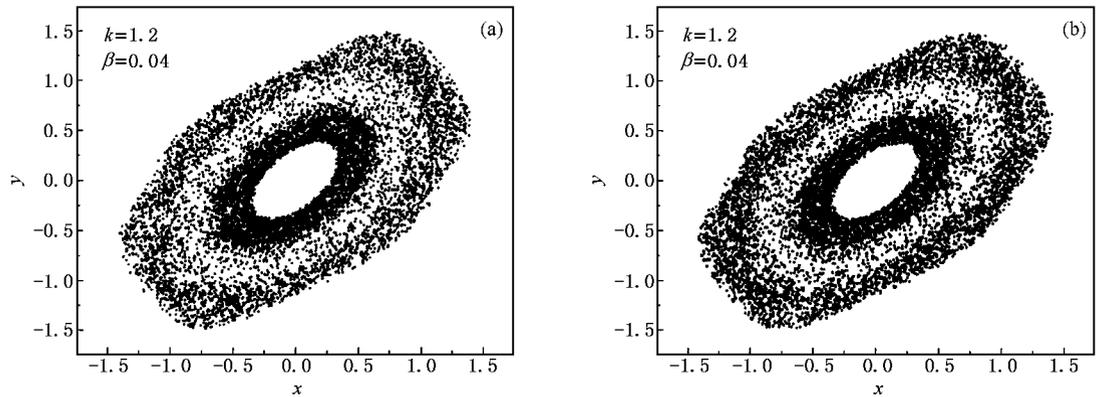


图 8 系统以混沌状态下测度同步 (a) 对应图 4(a) 中的准周期 1 轨道的演化 (b) 对应图 4(a) 中的六周期椭圆岛的演化

### 4. 耦合系统的相位差与测度同步的关系

文献 4 中已经知道 对于以规则运动达到测度同步的耦合系统,系统的相位差也同时发生相锁定.这个性质很重要,利用它也可以帮助确定规则系统的测度同步临界点.但相位锁定前后的性质以及混沌运动的耦合系统的相位特点文中并没有涉及到,因此,在此对系统的相位与测度同步关系再作认真考察.1996 年, Rosenblum 等<sup>[11]</sup>基于周期振子的同步特征提出的混沌相位同步(phase synchronization)引起人们的极大关注.混沌相位同步在医学方面有重要的应用,因此研究系统的混沌相位同步有重要的理论及实际意义.当然,若研究混沌系统的相位问题,首先要定义适当相位,以便给出合理的瞬时相位.在此,采用文献 12 中在切空间中对离散系统混沌相位的定义方法.

考虑  $N$  维离散时间混沌动力学

$$x_{n+1} = F(x_n), \tag{4}$$

其中  $x \in \mathbf{R}^N$ ,  $F$  对  $x$  足够光滑.在这里  $x_n = [x_n(1), x_n(2) \dots x_n(N)]$  是  $N$  维状态矢量.一个二维矢量在  $p$ - $q$  平面上的相位定义为

$$\phi_{n+1} = \arctan\left(\frac{q_{n+1} - q_n}{p_{n+1} - p_n}\right), \tag{5}$$

该角度定义在  $[0, 2\pi]$  之间.为保证系统相位的单调性,系统的相位写为

$$\psi_n = \phi_n + 2\pi m_n, \tag{6}$$

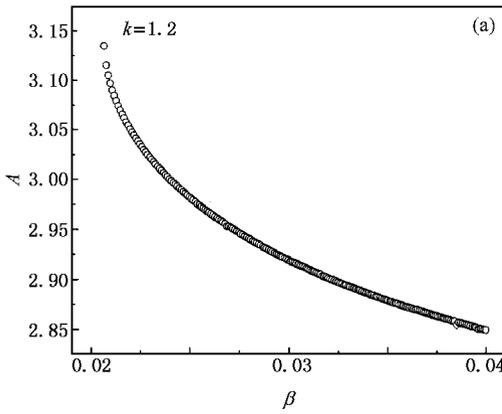
式中  $m_n$  为整数,如果  $\phi_{n+1} < \phi_n$ ,  $m_{n+1} = m_n + 1$ ; 否则,  $m_{n+1} = m_n$ .而  $m_1 = 0$ ,  $n$  是迭代次数.有了相位定义,就可以研究耦合系统测度同步前后系统相位差

$$\Delta\varphi = \psi_2 - \psi_1 \tag{7}$$

的性质.

