第 53 卷 第 12 期 2004 年 12 月
1000-3290/2004/53(12)/4111-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.12,December,2004

一种新型混沌产生器*

禹思敏

(广东工业大学自动化学院,广州 510090)

(2004 年 2 月 25 日收到;2004 年 4 月 5 日收到修改稿)

通过构造一个转折点值 α 可变的三分段线性奇函数,研究一种新型混沌产生器.这种混沌产生器的主要特征是,随着转折点值 α 在 $0<\alpha\leqslant 1$ 范围内变化时,系统从倍周期分岔进入混沌状态,可产生双层单螺旋、单层单螺旋、双层双螺旋和单层双螺旋四种不同类型的混沌吸引子,其中双层单螺旋和双层双螺旋为本电路实验中所发现的两类新型混沌吸引子.分析了这种混沌产生器随 α 值在 $0<\alpha\leqslant 1$ 范围内变化时的分岔图、李雅普诺夫指数谱、最大李雅普诺夫指数 λ_{max} 以及单层双螺旋和双层双螺旋的功率谱.在此基础上设计硬件电路,进行了计算机模拟和电路实验,给出了实验结果.

关键词:混沌产生器,双层双螺旋,双层单螺旋,电路实验
PACC:0545

1.引　　言

在非线性电路中产生各种不同类型并适合保密通信的混沌与超混沌信号是近年来物理学和信息科学界所关注的一个热门课题,目前在国内外已取得了许多相关的研究成果,如三阶蔡氏电路、四阶变型蔡氏电路、四阶 MCK 超混沌电路、洛伦兹电路、多涡卷混沌与超混沌电路等[1—12].最近,美国学者 Sprott[13—15] 通过计算机穷举法,又提出了一类新的三阶混沌电路,其主要特征是能产生单层单螺旋、单层双螺旋混沌吸引子.

在蔡氏电路、四阶 MCK 超混沌电路以及 Sprott 所提出的一类混沌电路中[1,3,14,15],非线性函数 $f(x)$ 大多是采用转折点值和斜率值均为固定的分段线性函数.本文在文献[14,15]的基础上,通过构造一个转折点值 α 可变的三分段线性奇函数,研究了一种新型混沌产生器.其主要特点是,随着转折点值 α 在 $0<\alpha\leqslant 1$ 范围内变化时,电路从倍周期分岔进入混沌状态,可产生双层单螺旋、单层单螺旋、双层双螺旋和单层双螺旋四种不同类型的混沌吸引子,其中双层单螺旋和双层双螺旋是本实验中所发现的两类新型混沌吸引子.计算机模拟和硬件电路实验研究结果表明,这种混沌信号产生器易于电路实现和同步,电路参数调节范围较大,还可在实现多路信息加密混沌通信中获得应用.

2.电路的提出与分析

美国学者 Sprott 于 2000 年前后提出了一类能产生单层单螺旋、单层双螺旋混沌吸引子的电路,如图 1 所示.电路的状态方程可表示为[14,15]

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= y, \\ dy/d\tau &= z, \\ dz/d\tau &= -\beta z - y + f(x), \end{aligned} \tag{1}$$

式中 $\beta=0.6$.当 $f(x)=|x|-1$ 时,电路产生单层单螺旋混沌吸引子,当 $f(x)=\mathrm{sgn}(x)-x$ 时,可产生单层双螺旋混沌吸引子.

在文献[14,15]研究结果的基础上,构造一个转折点值 α 可变的三分段线性奇函数

$$\begin{aligned} f(x) &= -x+\frac{1}{2\alpha}(|x+\alpha|-|x-\alpha|) \\ &= \begin{cases} -x-1, & x<-\alpha, \\ (1-\alpha)x/\alpha, & -\alpha\leqslant x\leqslant\alpha, \\ -x+1, & x>\alpha, \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

式中 $f(x)$ 和 x 的单位均为 V.由(1),(2)式,可得用转折点值 α 可变的三分段线性奇函数构成的混沌

* 广东省自然科学基金(批准号:32469)和广州市科技计划项目(批准号:2004J1-C0291)资助的课题.

产生器如图 2 所示.图 2 中各元件参数为：$R_0 = 1$ kΩ，$R_a = 1.67$ kΩ，$R = 15$ kΩ，$C_0 = 33$ nF. R_b 为可调电阻，调节其大小可改变 $f(x)$ 的转折点值和斜率.子电路 N_1 为非线性函数 $g(x)$ 产生电路. $g(x)$ 与 $f(x)$ 的关系为 $f(x) = R_0 g(x)$，将在后面叙述. $f(x)$ 的伏安关系如图 3 所示，图中两侧区域直线段的斜率为固定值 $k = -1$，中间区域直线段的斜率为 $k = (1-\alpha)/\alpha$，它随 α 的改变而变化.图 3 中还示出了 α 分别为 0.00，0.25，0.50，0.75，1.00 时的情况，并用五个不同符号表示这些转折点的位置.

