

# 同调谐振子谱空间上的对称性和参量双粒子模型

李文博 李克轩 李 焯 李宓善 李亚玲 温晓阳 袁广军

(北京交通大学物理系, 北京 100044)

(2003 年 6 月 10 日收到 2004 年 4 月 6 日收到修改稿)

研究了同调谐振子谱空间上的对称性, 通过适当的参量代换给出形象的图示. 得到归一化的本征函数解析表达式, 并证明了线性谐振子是同调谐振子的退化. 揭示出同调谐振子是参量双粒子模型, 并给出该模型的相干态, 该相干态自动包含用 Glauber 相干态构造的奇、偶相干态.

关键词: 同调谐振子, 赝角动量方法, 本征值谱, 本征函数, 参量双光子模型

PACC: 4250, 0365

## 1. 同调谐振子谱空间上的对称性

我们在文献 [1] 中首先介绍从一类含时振子<sup>[2]</sup>中分离出方程

$$H\psi(x) = E\psi(x),$$
$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{g}{x^2} \right), \quad E > 0, \quad g \geq -\frac{1}{4}. \quad (1)$$

然后提出赝角动量方法, 并用来求解方程(1), 得到谱结构和本征函数的解析表达式, 确定了同调参量  $g$  的范围, 给出同调谐振子的能谱随同调参量  $g$  的变化关系(如图 1 所示), 澄清以往文献<sup>[3-5]</sup>中的不妥和不周, 也涉及到同调谐振子势函数的一般构造.

文献 [1] 显示了赝角动量方法的周密和有效. 我们在文献 [6] 中提出同调谐振子的变形规则并给出同调谐振子的若干形变, 包括球坐标开普勒问题的径向方程、抛物线坐标下的开普勒问题、三维各向同性谐振子的径向方程、Morse 势  $s$  态问题、新的势函数的构造, 显示了同调谐振子的普适性和代表性, 也看出了作为  $SU(1, 1)$  代数的赝角动量方法的灵活性. 许多文献<sup>[7-12]</sup>研究了同调谐振子模型所描写的光场量子统计的非经典特性, 显示了同调谐振子的重要性. 我们注意到, 文献 [13] 把同调谐振子作为  $SU(1, 1)$  群的一个举例解决同调谐振子的本征值问题, 并给出相应的相干态. 但是文献 [13] 的结果只有图 1 虚线所示的部分, 存在着与文献 [3-5] 相同的问题.

本文将进一步揭示同调谐振子谱空间上的对称

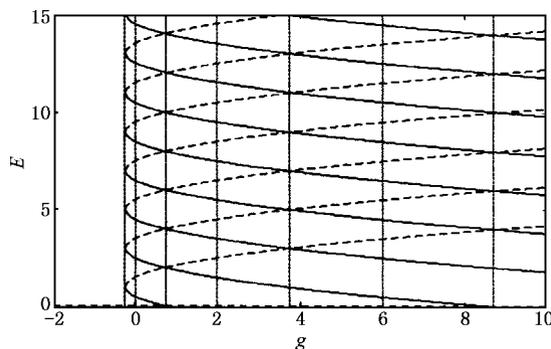


图 1  $g$  与  $E$  的关系

性. 我们在文献 [1] 中已经给出与图 1 对应的关系式

$$E_n^+ = (2n + 1) + \sqrt{g + 1/4},$$
$$E_{mm}^- = \chi(m + n) + 1 - \sqrt{g + 1/4},$$
$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad (2)$$
$$-1/4 \leq g < 3/4, \quad m = 0,$$
$$(2m - 1)^2 - 1/4 \leq g < (2m + 1)^2 - 1/4,$$
$$m = 1, 2, \dots$$

我们重新给出参量  $g$  为

$$g = l^2 - 1/4, \quad (3)$$

其中  $l$  为连续实变量, 暂时先取  $l \geq 0$  以使得  $l$  与  $g$  具有单值关系. 事实上取  $-\infty < l < \infty$  是可以的, 后面将会讨论这种情况. 本征值谱可以表示成

$$E_n^+ = (2n + 1) + l,$$
$$E_{mm}^- = \chi(m + n) + 1 - l,$$
$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad l \geq 0;$$

$$\begin{aligned} |2m - 1/2| - 1/2 \leq g < 2m + 1, \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

如图 2 所示, 应当指出 (1)(2) 和 (4) 式中的不等式不含等号(下面还会遇到这样的问题). 这个问题将在后面予以解答. 图 2 显示, 当  $l = 1/2$  时, 问题便归于一维线性谐振子. 注意到将图 2 的虚斜线延长到  $l < 0$  范围, 再以  $l = 0$  为对称折叠回到右边, 恰得实斜线部分, 如图 3 所示.