文献 4 中已经知道 对于耦合后系统处于规则运动状态时,测度同步前耦合系统的相位差  $\Delta\varphi$  平

均值随时间近似成线性关系,达到测度同步后,耦合系统的相位差  $\Delta\varphi$  发生锁定,以一定的频率围绕某一常数振动,而且耦合系统相位差的锁相点和测度同步转变点相同.从文中的序参数  $f$  的变化还知道:测度同步后耦合系统相位差的振动频率随耦合强度的增加而增加,而其振动的振幅有何变化在文中并没有说明.因此,我们研究相锁定后的振幅变化.仍取规则区域初始值  $(0.2700, 0.3870)$  和  $(-0.2567, 0.8308)$ ,并在图 9(a) 中给出了该耦合系统相位差锁定后振幅  $A$  随耦合强度  $\beta$  的变化关系.从图 9(a) 可



以看出,在发生测度同步后相位差的振幅  $A$  随耦合强度  $\beta$  的增加而单调地减少,而在耦合强度  $\beta$  趋近临界耦合强度  $\beta_c \approx 0.0207$  时,曲线的斜率趋于发散,振幅  $A$  趋近有限值  $\pi$ .图 9(b) 给出在耦合强度  $\beta$  趋近临界耦合强度  $\beta_c$  时  $\ln(\beta - \beta_c)$  与  $\ln(\pi - A(\beta))$  的关系.拟合这些数据,可得出下述标度关系:

$$\pi - A(\beta) \propto (\beta - \beta_c)^\gamma. \quad (8)$$

这里  $\gamma \approx 1/2$ ,这和连续的  $\varphi^4$  模型<sup>[10]</sup>及离散的辛映象中得到的结论一致.因此,可以推测该性质对于耦合的哈密顿系统,应该是普适的.

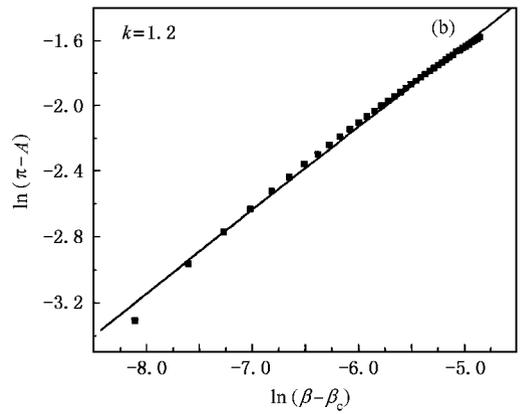


图 9 规则系统相锁定后振幅变化和标度关系 (a)测度同步后,相位差振幅  $A$  随耦合强度  $\beta$  的变化 (b)系统耦合强度  $\beta$  趋近临界耦合强度  $\beta_c$  时振幅的标度关系,图中直线为对数数据的拟合

上述结果也可以通过解析的方式得到解释,因为很多哈密顿系统的运动方程通过正则变换转换到作用-角坐标系中变成旋转问题.考虑用作用-角坐标表示的两个相互耦合的转子,其耦合系统哈密顿量可写为<sup>[4]</sup>

$$H(\psi_1, \psi_2; \omega_1, \omega_2) = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} - \beta \frac{\cos(\psi_2 - \psi_1)}{2}, \quad (9)$$

其中  $(\omega_1, \omega_2)$  和  $(\psi_1, \psi_2)$  分别表示转子的角速度和角坐标,  $\beta$  是两个转子之间的耦合常数.通过一系列运算和变换,该问题可变成一个单摆问题,即

$$\ddot{\xi} + \beta \sin \xi = 0, \quad (10)$$

式中  $\xi = \psi_2 - \psi_1$ , 是两个转子之间的相位差.由(10)式可知,第一积分是

$$E = \frac{\dot{\xi}^2}{2} - \beta \cos \xi. \quad (11)$$

这里,  $E$  为积分常数,它是耦合系统的总能量.当  $E < \beta$ ,单摆在平衡点附近作简谐运动;当  $E > \beta$ ,单摆作无界的周期运动.分界线所对应的耦合强度  $\beta_c$  由第一积分决定,即由系统的初始值决定.这样,对于