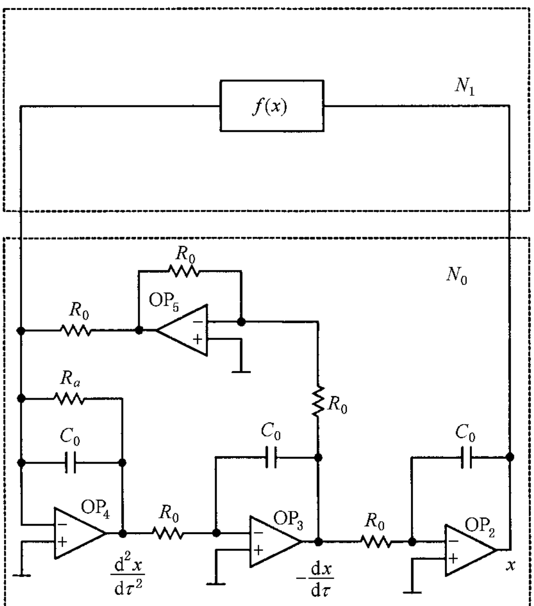

图 1 单层单螺旋、单层双螺旋混沌电路

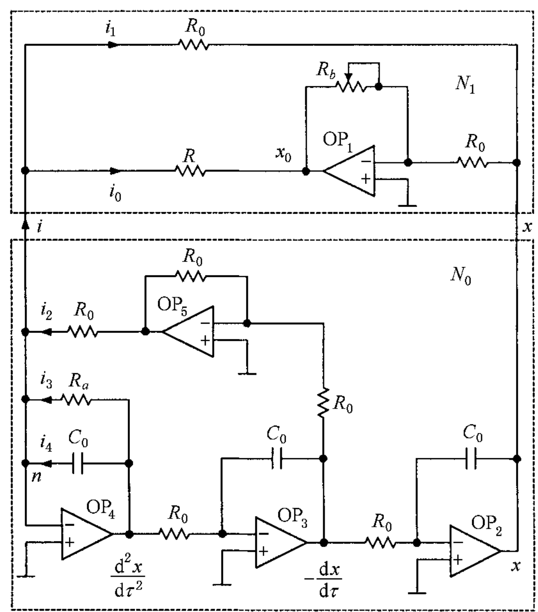

图 2 用 α 值可变的三分段线性奇函数构成混沌电路

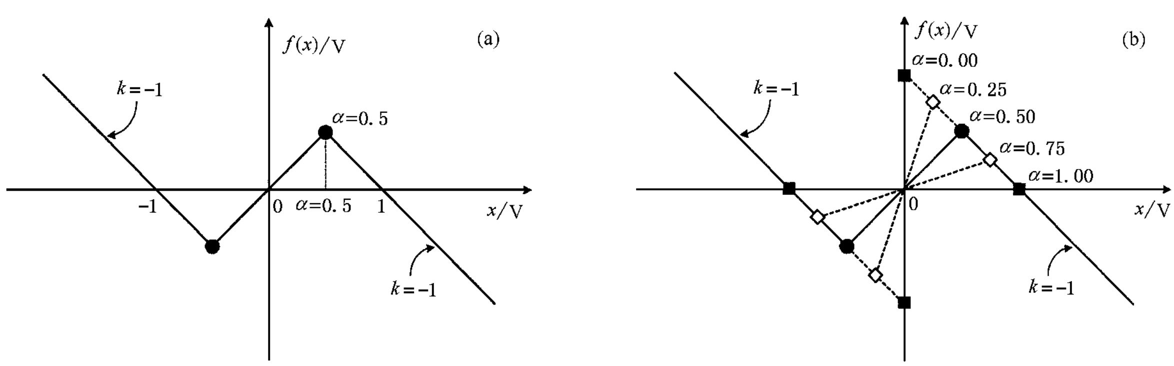

图 3 转折点值 α 可变的三分段线性奇函数 $f(x)$ (a) $\alpha = 0.5$ 时三分段线性奇函数 $f(x)$，(b) α 可变时三分段线性奇函数 $f(x)$

根据图 2，(1)式所示状态方程中的 $\tau = t/R_0C_0$，$1/R_0C_0$ 为时间尺度变换因子，固定 $R_0 = 1$ kΩ 不变，改变 C_0 的大小可改变时间尺度变换因子，从而可改变混沌信号的频谱范围.在电路实验中，取 $R_0 = 1$ kΩ，$c_0 = 33$ nF.图 2 中有源器件 OP_1—OP_5 均为运算放大器 TL082，电源供电电压为 ± 15 V，因此，所有运算放大器的电压饱和值 $V_{sat} \approx \pm 15$ V.

基于上述考虑，可设计产生非线性函数 $f(x)$ 的子电路 N_1 的各个参数.由图 2，当 OP_1 为线性状态时，输出电压 x_0 与输入电压 x 之间的关系为 $x_0 = -R_b x/R_0$，随着输入电压绝对值的增加，使 OP_1 进入饱和状态后，其输出电压为固定值 $V_{sat} = \pm 15$ V.综合以上两种情况，可得子电路 N_1 中关于 OP_1 输出电压 x_0 与输入电压 x 之间的关系为

$$x_0 = -\left[\mathrm{sgn}\left(x + \frac{R_0}{R_b} \mid V_{sat} \mid \right) \right.$$

$$
\begin{aligned}
&- \operatorname{sgn}\left(x - \frac{R_0}{R_b}|V_{sat}|\right)\Big] \frac{R_b}{R_0}\frac{x}{2} \\
&- \Big[\operatorname{sgn}\left(x + \frac{R_0}{R_b}|V_{sat}|\right) \\
&+ \operatorname{sgn}\left(x - \frac{R_0}{R_b}|V_{sat}|\right)\Big] \frac{|V_{sat}|}{2}
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{cases}
|V_{sat}|, & x < -\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|, \\
-\dfrac{R_b}{R_0}x, & -\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}| \leqslant x \leqslant +\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|, \\
-|V_{sat}|, & x > +\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|,
\end{cases}
\tag{3}
$$