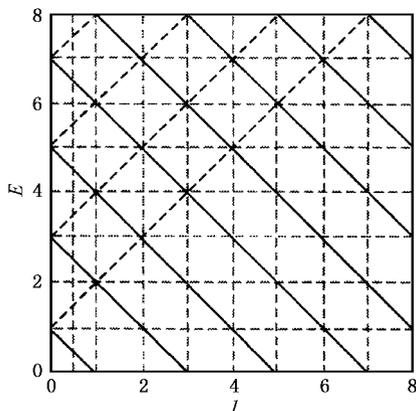


图 2  $|l|$  与  $E$  的关系

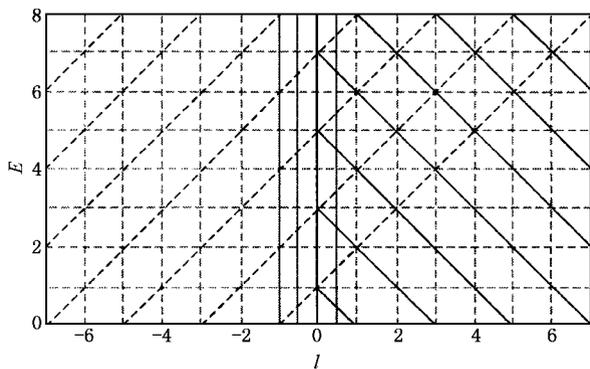


图 3  $|l|$  与  $E$  关系的折叠

## 2. 算符体系和本征态的递推

作为  $SU(1, 1)$  代数一种表示的赝角动量方法, 自然要涉及到一整套算符体系. 我们构造了三个赝角动量分量并定义了赝角动量平方算符

$$A_3 = \frac{1}{2} H,$$

$$A_1 = i \left( A_3 - \frac{1}{2} x^2 \right),$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{d}{dx} x + x \frac{d}{dx} \right),$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \quad (5)$$

其中  $H$  是方程 (1) 中的 Hamiltonian 算符, 文献 [1] 已经证明如下的对易关系:

$$[A_1, A_2] = iA_3,$$

$$[A_2, A_3] = iA_1,$$

$$[A_3, A_1] = iA_2,$$

$$[A^2, A_k] = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

进一步定义升降算符

$$A \equiv -iA_1 - A_2,$$

$$A^+ \equiv -iA_1 + A_2, \quad (7)$$

$$[A, A^+] = H.$$

可以写出

$$A = A_3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} x, \quad (8)$$

$$A^+ = A_3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \frac{d}{dx}.$$

还可以证明

$$A = -\frac{1}{2} b_{-(l-1/2)} b_{l-1/2}, \quad (9)$$

$$A^+ = -\frac{1}{2} b_{-(l+1/2)}^+ b_{l+1/2}^+;$$

$$b_{l+1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{l+1/2}{x} + \frac{d}{dx} \right)$$

$$= a - \frac{l+1/2}{\sqrt{2}x}$$

$$= x^{l+1/2} a x^{-(l+1/2)},$$

$$b_{l+1/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{l+1/2}{x} - \frac{d}{dx} \right)$$

$$= a^+ - \frac{l+1/2}{\sqrt{2}x}$$

$$= x^{-(l+1/2)} a^+ x^{l+1/2},$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{d}{dx} \right),$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{d}{dx} \right);$$

$$H = b_{l+1/2}^+ b_{l+1/2} + l + 1$$

$$= b_{l-1/2}^+ b_{l-1/2} + l - 1. \quad (11)$$

(9)–(11) 式已经在文献 [1] [6] 中用过, 但是与本文的形式略有不同, 本文后面还要用到, 并将探讨它们的物理意义.

方程 (1) 的求解将归于等价方程

$$\begin{aligned}
A_3 \psi(x) &= \lambda \psi(x), \\
A^2 \psi(x) &= \Lambda \psi(x), \\
\lambda &= E/2 > 0, \\
\Lambda &= \frac{1}{4} \left( g - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4} (l^2 - 1).
\end{aligned} \tag{12}$$

还可以证明

$$\begin{aligned}
AA^+ &= A_3(A_3 + 1) - A^2, \\
A^+A &= A_3(A_3 - 1) - A^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

于是有与(1)和(12)式等价的方程

$$\begin{aligned}
AA^+ \psi(x) &= [\lambda(\lambda + 1) - \Lambda] \psi(x), \\
A^+A \psi(x) &= [\lambda(\lambda - 1) - \Lambda] \psi(x).
\end{aligned} \tag{14}$$

由此容易证明

$$\begin{aligned}
A\psi_\lambda(x) &= a_n^- \psi_{\lambda-1}(x), \\
A^+ \psi_\lambda(x) &= a_n^+ \psi_{\lambda+1}(x).
\end{aligned} \tag{15}$$

为了保证  $\psi_\lambda(x)$  和  $\psi_{\lambda\pm 1}(x)$  都是归一化的,我们配上了两个待定的实常数  $a_n^\pm$ . (15)式显示,本征值  $\lambda$  是逐一变化的,即

$$\lambda_n = n + \lambda_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \lambda_0 > 0. \tag{16}$$

由于  $\lambda > 0$ , 这里已经设  $\lambda_0$  为  $\lambda$  的下限,自然仍有  $\lambda_0 > 0$ .