$\beta < \beta_c$ , 对应于单摆的转动;对于  $\beta > \beta_c$ , 对应于单摆的振动.由(11)式可得单摆的分界线方程为

$$\xi = 4 \arctan e^{\pm \beta_c t} - \pi. \quad (12)$$

因为当耦合强度趋于临界耦合强度时,即  $\beta \rightarrow \beta_c^+$ , 单摆的轨道趋近分界线轨道,而在分界线上轨道运动范围是以  $[-\pi, \pi]$  为周期的.因此,可以确定单摆振动范围为  $[-\pi, \pi]$ , 则其最大的振动振幅是  $\pi$ .这和上述规则区域运动的轨道,  $\beta \rightarrow \beta_c^+$  相锁定的振幅  $A(\beta) \rightarrow \pi$  的数值结果是一致的.  $\gamma \approx 1/2$  可以解释如下:由(11)式可知,对于分界线  $E = \beta_c$ , 则

$$\beta_c = \frac{\xi_0^2}{2} - \beta_c \cos \xi_0, \quad (13)$$

其中  $\xi_0$  为初始值.考虑单摆趋近分界线的振动情况,此时耦合强度  $\beta \rightarrow \beta_c$ , 振动的振幅  $\xi_A \rightarrow \pi$ , 其能量  $E \rightarrow \beta_c$ , 且  $E < \beta_c$ . 令

$$\beta = \beta_c + \Delta\beta, \quad (14)$$

$$\xi_A = \pi - \Delta\xi,$$

则此时系统的能量可写为

$$- \beta \cos \xi_A = \frac{\xi_0^2}{2} - \beta \cos \xi_0. \quad (15)$$

把 (14) 式代入 (15) 式, 对  $\Delta\xi$  作泰勒展开, 忽略高次项, 并利用 (13) 式可得

$$(\Delta\xi)^2 \propto \Delta\beta. \quad (16)$$

这样就解释了上述数值结果  $\gamma \approx 1/2$ .

除对测度同步后相锁定的性质作了分析外, 我们也仔细观察了临界耦合强度之前相位差的变化, 发现对于规则系统在接近相锁定前也存在相位差  $\Delta\varphi$  间歇地作  $2\pi$  跳跃的现象<sup>[13]</sup>, 在耦合强度接近测度同步临界值时 1:1 的锁相增加, 为测度同步后的完全相锁定奠定了基础.

我们再来讨论混沌系统测度同步时系统的相位关系. 仍用上述混沌系统的初始值 (0.2807,

-0.0802 和 (-0.2567, 0.8308)). 在以上部分的讨论中, 已经知道该耦合系统转变为测度同步后, 在观察范围内系统的运动是混沌与规则运动交替存在. 取  $\beta = 0.045$ , 此时耦合系统处于混沌状态的测度同步, 系统的相位差却随时间在锁相和相转移之间交替变化. 相位差是一种随机行走行为, 没有真正的相锁定发生. 如图 10(a) 所示. 而取  $\beta = 0.06$ , 则系统处于规则状态测度同步, 这时可看到耦合系统又处于相锁定状态, 如图 10(b) 所示. 因此, 通过我们的数值观察, 看到对于混沌系统, 不存在系统相位差的真正锁相, 也没有测度同步的临界点和系统锁相点的重合.

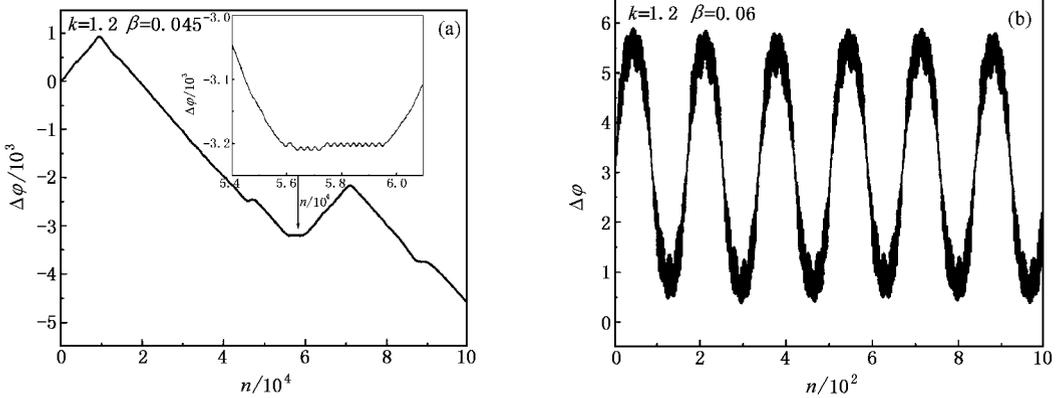


图 10 混沌系统相位差随时间的变化 (a) 系统处于混沌运动状态,  $\beta = 0.045$  (b) 系统处于规则运动状态,  $\beta = 0.06$

为了进一步研究混沌系统相位关系的特点, 定义系统的相位移速率

$$\eta = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{\Delta\varphi}{t} \right|, \quad (17)$$

图 11 给出了不同时间演化下混沌系统的相位

移速率  $\eta$  随耦合强度  $\beta$  的变化. 由图 11 可以看出, 在测度同步临界点  $\beta_c \approx 0.032$  前, 系统相位差存在一定大小的相位移速率. 在测度同步后, 系统的相位差存在相扩散现象. 为了描述这种情况下耦合系统相位差的变化, 定义相扩散系数  $D_\varphi$ ,