式中 x_0 的单位为 V. 注意到 $V_{sat} = \pm 15$ V, $R = 15$ kΩ,以及理想运算放大器虚地概念和图中所示电流 i_0 的参考方向,进一步可得子电路 N_1 所示电流 i_0 为

$$
i_0 = -x_0/R
$$

$$
= \begin{cases}
-\dfrac{|V_{sat}|}{R}, & x < -\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|, \\
\dfrac{R_b}{R_0 R}x, & -\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}| \leqslant x \leqslant +\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|, \\
\dfrac{|V_{sat}|}{R}, & x > +\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|,
\end{cases}
$$

$$
= \begin{cases}
-1, & x < -\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|, \\
\dfrac{R_b}{R_0 R}x, & -\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}| \leqslant x \leqslant +\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|, \\
1, & x > +\dfrac{R_0}{R_b}|V_{sat}|,
\end{cases}
\tag{4}
$$

式中电流 i_0 的单位为 mA,由(4)式所得的伏安特性关系如图 4(a)所示.

另一方面,由于 $R_0 = 1$ kΩ,由图 2 中子电路 N_1 所示电流 i_1 的参考方向,我们有

$$
i_1 = -x/R_0 = -x(\mathrm{mA}), \tag{5}
$$

式中电流 i_1 的单位为 mA,其伏安关系如图 4(b)所示.

将图 4(a),(b)相加后,可得 $i = i_0 + i_1 = g(x)$ 的伏安关系如图 4(c)所示.由图 4(a),(b)相加的结果,可知图 4(c)中两侧区域直线段的斜率为固定值 $k = -1$. 此外,图 4(c)中 $g(x)$ 的零点正好位于 ± 1V,转折点值 $\alpha = \pm R_0|V_{sat}|/R_b$,调节电阻 R_b 的大小可改变转折点值 α 的大小.

图 4(d)示出了 $f(x) = R_0 g(x)$ 的函数关系,由于 $R_0 = 1$ kΩ(单位电阻),故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 两者的图形是相同的,但单位不同,$g(x)$ 的单位为 mA,而 $f(x)$ 的单位则为 V.

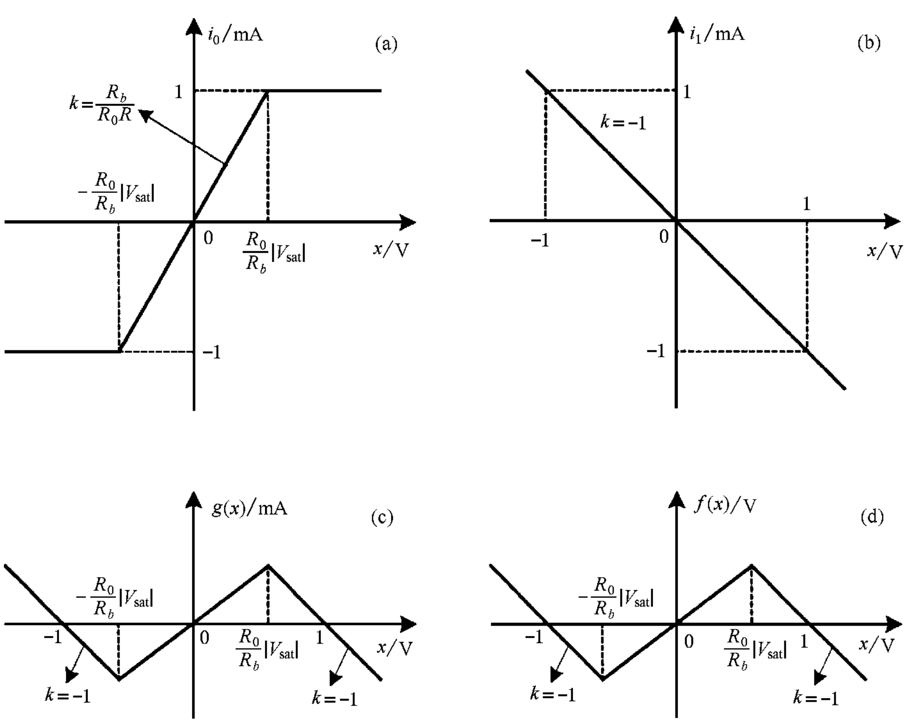

图 4　用子电路 N_1 产生 $f(x)$ 的形成过程　(a) i_0-x 伏安特性,(b) i_1-x 伏安特性,(c) $g(x)$-x 伏安特性,(d) $f(x)$-x 电压传输特性

根据电路理论中的节点分析法,并考虑到理想运算放大器输入端不取电流的情况,得到关于图 2 中 OP_4 反向输入端节点 n 的电流方程为

$$i_2 + i_3 + i_4 = i. \tag{6}$$

已知(6)式中的 $i = g(x)$,根据运算放大器虚地概念,可得其余各个电流的数学表达式如下:

$$\begin{aligned} i_2 &= (\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau)/R_0 \\ i_3 &= (\mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}\tau^2)/R_a, \\ i_4 &= C_0 d(\mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}\tau^2)/\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7}$$

在(6)式两边同时乘以单位电阻 R_0 后,由(6)和(7)式,我们有

$$\begin{aligned} & R_0 C_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2}\right) \\ &= -\frac{R_0}{R_a}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + f(x). \end{aligned} \tag{8}$$

(8)式中的 $R_0 = 1\ \mathrm{k\Omega}$,$R_a = 1.67\ \mathrm{k\Omega}$,$\beta = R_0/R_b = 0.6$. 注意到 $1/R_0 C_0$ 为图 2 中积分器的积分常数,同时也是时间尺度变换因子. 对(8)式作时间尺度变换 $t = R_0 C_0 \tau$,$\tau = t/R_0 C_0$,并将其转换成状态方程,最后可将(8)式化为(1)和(2)式.