问题归于求出本征值的下限  $\lambda_0$  和属于  $\lambda_0$  的本征函数  $\psi_0(x)$ . 显然有

$$A\psi_0(x) = 0. \tag{17}$$

(17)式等号右端恒为零表示不存在的状态,  $\psi_0(x)$  不恒为零. 将(17)式等号左端乘以  $A^+$  仍为零,即

$$A^+A\psi_0(x) = 0.$$

将(14)式的第二式中的  $\lambda$  换为  $\lambda_0$ , 将  $\lambda(x)$  换为  $\psi_0(x)$ , 即得

$$\begin{aligned}
[\lambda_0(\lambda_0 - 1) - \Lambda] \psi_0(x) &= 0, \\
\Lambda &= (l^2 - 1)/4.
\end{aligned} \tag{18}$$

由于  $\psi_0(x)$  不恒为零, 此式成立的必要条件是

$$\begin{aligned}
\lambda_0(\lambda_0 - 1) - \Lambda &= 0, \\
2\lambda_0 &= \begin{cases} l + 1 & (l > -1), \\ l - 1 & (l > 1). \end{cases}
\end{aligned} \tag{19}$$

由此所得的能谱便是(4)式.

将(19)式代入(14)式并考虑到(16)式以及  $E_0 = 2\lambda_0$ , 整理后得到

$$\begin{aligned}
AA^+ \psi_n(x) &= (n + 1)(n + E_0) \psi_n(x), \\
A^+A \psi_n(x) &= n(n + E_0 - 1) \psi_n(x),
\end{aligned} \tag{20}$$

其中  $E_0 = 2\lambda_0$  可由(4)式取  $n = 0$  给出

$$\begin{aligned}
E_0^+ &= l + 1, \\
E_{0m}^- &= 2m + 1 - l, \\
n &= 0, 1, 2, \dots, \quad l \geq 0, \\
|2m - 1/2| - 1/2 &\leq g < 2m + 1, \\
m &= 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{21}$$

同时将(15)式写成

$$\begin{aligned}
A\psi_n(x) &= a_n^- \psi_{n-1}(x), \\
A^+ \psi_n(x) &= a_n^+ \psi_{n+1}(x).
\end{aligned} \tag{22}$$

为了确定常数  $a_n^-$  和  $a_n^+$ , 将(22)式的第二式等号两端左乘以  $\psi_n^*(x)$  再积分之,

$$\begin{aligned}
\int \psi_n^* A^+ a_n^- \psi_{n-1} dx &= n(n + E_0 - 1) \int |\psi_n|^2 dx, \\
a_n^- \int [A\psi_n]^* \psi_{n-1} dx &= |a_n^-|^2 \int \psi_{n-1}^* \psi_{n-1} dx \\
&= n(n + E_0 - 1), \\
|a_n^-|^2 &= n(n + E_0 - 1).
\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
a_n^- &= \sqrt{n(n + E_0 - 1)}, \\
a_n^+ &= \sqrt{(n + 1)(n + E_0)}, \\
A\psi_n &= \sqrt{n(n + E_0 - 1)} \psi_{n-1}, \\
A^+ \psi_n &= \sqrt{(n + 1)(n + E_0)} \psi_{n+1}.
\end{aligned} \tag{23}$$

关于  $a_n^+$  的计算这里不再赘述.

### 3. 归一化的本征函数集

我们计算本征函数集合主要是为了进行能谱分析. 将(8)式中的第一式代入方程(17), 并考虑到  $A_3 \psi_0 = \lambda_0 \psi_0$  和  $E_0 = 2\lambda_0$ , 得到

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= N_0 x^{E_0-1/2} e^{-x^2/2}, \\
N_0 &= [\Gamma(E_0)]^{1/2}, \quad E_0 > 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

这里已经计算出归一化常数  $N_0$ ,  $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$  是  $\Gamma$  函数,  $\Gamma$  函数要求  $s > 0$ . 这里的不等式  $E_0 > 0$  正是  $\Gamma$  函数所要求的. 这是因为当  $s \rightarrow +0$  时,  $\Gamma(s) \rightarrow \infty$ , 因此要求  $s > 0$ . 我们在方程(1)中就已经写成  $E > 0$ , 而不是  $E \geq 0$ . 本文中不加等号的不等式基本上都源于此, 后面还要遇到这样的问题. 为了分析方便, 暂时将  $l$  的区间表示成

$$\begin{aligned}
l &= 2m + 1 + 2\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots; \\
l &= 1 - 2\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1/2, \quad m = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

相应的能谱表示成

$$E_{n\alpha}^- = 2n + 2\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1/2,$$

$$\begin{aligned}
 E_{n0}^+ &= 2n + 2\alpha, & 1/2 < \alpha \leq 1, & m = 0; \\
 E_{nm}^- &= 2n + \chi(m + 1 - \alpha), \\
 E_{nm}^+ &= 2n + 2\alpha, & 0 < \alpha \leq 1, \\
 & m = 1, 2, 3, \dots, n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{26}$$