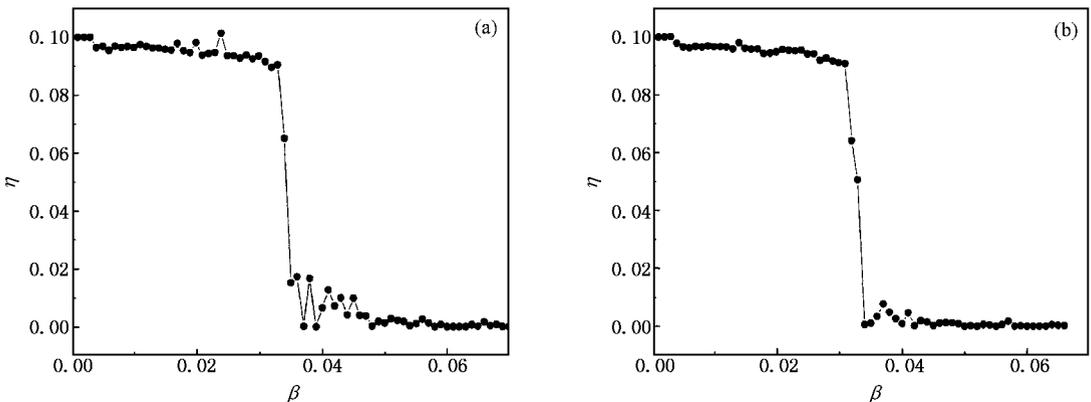


图 11 不同时间演化下, 混沌系统的相位移速率  $\eta$  随耦合强度  $\beta$  的变化 (a) 演化时间  $10^7$  次 (b) 演化时间  $10^8$  次

$$D_{\varphi} = \langle (\dot{\varphi} - \langle \dot{\varphi} \rangle)^2 \rangle. \quad (18)$$

这里  $\langle \cdot \rangle$  是对足够长时间的平均. 图 12 给出了耦合系统相扩散系数  $D_{\varphi}$  随耦合强度的变化. 从图 12 可看出, 相扩散系数的变化与系统的运动状态有关, 耦合系统作混沌运动时, 系统相位差没有锁定,  $D_{\varphi} > 0$ , 而在耦合系统作规则运动时, 系统的相位差锁定,  $D_{\varphi} \approx 0$ .

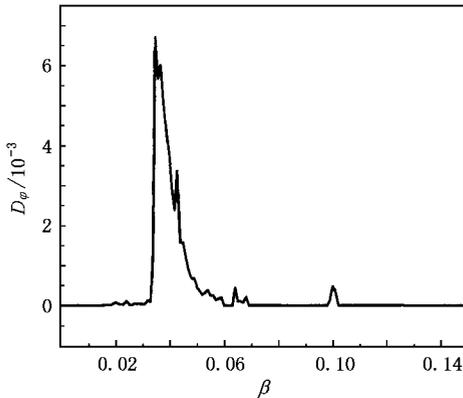


图 12 耦合系统的相扩散系数  $D_{\varphi}$  随耦合强度  $\beta$  的变化

## 5. 噪声对测度同步的影响

噪声在非线性动力学系统中能导致相变、随机共振等诸多效应, 利用外部噪声还可以实现非线性系统的混沌控制与同步<sup>[14, 15]</sup>. 控制方法的实际效果, 与受控轨道的抗噪声能力有关. 在这里我们研究由 Box-Muller 方法<sup>[16]</sup>产生的 Gauss 白噪声对测度同步的影响, 并引入加性噪声

$$x'_i(t) = x(t)_i + \rho \xi(t) \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (19)$$

其中  $\rho$  为噪声强度,  $\xi(t)$  为一 Gauss 型随机变量, 满足条件

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t'), \quad (20)$$

这里加性噪声的引入不改变系统的保守性质.

为了说明噪声对耦合系统测度同步的影响, 取文献 [4] 中规则区域的初始条件  $(0.2807, -0.0802)$  和  $(-0.1471, 0.0134)$ , 已经知道对此初始条件耦合系统的测度同步的临界值  $\beta_c \approx 0.00318$ . 取耦合强度  $\beta = 0.0034$ , 此时系统已达到测度同步, 如图 13 所示.