3. 分岔图、李雅普诺夫指数和功率谱

根据(1)和(2)式,编写 MATLAB 程序进行数值计算,可得上述新型混沌产生器随转折点值 α 变化的分岔图、李雅普诺夫指数谱 λ_1,λ_2,λ_3 和最大李雅普诺夫指数 $\lambda_{\max}$ 以及单层双螺旋、双层双螺旋混沌吸引子的功率谱分别如图 5—图 7 所示. 在本文的计算中,分别采用了文献[16,17]所提供的方法来计算李雅普诺夫指数谱 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ 和最大李雅普诺夫指数 $\lambda_{\max}$. 由图 5 可知,随着转折点值 α 的变化,图 2 所示的混沌产生器通过倍周期分岔进入混沌状态. 根据图 6 所示的李雅普诺夫指数谱 λ_1,λ_2,λ_3 以及最大李雅普诺夫指数 $\lambda_{\max}$,可知当电路处于混沌状态时,它具有一个正的李雅普诺夫指数. 而图 7 则显示出了这类混沌信号典型的功率谱.

这种混沌产生器的一个主要特征是,随着 α 的变化,当进入混沌状态后,它可产生双层单螺旋、单层单螺旋、双层双螺旋、单层双螺旋四种不同类型的混沌吸引子. 由分岔图 5(a)可以看出,当 $0.55 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时进入倍周期分岔,$0 < \alpha < 0.55$ 为周期运动与混

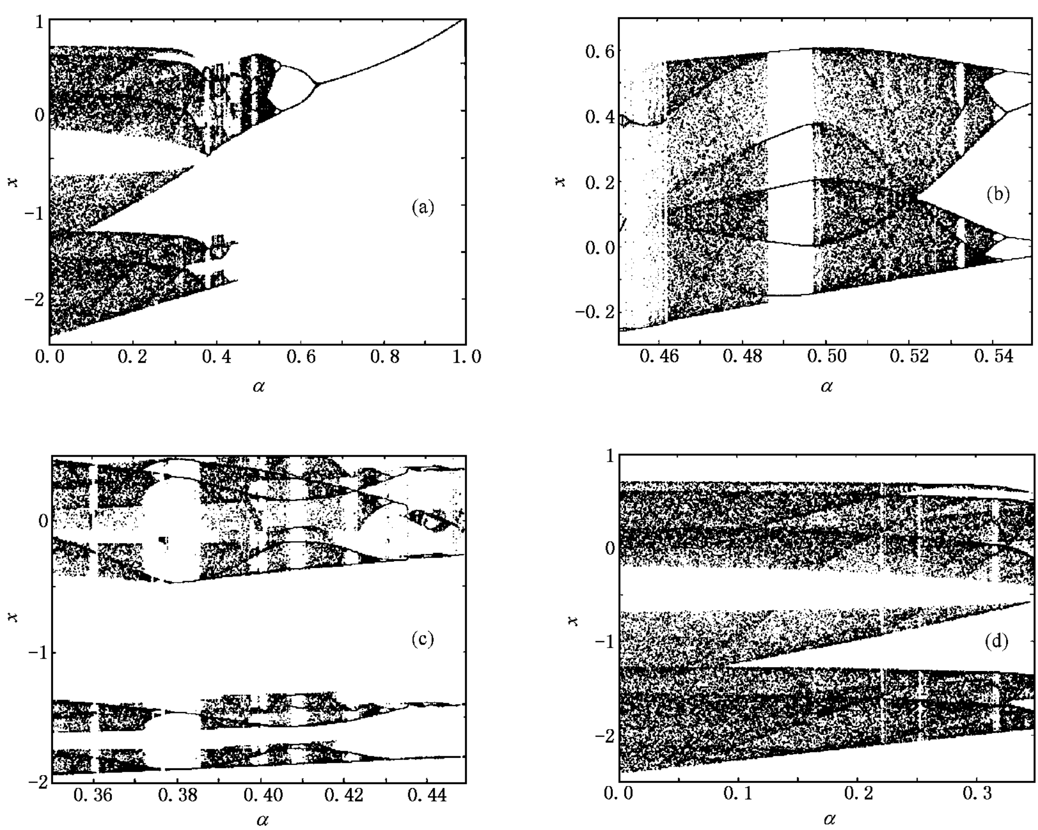

图 5 电路随转折点值 α 变化时的分岔图 (a)$0 < \alpha \leqslant 1$,(b)$0.45 \leqslant \alpha \leqslant 0.55$,(c)$0.35 \leqslant \alpha \leqslant 0.45$,(d)$0 < \alpha \leqslant 0.35$

沌运动交替出现的区域. 由分岔图 5(b)可以看出，在 $0.52<\alpha<0.54$ 的区域中存在双层单螺旋混沌吸引子，在 $0.465<\alpha<0.483$，$0.50<\alpha<0.52$ 的两个区域中存在单层单螺旋混沌吸引子. 由分岔图 5(c)大体可以看出，在 $\alpha_1=0.355$，$\alpha_2=0.365$，$\alpha_3=0.390$，$\alpha_4=0.415$ 四个点的邻近区域中存在双层双螺旋混沌吸引子. 分岔图 5(d)则示出了在 $0<\alpha<0.30$ 的区域内存在单层双螺旋混沌吸引子.