将 (26) 式取  $n = 0$  可以提供四类  $E_0$ , 它们分别是

$$\begin{aligned}
 E_{00}^- &= 2\alpha, & 0 < \alpha \leq 1/2; \\
 E_{00}^+ &= 2\alpha, & 1/2 < \alpha \leq 1, m = 0; \\
 E_{0m}^- &= \chi(m + 1 - \alpha), \\
 E_{0m}^+ &= 2\alpha, & 0 < \alpha \leq 1, m = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{27}$$

将它们分别代入 (24) 式可以得到四类基态函数

$$\begin{aligned}
 \psi_{00}^-(x) &= N_{00}^- x^{2\alpha-1/2} e^{-x^2/2}, \\
 N_{00}^- &= [\Gamma(2\alpha)]^{1/2}, & 0 < \alpha \leq 1/2, 0 \leq l < 1;
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{00}^+(x) &= N_{00}^+ x^{2\alpha-1/2} e^{-x^2/2}, \\
 N_{00}^+ &= [\Gamma(2\alpha)]^{1/2}, & 1/2 < \alpha \leq 1, 0 \leq l < 1;
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{0m}^-(x) &= N_{0m}^- x^{2\alpha-1/2} e^{-x^2/2}, \\
 N_{0m}^- &= [\Gamma(2\alpha)]^{1/2}, & 2\alpha > 0, l < 2m + 1;
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{0m}^+(x) &= N_{0m}^+ x^{2m+3/2-2\alpha} e^{-x^2/2}, \\
 N_{0m}^+ &= [\Gamma(2m + 2 - 2\alpha)]^{1/2}, \\
 & \chi(m + 1 - \alpha) > 0, l + 1 > 0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

从 (28) 到 (31) 式都标出了参量  $l$  的取值范围, 新引入的参量  $\alpha$  在各个区间内变化. 特别指出 (28) (29) 和 (30) 三式是完全一样的, 在  $l \geq 0$  情况下 (28) 和 (29) 式都在  $l$  的同一区间, 但是  $\alpha$  的变化方向有一点差别. 如果把参量  $l$  的取值范围拓展到  $-\infty < l < \infty$  (28) 和 (29) 式就可以合写成

$$\begin{aligned}
 \psi_{00}(x) &= N_{00} x^{2\alpha-1/2} e^{-x^2/2}, \\
 N_{00} &= [\Gamma(2\alpha)]^{1/2}, & 0 < \alpha \leq 1, -1 < l \leq 1.
 \end{aligned} \tag{32}$$

为了与 (32) 式一致, 仍将  $l$  的取值范围拓展到  $-\infty < l < \infty$ , 便得到 (30) 式与 (32) 式完全一致的形式, 只是  $l$  的区间不同,

$$\begin{aligned}
 \psi_{0m}(x) &= N_{0m} x^{2\alpha-1/2} e^{-x^2/2}, \\
 N_{0m} &= [\Gamma(2\alpha)]^{1/2}, \\
 0 < \alpha \leq 1, & 2m - 1 < l \leq 2m + 1.
 \end{aligned} \tag{33}$$

事实上 (33) 式包括了 (32) 式, 当  $m = 0$  时 (33) 式就变成了 (32) 式. 图 4 是拓展到  $-\infty < l < \infty$  情况, 事实上, 我们是把图 3 斜率为负的右边的斜线整个地翻到左边. (33) 式讨论的区间是  $(-1, 1], (-3, -1], (-5, -3], \dots$  等区间的情况. 然而这些区间上的态函数都与  $m$  无关, 是完全一样的, 即在  $l \leq -1$  的各个区间上不提供新的信息. 因此, 只要考虑区间  $(-1, 1]$  就可以了, 我们此后可以不再考虑  $l \leq -1$  情况, 如图 5 所示. 图 5 也给出了激发态的情况.

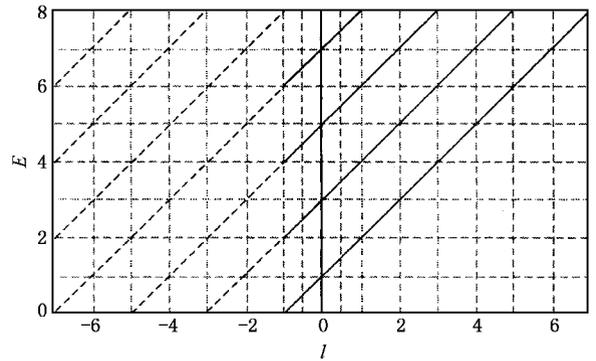


图 4  $l$  与  $E$  的关系

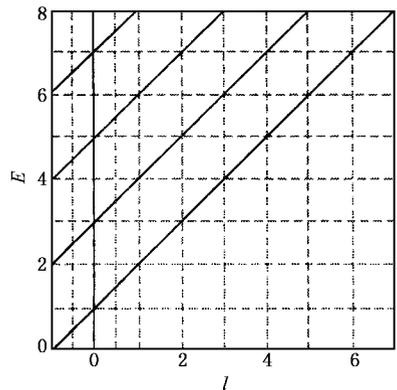


图 5  $l$  与  $E$  关系的有效部分

现在讨论 (31) 式情况. (31) 式描写的就是图 4 中最下方这条斜线情况, 我们把其中的变量  $\alpha$  恢复成用变量  $l$  表达, 写成

$$\begin{aligned}
 \psi_0(x) &= N_0 x^{l+1/2} e^{-x^2/2}, \\
 N_0 &= [\Gamma(l + 1)]^{1/2}, & l > -1.
 \end{aligned} \tag{34}$$