分别给该系统加上强度为  $\rho = 5.0 \times 10^{-5}$  和  $\rho = 5.0 \times 10^{-4}$  的 Gauss 白噪声. 我们看到对于  $\rho = 5.0 \times 10^{-5}$  时, 在  $10^5$  次的迭代后, 系统的测度同步还保持着, 只是系统从周期运动变为混沌运动, 如图 14 (a) (b) 所示. 而当加上强度为  $\rho = 5.0 \times 10^{-4}$  的 Gauss 噪声时, 对系统的影响较大, 在相同的迭代次数下系统已失去了测度同步, 如图 14 (c) (d) 所示.

上述结论也可以通过耦合系统相位关系得到验证. 图 15 (a) 显示出在加上强度为  $\rho = 5.0 \times 10^{-5}$  的噪声后, 耦合系统的相位差仍是锁定的, 与无噪声相比只是振幅变得不均匀, 说明耦合系统还保持测度同步的性质, 而在图 15 (b) 之中, 在加上强度为  $\rho = 5.0 \times 10^{-4}$  的噪声后, 看到系统相位差由短暂锁定变为相转移, 说明系统的相同步已失去, 从而也说明测度同步已失去. 上述例子说明, 系统的测度同步现象有一定的抗噪声能力, 而且随着同步的耦合强度增大, 系统抗噪声的能力也在增强. 这对于利用测度同步思想进行混沌的控制很重要. 应当注意的是, 对于保守系统, 由于其与耗散系统的固有性质不同, 因此噪声影响使系统的运动要发生扩散, 这种扩散现象跟噪声强度有关外, 还与耦合系统的演化时间及耦合强度有关. 在一定的耦合强度下, 对于小的噪声强度, 我们发现耦合系统的测度同步在相当长的演化时间内还是可以保持的.

我们再来讨论噪声对系统测度同步临界点的影响. 取耦合强度  $\beta = 0.003145$ , 该值小于并很接近无噪声的临界耦合强度  $\beta_c \approx 0.00318$ , 因此无噪声时耦合系统还没有达到测度同步, 两轨道在相平面上应分享不同的区域. 给其加上强度为  $\rho = 5.0 \times 10^{-5}$  噪声时, 发现由于噪声的影响这时两轨道已分享相同的相空间区域, 但二者的密度分布是不同的. 两个轨道形成的二维环面区域中, 一个是靠近内半径区域的分布密度大, 另一个是靠近外半径区域的分布密度大, 如图 16 所示. 因此, 还不能认为它们已取得测度同步. 此时, 观察该耦合系统的相位差变化, 发现其在相锁定和相转移之间交替变化, 也没有达到完全的相锁定, 如图 17 (a) 所示. 从相位来看, 系统也没有具有规则系统的测度同步特征. 因此, 噪声的影响产生了一个测度同步与非同步的中间状态, 即在接近同步时噪声有促使系统测度同步的趋势. 当取  $\beta = 0.0032$ , 即耦合强度大于且接近临界耦合强度, 对无噪声系统已达到测度同步. 加上同样的噪声后,

系统的相位差从原有的锁相存在短暂的相滑移(图 17(b))且两轨道测度密度分布也变为稍有不均匀. 由此可以看出, 测度同步后噪声又有破坏同步的趋

势. 但对于强度不是很大的噪声, 只要耦合强度达到一定的值, 就可将其抑制, 从而使测度同步点不会产生大的变化.

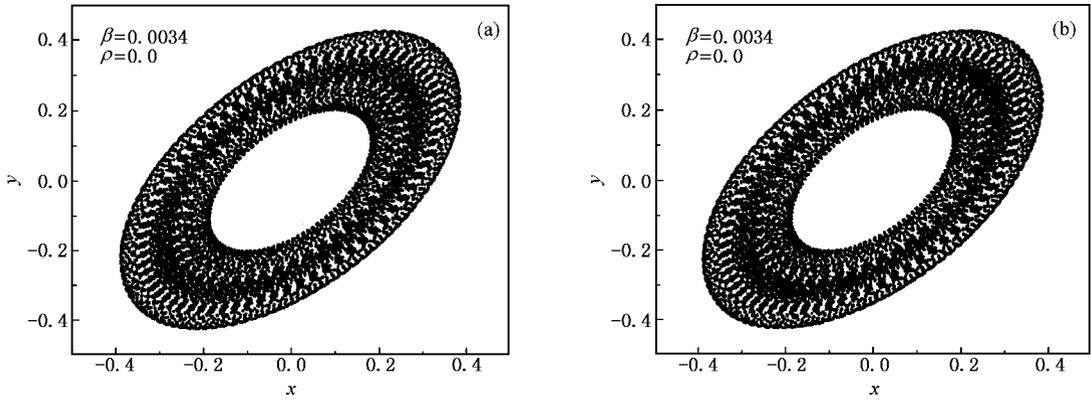


图 13 不加噪声时耦合系统的测度同步 (a)(b)对应的初始条件分别为(0.2807, -0.0802)和(-0.1471, 0.0134)