$f(x)$可由图 2 中的子电路 N_1 产生. 调节 N_1 中 R_b 的大小可改变 α 的值，由前述分析可知，它们之间的关系为 $\alpha=R_0|V_{\mathrm{sat}}|/R_b$. 电路实验研究表明，通过改变 R_b 的大小，当满足 27 kΩ < R_b < 30 kΩ 时，产生双层单螺旋混沌吸引子；当满足 30 kΩ < R_b < 32 kΩ 时，产生单层单螺旋混沌吸引子；当满足 36 kΩ < R_b < 42 kΩ 时，产生双层双螺旋混沌吸引子；当满足 50 kΩ < R_b < ∞ 时，产生单层双螺旋混沌吸引子. 特别是当 $R_b\to\infty$ 时，$\alpha\to0$，Sprott 所提出的产生单层双螺旋混沌吸引子可视为这一情况的特例[14,15].

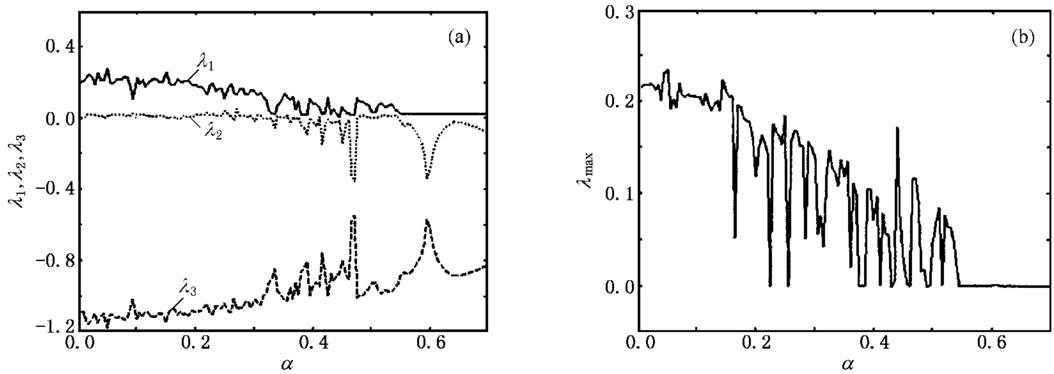

图 6　李雅普诺夫指数谱 λ_1，λ_2，λ_3(a)和最大李雅普诺夫指数 $\lambda_{\max}$(b)

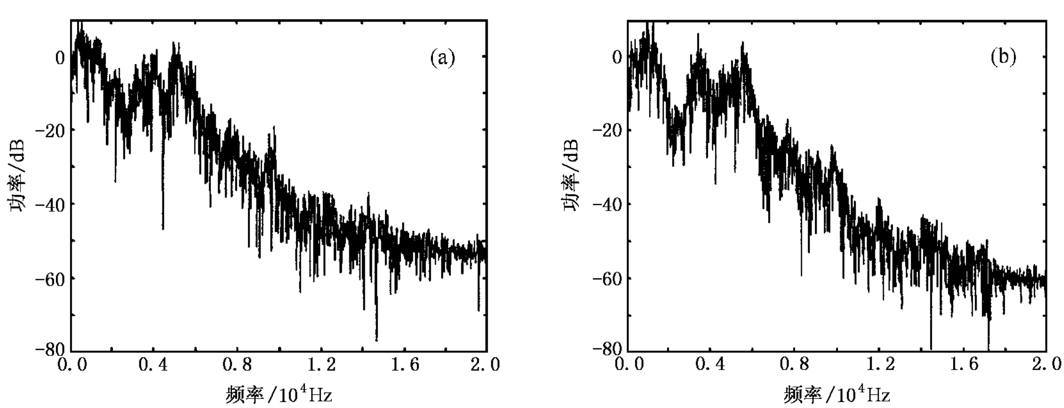

图 7　单层双螺旋、双层双螺旋混沌吸引子的功率谱　(a)单层双螺旋功率谱，(b)双层双螺旋功率谱

4. 计算机数值模拟结果

根据(1)和(2)式，可利用 MATLAB 程序进行数值计算来获取这类混沌吸引子的相图. 为了能准确地显示出混沌吸引子的相图，我们设置求解微分方程指令 ode45 的精度为 10^{-6}，并舍去所得数据的前面一半，由后半部分的数据得出混沌吸引子的相图，计算机模拟结果分别如图8—图11所示. 其中选取转折点值 $\alpha=0.53$，产生双层单螺旋混沌吸引子，如图 8 所示，最大李雅普诺夫指数为 $\lambda_{\max}=0.0451$ 选取转折点值 $\alpha=0.52$，产生单层单螺旋混沌吸引子，如图 9 所示，最大李雅普诺夫指数为 $\lambda_{\max}=0.0761$；选取转折点值 $\alpha=0.39$，产生双层双螺旋混沌吸引子，如图 10 所示，最大李雅普诺夫指数为 $\lambda_{\max}=0.1038$ 选取转折点值 $\alpha=0.3$，产生单层双螺旋混沌吸引子，如图 11 所示，最大李雅普诺夫指数为 $\lambda_{\max}=0.1386$.