显然此式包括了  $m = 0$ , 包括了上述所有情况, 这是基态的一般表达式. 事实上, 区间可以不必标出, 只在具体需要时予以考虑就可以了. 图 4 中的  $l \leq -1$

情况以下不再考虑. 由(23)式可见, 基态决定后来的激发态, 因此关于  $l$  的区间对本征态的影响, 只就基态讨论即可.

显然, 计算激发态从(34)式出发就可以了. 按照(23)式中的第二式, 立即可以得到本征态之间的递推关系

$$\begin{aligned}\psi_n(x) &= \frac{A^+}{\sqrt{n(n+E_0-1)}}\psi_{n-1}(x) \\ &= \frac{(A^+)^2}{\sqrt{n(n+E_0-1)(n-1)(n+E_0-2)}} \\ &\quad \times \psi_{n-2}(x),\end{aligned}$$

其中  $E_0 = 2\lambda_0 = l + 1$ . 最后得到归一化的本征函数

$$\psi_n(x, l) = \frac{(A^+)^n}{\sqrt{n! (n+l+1)}} x^{l+1/2} e^{-x^2/2}, \quad l > -1. \quad (35)$$

进一步考虑到

$$\begin{aligned}(A^+)^n &= \frac{1}{2^n x^{-2n-2l+1/2}} e^{x^2/2} \\ &\quad \times \left(x \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2} x^{l+1/2}.\end{aligned} \quad (36)$$

代入(35)式最后得到

$$\begin{aligned}\psi_n(x, l) &= \frac{1}{2^n \sqrt{n! (n+l+1)}} x^{-2n-2l+1/2} e^{x^2/2} \\ &\quad \times \left(x \frac{d}{dx}\right)^n x^{2l+1} e^{-x^2}, \quad l > -1.\end{aligned} \quad (37)$$

为了下面讨论的方便, 我们标出了变量  $l$ . 至于  $l \leq -1$  的情况, 前面已述及, 可以不予考虑, 若必要, 只需使用(37)式中  $l$  属于区间  $(-1, 1)$  的态即可.

#### 4. 参量双光子体系和真空态讨论

我们曾经针对图 1(或图 2)指出<sup>[16]</sup>, 当  $l \rightarrow 1/2$  ( $g \rightarrow 0$ ) 时, 同调谐振子归于一维线性谐振子. 但是从  $l$  拓展之后的图 5 可见, 当  $l \rightarrow \pm 1/2$  时, 归于一维线性谐振子. 如果将方程(1)写成

$$\begin{aligned}H\psi(x) &= E\psi(x), \\ H &= \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{l^2 - 1/4}{x^2} \right), \quad (38) \\ E &> 0, \quad l > -1\end{aligned}$$

就十分明显了. 从图 5 看,  $l \rightarrow 1/2$  和  $l \rightarrow -1/2$  是明显的两种情况, 我们借助于(35)式的形式给出

$$\begin{aligned}\psi_n^o(x) &= \psi_n(x, -1/2) \\ &= \frac{(A^+)^n}{\sqrt{n! (n+1/2)}} e^{-x^2/2}, \quad l = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_n^o(x) &= \psi_n(x, 1/2) \\ &= \frac{(A^+)^n}{\sqrt{n! (n+2/3)}} x e^{-x^2/2}, \quad l = \frac{1}{2}.\end{aligned} \quad (39)$$

我们将证明它们分别是双光子奇 Fock 态  $\psi_n^o(x)$  和偶 Fock 态  $\psi_n^e(x)$ . 此后将分别用它们构造双光子的奇相干态和偶相干态.

这里我们只证明(39)式中的第一式为双光子偶 Fock 态. 需要(9)式中的第二式和(10)式中的第二式取  $l \rightarrow -1/2$  得到

$$b_0^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x - \frac{d}{dx} \right) = a^+, \quad (40)$$

$$A^+ = -\frac{1}{2} (b_0^+)^2 = \frac{1}{2} (a^+)^2.$$

当我们取  $l \rightarrow 1/2$ , 情况稍微复杂一些, 这时有

$$\begin{aligned}b_{-1}^+ &= a^+ + \frac{1}{\sqrt{2}x}, \\ b_1^+ &= a^+ - \frac{1}{\sqrt{2}x},\end{aligned} \quad (41)$$

$$A^+ = -\frac{1}{2} b_{-1}^+ b_1^+ = \frac{1}{2} (a^+)^2.$$

下面将会证明(41)式中的最后一式.