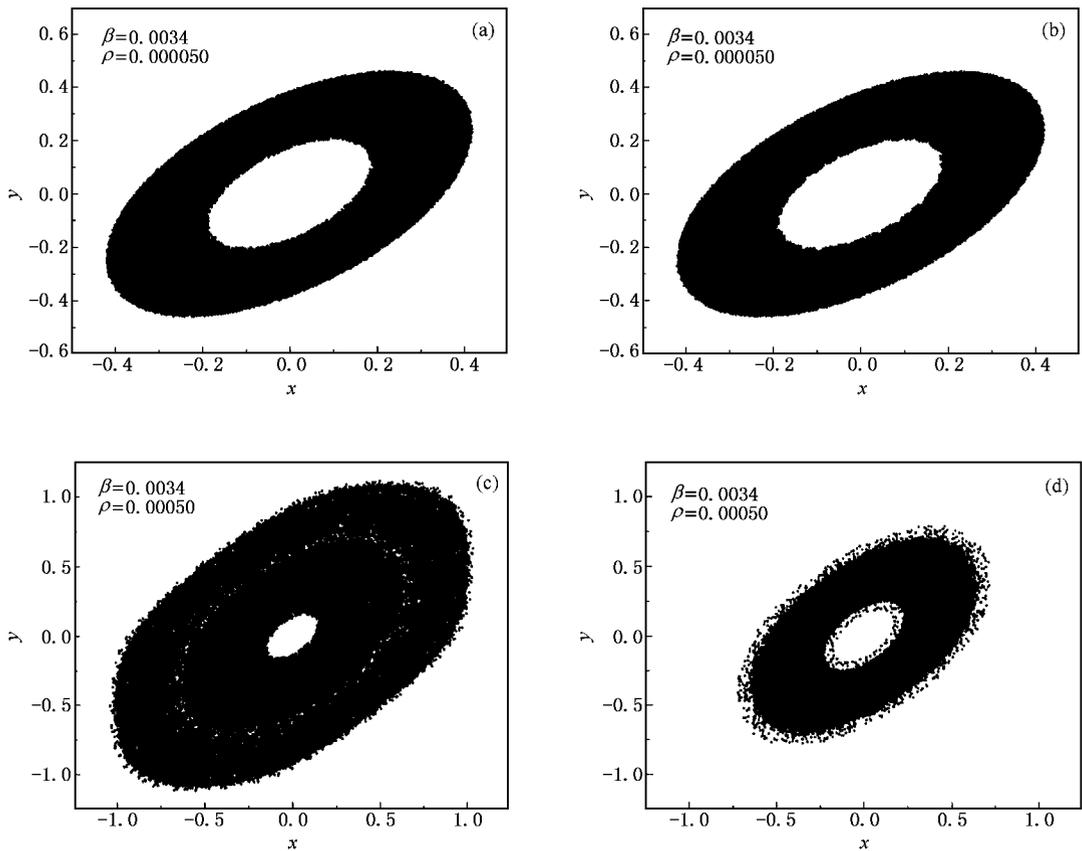


图 14 不同强度的噪声对耦合系统测度同步的影响 (a)和(b)噪声强度  $\rho = 5 \times 10^{-5}$ , 系统保持测度同步 (c)和(d)噪声强度为  $\rho = 5 \times 10^{-4}$ , 系统已失去测度同步. 所有图形均为迭代  $10^5$  次

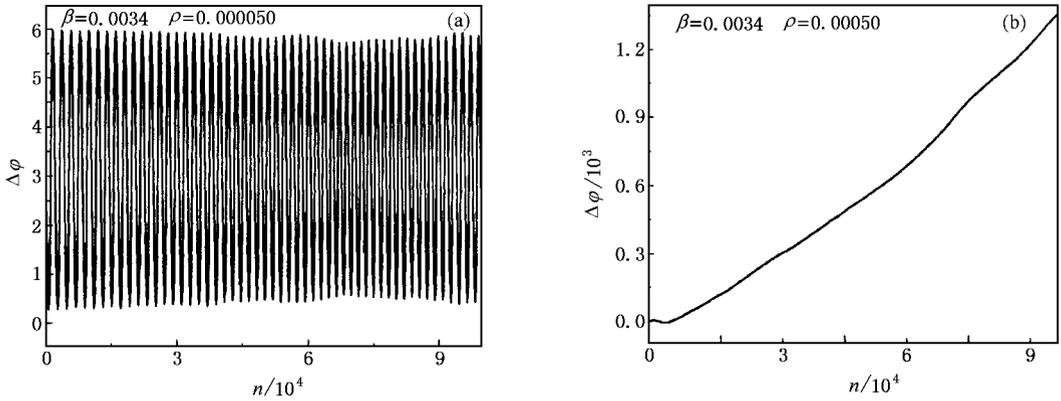


图 15 不同噪声强度下,耦合系统相锁定的变化 (a)  $\rho = 5 \times 10^{-5}$ , 耦合系统保持相锁定 (b)  $\rho = 5 \times 10^{-4}$ , 耦合系统失去相锁定