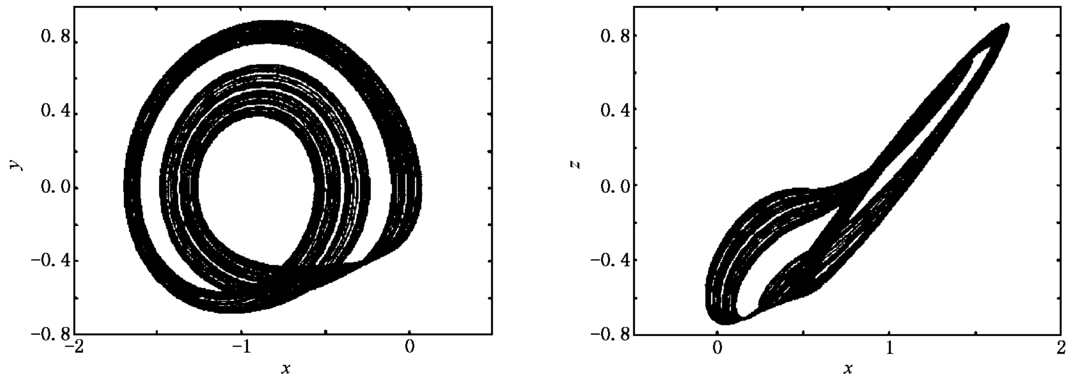

图 8 双层单螺旋混沌吸引子($\alpha = 0.53$，$\lambda_{\max} = 0.0451$)

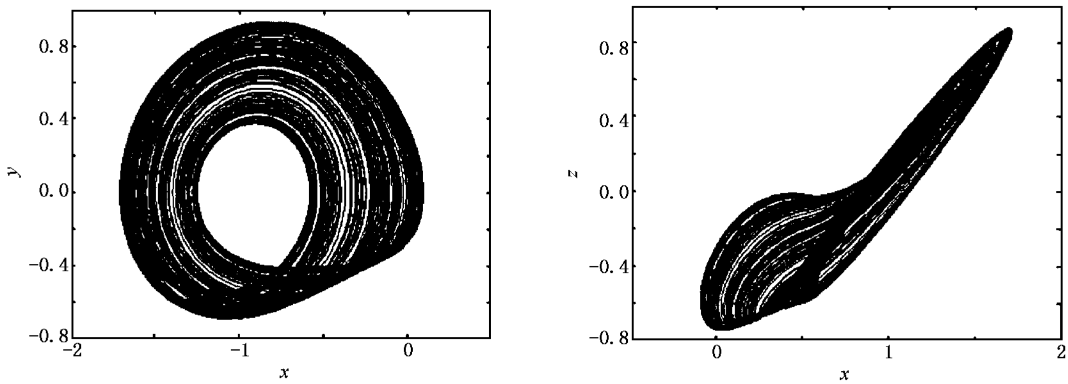

图 9 单层单螺旋混沌吸引子($\alpha = 0.52$，$\lambda_{\max} = 0.0761$)

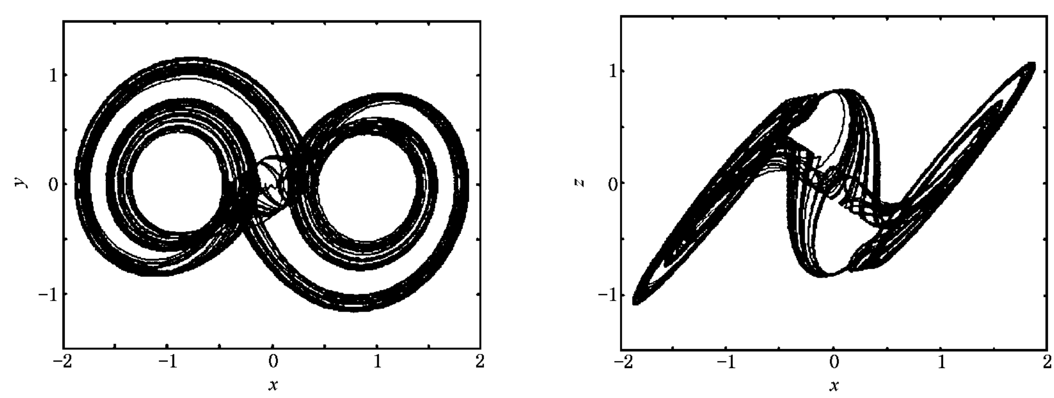

图 10 双层双螺旋混沌吸引子($\alpha = 0.39$，$\lambda_{\max} = 0.1038$)

5.硬件电路实验结果

根据图 2 设计硬件电路，电路实验结果如图 12—图 15 所示. 调节图 2 子电路 N_1 中的电阻 R_b，从而可改变转折点值 α 的大小. 当满足 $27\ \mathrm{k\Omega} < R_b < 30\ \mathrm{k\Omega}$时，产生双层单螺旋混沌吸引子，如图 12 所示；当满足 $30\ \mathrm{k\Omega} < R_b < 32\ \mathrm{k\Omega}$ 时，产生单层单螺旋混沌吸引子，如图 13 所示；当满足 $36\ \mathrm{k\Omega} < R_b < 42\ \mathrm{k\Omega}$ 时，产生双层双螺旋混沌吸引子，如图 14 所示；当满足$50\ \mathrm{k\Omega} < R_b < \infty$ 时，产生单层双螺旋混沌吸引子，如图 15 所示. 将计算机模拟和电路实验结果进行对比，两者所得的结果是完全相符的.