我们现在证明(39)式中的第一式为双光子偶 Fock 态, 将其代入(35)式得到

$$\begin{aligned}\psi_n^e(x) &= \psi_n(x, -1/2) \\ &= \frac{(a^+)^{2n}}{\sqrt{2^{2n} n! (n+1/2)}} e^{-x^2/2}.\end{aligned} \quad (42)$$

根据 Legendre 倍量公式

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma(n+1/2),$$

$$\psi_n^e(x) = \psi_{n, -1/2}(x) = \frac{(a^+)^{2n}}{\sqrt{(2n)!} \sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (43)$$

这恰是双光子偶 Fock 态. 我们直接给出双光子奇 Fock 态,

$$\psi_n^o(x) = \psi_{n, 1/2}(x) = \frac{(a^+)^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!} \sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (44)$$

证明(44)式需要(41)式和 Legendre 倍量公式.

我们给出一个很有趣的性质

$$\begin{aligned}\psi_{n+1/2}^e &= \psi_{n+1/2}(x, -1/2) \\ &= \psi_n(x, 1/2) = \psi_n^o.\end{aligned} \quad (45)$$

以上的讨论将启示我们(35)式所给出的态实际上是经过参量  $l$  控制了的双粒子 Fock 态, 图 5 给出了这些态的一般的谱分布情况. (44) 和(45)式只

是特例,同调谐振子所描述的乃是双粒子体系,这显然是十分重要的.后面讨论经参量  $l$  控制的双光子相干态一般情况时,将自动出现奇相干态和偶相干态.

我们顺便讨论一下真空态,即基态.双光子体系的真空态实际上是由图 5 最下面的一条斜线给出的,并不是简单的  $1/\chi$  (即  $\hbar\omega/2$ ) 情况,几乎可以说是大于零的所有情况.这也是一个值得重视的情况.

这里是从同调谐振子中得到的两个特例,其能量和态函数合起来恰是一维线性谐振子的形式.但是毕竟不是线性谐振子.下面我们将一维线性谐振子变换到同调谐振子.

## 5. 从一维线性谐振子到同调谐振子的变换

一维线性谐振子的 Hamiltonian 算符为

$$H^0 = aa^+ - \frac{1}{2}, \quad (46)$$

其中算符  $a$  和  $a^+$  是(10)式的最后两式.由(10)式的第二、第三式有

$$\begin{aligned} a &= b_{l+1/2} + \frac{l+1/2}{\sqrt{2}x}, \\ a^+ &= b_{l+1/2}^+ + \frac{l+1/2}{\sqrt{2}x}, \end{aligned} \quad (47)$$

代入(46)式可得

$$H^0 = b_{l+1/2} b_{l+1/2}^+ - \frac{1}{2} \frac{l-1/4}{x^2} + l + 1. \quad (48)$$

整理后得到

$$H = H^0 + \frac{1}{2} \frac{l-1/4}{x^2} = b_{l+1/2} b_{l+1/2}^+ + l + 1. \quad (49)$$

考虑到(10)式的前两式,即得

$$H = \frac{1}{2} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + \frac{l^2 - 1/4}{x} \right). \quad (50)$$

显然,这个变换是可逆的.我们看到,一维线性谐振子(46)式和同调谐振子(1)式是可以相互变换的,应该说它们具有某种等价性.这意味着,把一维线性谐振子看作同调谐振子的特例可能不全面;把一维线性谐振子看作是同调谐振子的退化似乎更妥当一些.

利用这个机会考察一下算符  $A_n^+(l)$  以及  $b_{l+1/2}$  和  $b_{l+1/2}^+$  对态  $\varphi_n(x, l)$  的操作意义,仅以  $A_n^+(l)$  作用于(44)式的基态为例,取最简单情况  $n=0, l=0$ ,

$\varphi_0(x, 0)$  进行讨论,暂时略去归一化常数并把将要用到的线性谐振子的两个本征态记为  $\varphi_n(x), n=1, 2, \dots$ .图 6 是图 5 的局部放大,我们将对照图 6 进行讨论.把相应的算符分解为几个部分,具体考察这几部分的操作意义

$$\begin{aligned} A_0^+(0) &= b_{-1/2}^+ b_{1/2}^+, \\ b_{1/2}^+ &= \mu^- a^+ \mu, \\ b_{-1/2}^+ &= \mu a^+ \mu^-, \\ \mu &= x^{1/2}, \\ \mu^- &= x^{-1/2}. \end{aligned} \quad (51)$$

先写出

$$A_0^+(0)\varphi_0(x, 0) = b_{-1/2}^+ b_{1/2}^+ \varphi_0(x, 0) = \varphi_1(x, 0). \quad (52)$$