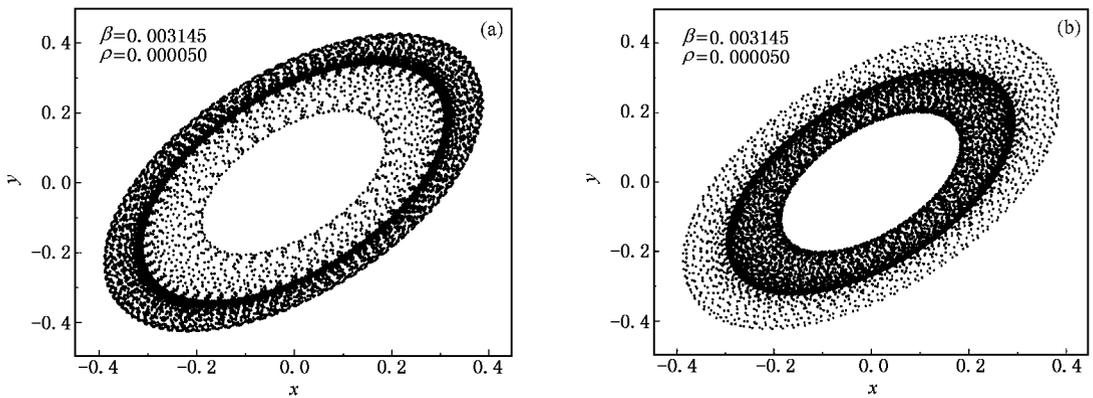


图 16 噪声对测度同步临界点前的影响 耦合强度  $\beta = 0.003145$  时,受  $\rho = 5.0 \times 10^{-5}$  的噪声影响,产生一个中间状态

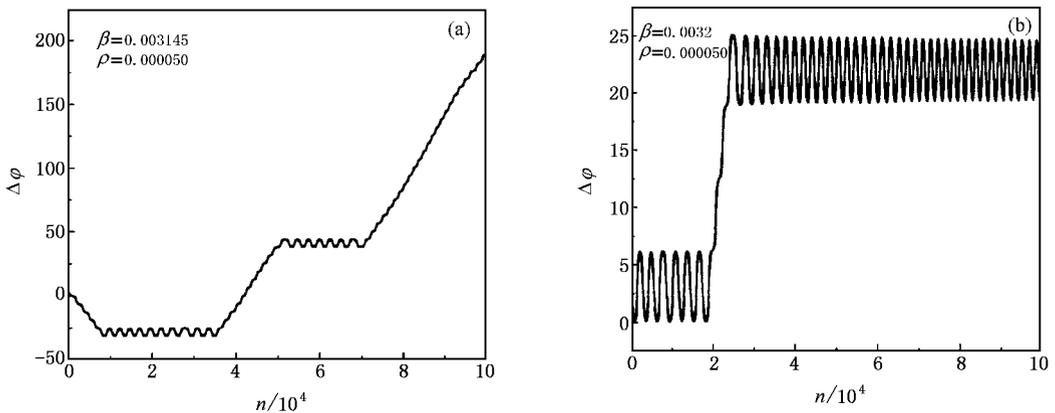


图 17 耦合系统的相位差受噪声的影响 (a) 测度同步前  $\beta = 0.003145$ , 且接近临界耦合强度 (b) 测度同步后且接近临界耦合强度,  $\beta = 0.0032$

## 6. 结论及讨论

本文对耦合哈密顿系统的测度同步性质作了较为深入的讨论. 弄清了规则系统测度同步前后系统相位的特征. 同时, 对混沌系统中测度同步的性质也作了分析. 由于混沌运动的影响, 转变到测度同步的突变现象需要很长的演化时间才能出现, 混沌同步过程中也不存在系统相位差的锁定, 相锁定现象只有在规则运动时的测度同步中发生. 因此, 混沌系统的测度同步临界点在判断上比规则运动系统要困难一些. 通过噪声的引入, 可以看到测度同步现象有一定的抗噪性.