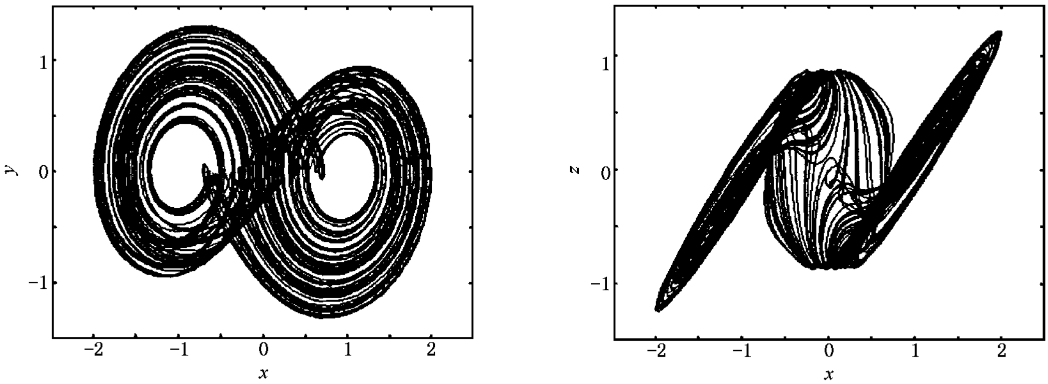

图 11　单层双螺旋混沌吸引子($\alpha = 0.3$，$\lambda_{\max} = 0.1386$)

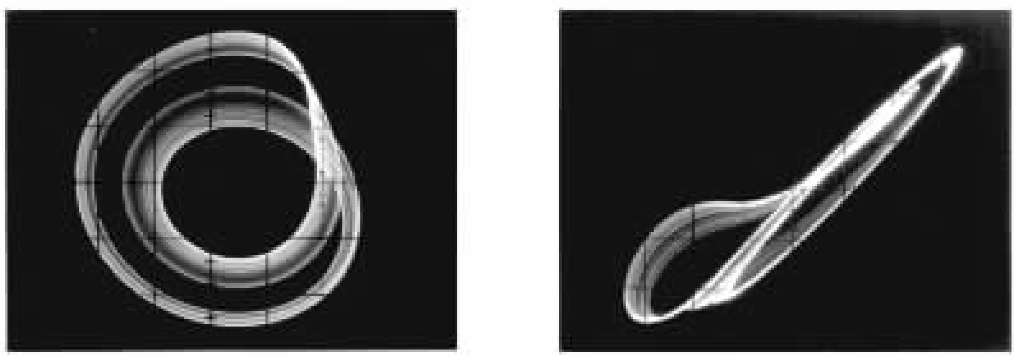

图 12　双层单螺旋混沌吸引子电路实验结果($27\ \mathrm{k}\Omega < R_b < 30\ \mathrm{k}\Omega$)

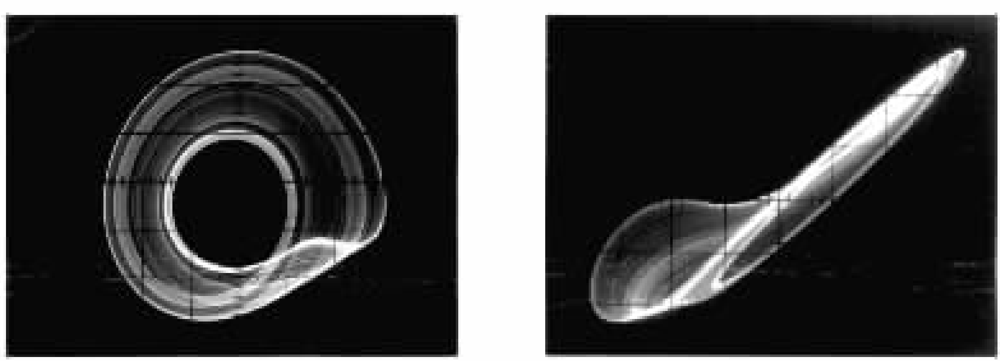

图 13　单层单螺旋混沌吸引子电路实验结果($30\ \mathrm{k}\Omega < R_b < 32\ \mathrm{k}\Omega$)

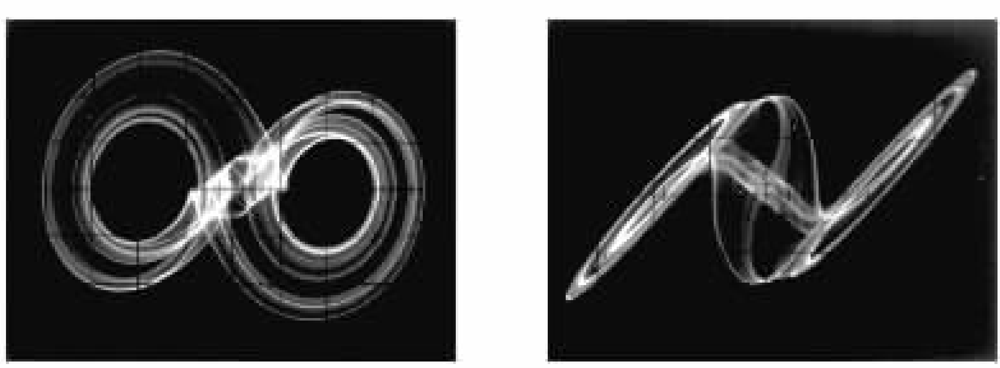

图 14　双层双螺旋混沌吸引子电路实验结果($36\ \mathrm{k}\Omega < R_b < 42\ \mathrm{k}\Omega$)