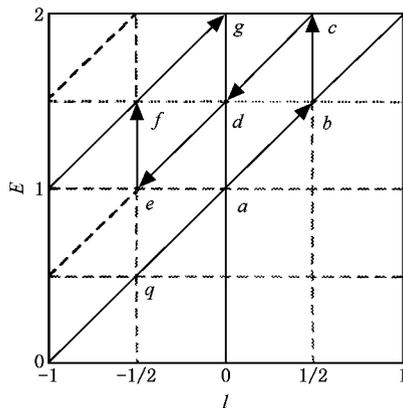


图 6 算符的操作

图 6 中  $q$  点为线性谐振子的基态  $\varphi_0$ ,  $a$  点的态是  $\varphi_0(x, 0)$  (52) 式的操作过程是从  $a$  点出发经过  $\mu$  作用移到  $b$  点得到的态是  $\varphi_0(x, 1/2)$ , 也是线性谐振子的第一激发态  $\varphi_1$ , 然后经过  $a^+$  的作用达到点  $c$ ; 再经过两次  $\mu^-$  的作用经  $d$  达到点  $e$ ; 再经过  $a^+$  的作用达到点  $f$ ,  $f$  点的态是  $\varphi_1(x, -1/2)$ , 接着经过  $\mu$  的作用达到点  $g$ ,  $g$  点的态是  $\varphi_1(x, 0)$ .  $c, d, f$  各点的态可以写出来,但不是本征态,是一些叠加态.事实上,前三步完成了  $b_{1/2}^+$  操作,后三步完成了  $b_{-1/2}^+$  操作,整个六步完成了  $A_0^+(0)$  操作.经过这个简单操作,可以理解有关算符在图 5 上的意义.

## 6. 参量双光子相干态

首先,我们得到的本征态具有正交性,即

$$n' |n\rangle = \delta_{n'n};$$

$$\begin{aligned} x|n &= \psi_n(x, l), \\ x|n' &= \psi_{n'}(x, l). \end{aligned} \quad (53)$$

注意  $|n$  和  $|n'$  中的参量  $l$  相同. 相干态即为湮没算符  $A$  的本征态  $|z$ , 按照相干态的定义

$$A|z = z|z, \quad (54)$$

将相干态  $|z$  用相同参量  $l$  值的同调谐振子本征态的线性组合表出, 即为

$$\begin{aligned} |z &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n, \\ x|n &= \psi_n(x, l), \end{aligned} \quad (55)$$

其中  $C_n$  为待定的常数,  $z$  为复变数. 将 (55) 式分别代入 (54) 式的两端, 先代入到等号左端并考虑到 (23) 式的第三式

$$\begin{aligned} A|z &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n A|n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{n(n+l)} |n-1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \sqrt{(n+1)(n+l+1)} |n, \\ l &> -1. \end{aligned} \quad (56)$$

再将 (55) 式代入 (54) 式等号右端, 有

$$z|z = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z |n. \quad (57)$$

比较 (56) 和 (57) 式可得  $C_n$  的递推关系并一推到底,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{z}{\sqrt{n(n+l)}} C_{n-1} \\ &= \frac{z^n \sqrt{\Gamma(l+1)}}{\sqrt{n} \Gamma(n+l+1)} C_0. \end{aligned} \quad (58)$$

代入到 (55) 式可得到

$$|z = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \sqrt{\Gamma(l+1)}}{\sqrt{n} \Gamma(n+l+1)} |n, \quad (59)$$

其中常数  $C_0$  由归一化条件  $\langle z|z = 1$  确定. 即有

$$\begin{aligned} C_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Gamma(l+1)}{n \Gamma(n+l+1)} &= 1, \quad x = |z|^2, \\ C_0 &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Gamma(l+1)}{n \Gamma(n+l+1)} \right]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (60)$$

其中利用了正交归一关系 (53) 式. 考虑到 (35) 式, 相干态 (59) 式的另一种表达方式为

$$x|z = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zA^+)^n}{n \Gamma(n+l+1)} x^{l+1/2} e^{-x^2/2}, \quad (61)$$

$$C_0 = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Gamma(l+1)}{n \Gamma(n+l+1)} \right]^{-1/2}.$$

下面我们证明, 当  $l = \pm 1/2$  时 (59) 或 (61) 式

化为奇偶相干态. 首先按照 (9) 式中的第二式和 (10) 式证明.

$$A_{l=\pm 1/2}^+ = -\frac{1}{2}(a^+)^2. \quad (62)$$

当  $l = -1/2$  时很显然, 前面已经用过了, 这就是 (41) 式; 而当  $l = 1/2$  时, 情况稍微复杂一点, 我们给出简要证明.

$$\begin{aligned} A_{l=1/2}^+ &= -\frac{1}{2} b_{-1}^+ b_1^+ \\ &= -\frac{1}{2} \left( a^+ + \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \left( a^+ - \frac{1}{\sqrt{2}x} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ (a^+)^2 - \frac{1}{2x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{x} a^+ - a^+ \frac{1}{x} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} (a^+)^2, \end{aligned} \quad (63)$$

其中我们利用了对易关系  $[x^{-1}, a^+] = 1/\sqrt{2}x^2$ , 这个对易关系的详细讨论见文献 [14].