耦合哈密顿系统的测度同步现象的发现为研究

保守系统提供了一个新的角度和思路, 使人们有了一种新的、简单的研究保守系统的方法. 从 Ott, Grebogi, Yorke (OGY)<sup>[17]</sup>等所做的混沌控制的开创性工作以来, 混沌控制方法得到了迅速的发展. 由于保守系统的特殊性, 在保守系统的混沌控制过程中不破坏系统的保守性是很困难的, 因此与耗散系统的控制方法相比较, 保守系统的混沌控制方法相对较少<sup>[18]</sup>. 利用测度同步的性质可以对保守系统的混沌进行控制<sup>[19]</sup>, 而且控制方法简单、实用、控制效果好, 为保守系统的混沌控制方法又提供了一种可行的控制方法. 因此, 深入地研究耦合哈密顿系统、特别是多体耦合哈密顿系统中测度同步的性质是十分必要的. 这也是我们下一步将要进行的工作.

- 
- [ 1 ] Hugenni C 1673 *Horoloquim Osillatorium* ( Parisis :Apud F. Muguet )
- [ 2 ] Pecora L M ,Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 3 ] Chen G R , Lü J H 2003 *Analysis ,Control and Synchronization of Dynamics in Group of Lorenz System* ( Beijing :Science Press ) p215 ( in Chinese ) [ 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)第 215 页 ]
- [ 4 ] Hampton A , Zanette D H 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2179
- [ 5 ] Chen S G 1992 *Map and Chaos* ( Beijing : Defense Industry Press ) p211 ( in Chinese ) [ 陈式刚 1992 映像与混沌(北京:国防工业出版社)第 211 页 ]
- [ 6 ] Liu J X , Chen G Z , Wang G R *et al* 1988 *Acta Phys. Sin.* **37** 119 ( in Chinese ) [ 刘军贤、陈光旨、王光瑞等 1988 物理学报 **37** 119 ]
- [ 7 ] Chirikov B V 1979 *Phys. Rep.* **52** 263
- [ 8 ] Greene J M 1979 *J. Math. Phys.* **20** 1183
- [ 9 ] Hu G , Xiao J H , Zheng Z G 2000 *Chaos Control* ( Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House ) p80 ( in Chinese ) [ 胡 岗、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制(上海:上海科技教育出版社)第 80 页 ]
- [ 10 ] Wang X G , Zhan M , Lai C H *et al* 2003 *Phys. Rev. E* **67** 66215
- [ 11 ] Rosenblum M G , Pikovsky A S , Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [ 12 ] Chen J Y , Wong Z X , Chen S C *et al* 2000 *Phys. Rev. E* **61** 2559
- [ 13 ] Lee K J , Kwak Y , Lim T K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 321
- [ 14 ] Fahy S , Hamann D R 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 761
- [ 15 ] Maritan A , Banavar J R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1451
- [ 16 ] Shraiman B , Wayne C E , Martin P C 1981 *Phys. Rev. Lett.* **46** 935
- [ 17 ] Ott E , Grebogi C , Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [ 18 ] Li W , Chen S G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1862 ( in Chinese ) [ 李伟、陈式刚 2001 物理学报 **50** 1862 ]
- [ 19 ] Wang X G , Zhang Y , Hu G 2002 *Phys. Lett. A* **298** 383

# Study on the measure synchronization in coupled Hamiltonian systems \*

Chen Shao-Ying<sup>1,2)</sup> Xu Hai-Bo<sup>3)</sup> Wang Guang-Rui<sup>3)</sup> Chen Shi-Gang<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>( Graduate School of China Academy of Engineering Physics , Beijing 100088 , China )

<sup>2)</sup>( Department of Physics , Hulunbiur College , Hailaer 021008 , China )

<sup>3)</sup>( Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China )

( Received 31 January 2004 ; revised manuscript received 12 April 2004 )

## Abstract

The phenomenon of measure synchronization is an important property in coupled Hamiltonian systems. In this paper , we investigate the measure synchronization in a chaotic system , and the regularity of phase difference is also discussed in the regular coupled systems and the chaotic coupled system. A new method is proposed for determining the critical coupled strength of transition to the measure synchronization. At the same time , we have studied the influence of Gaussian white noise on the measure synchronization. It is significant to investigate the conservative system using the property of measure synchronization.

**Keywords** : coupled Hamiltonian systems , measure synchronization , phase locking , white noise of Gauss

**PACC** : 0545

---

\* Project supported by the Special Foundation for State Major Basic Research Program of China ,the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10147201 ,10247003 ) , and the Innovation Funds for Laser Technology ( Grant No. 20030512 ).