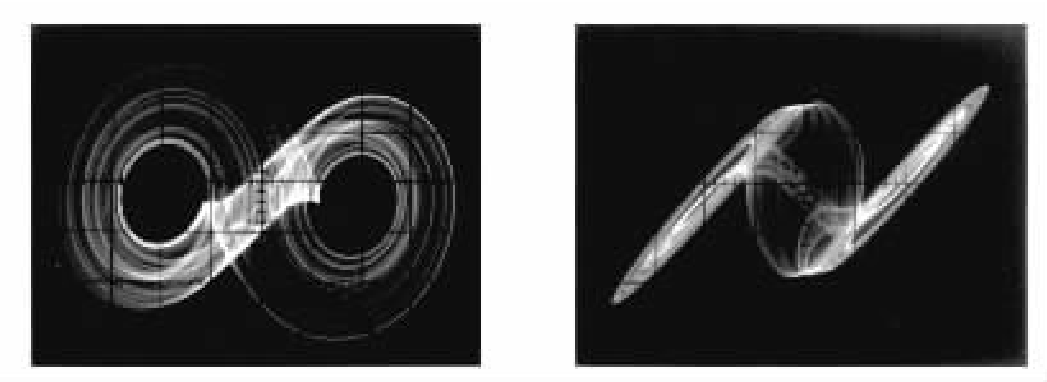

图 15 单层双螺旋混沌吸引子电路实验结果($50\ \mathrm{k}\Omega < R_b < \infty$)

6.结 论

研究了一种新型混沌产生器,它与 Sprott 所提出的混沌电路相比,主要不同之处在于,这种新型混沌产生器是通过构造一个转折点值 α 可变的三分段线性奇函数 $f(x)$ 来产生混沌的.这种混沌产生器的主要特征,是随着转折点 α 在 $0 < \alpha \leqslant 1$ 的范围内变化时,电路的状态从倍周期分岔进入混沌,可产生双层单螺旋、单层单螺旋、双层双螺旋和单层双螺旋四种不同类型的混沌吸引子,其中双层单螺旋和双层双螺旋为本实验所发现的两类新型混沌吸引子.在此基础上,我们还进一步研究了这种新型混沌电路随转折点值 α 变化时的分岔图、李雅普诺夫指数谱、最大李雅普诺夫指数 λ_{max} 以及单层双螺旋和双层双螺旋的功率谱.当电路处于混沌状态时,它具有一个正的李雅普诺夫指数.本文还给出了双层单螺旋、单层单螺旋、双层双螺旋和单层双螺旋这四种不同类型混沌吸引子相图的计算机模拟和硬件电路实验结果.两者结果是完全相符的,由此证实了该方法的可行性.进一步的研究结果还表明,这种混沌产生器易于电路实现和同步,电路参数调节范围较大,可在实现多路信息加密混沌通信中获得应用.

[1] Matsumoto T, Chua L O, Komuro M 1985 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **32** 798

[2] Yin Y Z 1997 *Int*. *J*. *Bifurc*. *Chaos* **7** 1401

[3] Matsumoto T, Chua L O, Kobayashi K 1986 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **33** 1143

[4] Cuomo K M, Oppenheim A V, Strogatz S H *et al* 1993 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅱ **40** 626

[5] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J 2000 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **47** 425

[6] Tang W K S, Zhong G Q, Chen G *et al* 2001 *IEEE Trans*. *CAS*-Ⅰ **48** 1369

[7] Li J F, Li N 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 1124

[8] Liu C X 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1198 (in Chinese) [刘崇新 2002 物理学报 **51** 1198]

[9] Chen J F, Cheng L, Liu Y *et al* 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 18 (in Chinese) [陈菊芳、程 丽、刘 颖等 2003 物理学报 **52** 18]

[10] Kuang J Y, Deng K, Huang R G 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1856 (in Chinese) [匡锦瑜、邓 昆、黄荣怀等 2001 物理学报 **50** 1856]

[11] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 25 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25]

[12] Yu S M, Qiu S S, Lin Q H 2003 *Sci*. *Chin*. F **46** 104

[13] Sprott J C 1994 *Phys*. *Rev*. E **50** R647

[14] Sprott J C 2000 *Amer*. *J*. *Phys*. **68** 758

[15] Sprott J C 2000 *Phys*. *Lett*. A **266** 19

[16] Wolf A, Swift J B, Swinney H L *et al* 1985 *Physica* D **16** 285

[17] Benettin G 1976 *Phys*. *Rev*. A **14** 2338

A new type of chaotic generator*

Yu Si-Min

(*College of Automation*, *Guangdong University of Technology*, *Guangzhou* 510090, *China*)

(Received 25 February 2004; revised manuscript received 5 April 2004)

Abstract

A new type of chaotic generator is studied by constructing a three-segment piecewise-linear odd function with variable breakpoint α. The characteristic of the chaotic generator presented is that when the breakpoint α varies in the range of $0 < \alpha \leqslant 1$, there is a route to chaos through period-doubling bifurcations, and the double-layer single spiral, single-layer single spiral, double-layer double spiral and single-layer double spiral chaotic attractors can be generated. In particular, the double-layer single spiral and double-layer double spiral are found in our circuit experiment for the first time so far as we know. The bifurcation diagram, Lyapunov exponents λ_1, λ_2, λ_3, maximal Lyapunov exponent λ_{max} and the spectrum of the single-layer double spiral and double-layer double spiral are also investigated. The associated electronic circuit is designed and the experimental result is given, which is verified by computer simulation and circuit experiment.

Keywords: chaotic generator, double-layer double spiral, double-layer single spiral, circuit experiment

PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 32469) and the Science and Technology Program of Guangzhou, China (Grant No. 2004J1-C0291).