在  $l \rightarrow -1/2$  的情况下并考虑到 (61) 式 (59) 式为

$$\begin{aligned} |z_e &= C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \Gamma(1/2)}{2^n n! \Gamma(n+3/2)} |n_e \\ &= C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{(2n)!}} |n_e, \\ C_0 &= \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|2z|^{2n}}{(2n)!} \right]^{-1/2} \\ &= (\cosh |2z|)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$x|z_e = \psi_n^e(x) = \psi_n(x, -1/2),$$

其中用到 Legendre 倍量公式. 与通常的 Glauber 相干态  $|\beta$  及其偶相干态

$$\alpha|\beta = \beta|\beta, \quad (65)$$

$$|z_e = (\cosh |\beta|^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |n_e.$$

相比较, 显然有

$$2z = \beta^2. \quad (66)$$

计算  $l \rightarrow 1/2$  情况, 可以利用 (59) 式, 将  $l = 1/2$  代入, 但处理起来比较麻烦. 这里采用较简单的方法. 注意到

$$a|n_e = a|2n^0 = \sqrt{2n} |2n-1^0, \quad (67)$$

其中  $|m^0$  是线性谐振子的本征态,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . 进一步得到

$$\begin{aligned}
 a|z\rangle_e &= D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{(2n)!}} a|n\rangle_e \\
 &= D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{(2n)!}} \sqrt{2n} |2n-1\rangle_0 \\
 &= D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{(2n-1)!}} |2n-1\rangle_0.
 \end{aligned}$$

这里实际上利用了(45)式,我们得到

$$\begin{aligned}
 |z\rangle_0 &= D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{\sqrt{(2n-1)!}} |2n-1\rangle_0 \\
 &= D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{n+1/2}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle_0 \\
 &= D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{n+1/2}}{\sqrt{(2n+1)!}} |n\rangle_0, \quad (68)
 \end{aligned}$$

其中归一化常数

$$D = (\sinh |2z|)^{-1/2}.$$

由于在相干态(59)式中包括了由 Glauber 相干态 $|\beta\rangle$ 定义的奇偶相干态,因此(59)式是更普遍的

双光子相干态,同调谐振子是一个有一定代表性和普遍性的双粒子系统.

## 7. 结 论

本文详细分析了同调谐振子谱空间上的对称性,明确了谱空间上的有效部分,由图5给出.(35)或(37)式作为归一化本征函数的表达式足以描述全部本征态.进一步证明了同调谐振子是双粒子体系的较为一般的模型.指出(35)或(37)式乃是双粒子 Fock 态的一般表达式,其中自动包括奇偶 Fock 态(39)式.还给出了双光子相干态的一般表达式(59)式,其中自动包括由 Glauber 相干态定义的奇偶相干态(64)和(68)式.我们指出文献[13]遗漏了偶 Fock 态和偶相干态.同调谐振子是带有参量  $l$  的双粒子模型,一维线性谐振子是它的退化形式.

- [1] Li W B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2356 (in Chinese) [李文博 2001 物理学报 **50** 2356]
- [2] Zhang J L *et al* 2000 *Acta Quant. Opt. Sin.* **6** 18 (in Chinese) [章介伦等 2000 量子光学学报 **6** 18]
- [3] Landau L D, Lifshitz E M 1958 *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon) p5
- [4] Zhu D P 1987 *J. Phys. A* **20** 4331
- [5] Ni Z X 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1687 (in Chinese) [倪致祥 1997 物理学报 **46** 1687]
- [6] Li W B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 547 (in Chinese) [李文博 2002 物理学报 **51** 547]
- [7] Yu Z X *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1693 (in Chinese) [于肇贤等 1997 物理学报 **46** 1693]

- [8] Chen C Y *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 536 (in Chinese) [陈昌远等 1998 物理学报 **47** 536]
- [9] Xu Z W 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1807 (in Chinese) [徐子骏 1996 物理学报 **45** 1807]
- [10] Chen C Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 607 (in Chinese) [陈昌远 2000 物理学报 **49** 607]
- [11] Hou C F *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 385 (in Chinese) [侯春风等 1999 物理学报 **48** 385]
- [12] Liu Y W *et al* 1999 *Acta Quant. Opt. Sin.* **5** 73 (in Chinese) [刘友文等 1999 量子光学学报 **5** 73]
- [13] Perel'mov A M 1986 *Generalized Coherent States and Their Application* (Berlin: Springer-Verlag) pp217—220
- [14] Fan H Y 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 4987

# Symmetry in spectrum space of isotonic oscillator and two-photon parametric model

Li Wen-Bo Li Ke-Xuan Li Ye Li Mi-Shan Li Ya-Ling Wen Xiao-Yang Yuan Guang-Jun

( *Department of Physics , Beijing Jiaotong University , Beijing 100044 , China* )

( Received 10 June 2003 ; revised manuscript received 6 April 2004 )

## Abstract

Symmetry in spectrum space of isotonic oscillators is studied , and a distinct figure is given by appropriate parametric substitution . An analytic expression of normalized eigenfunction is obtained . It is proven that linear oscillator is a degeneration of isotonic oscillator . It is revealed that an isotonic oscillator is a two-photon parametric model . Coherent state of that model is given , and that coherent state includes odd-coherent state and even-coherent state constructed by Glauber coherent states in a natural way .

**Keywords** : isotonic oscillator , pseudo-angular-momentum method , eigenvalue spectrum , eigenfunction , two-photon model with parameter

**PACC** : 4250 , 0365