

# 具有双旋转参数 5 维黑洞的 Cardy-Verlinde 公式\*

张丽春 赵 仁

(雁北师范学院物理系,大同 037000)

(2004 年 1 月 9 日收到 2004 年 5 月 17 日收到修改稿)

对具有双旋转参数的 5 维时空中,黑洞视界的热力学参量与宇宙视界的热力学参量进行了研究.发现宇宙视界的熵能写为 Cardy-Verlinde 公式的形式,而黑洞视界的熵要写成 Cardy-Verlinde 公式的形式,必须用 Abbott 和 Deser 的方法,计算具有双旋转参数 5 维黑洞的质量.通过研究,给出了具有双旋转参数 5 维黑洞各热力学参量之间满足的关系式,即热力学第一定律的微分式.

关键词: Cardy-Verlinde 公式, Casimir 能量, de Sitter 时空

PACC: 9760L, 0420

## 1. 引 言

最近,人们对 de Sitter (dS) 空间和渐近 dS 空间的热力学性质研究非常活跃,主要是因为最新的天文学观测表明宇宙中大约有 70% 的能量密度是由所谓的暗物质组成.在广义相对论中,描述这种暗物质的是由 Einstein 提出的宇宙学项.对超新星数据分析也指出,在宇宙中存在正宇宙常数<sup>[1-3]</sup>.因此,我们的宇宙的未来趋于 dS 阶段.因此,对 dS 空间热力学性质的研究是当前理论物理学家非常感兴趣的研究课题之一.文献 [4-7] 应用 brick-wall 方法对 dS 时空的熵进行了研究,文献 [8-10] 应用膜模型,对 dS 时空的统计熵进行了研究,都得到非常有意义的结论.最近,文献 [11-13] 对 dS 时空的热力学参数进行了研究,计算出 Casimir 能量,给出了黑洞视界与宇宙视界熵的 Cardy-Verlinde 公式.

本文中,我们将文献 [11] 的研究推广到具有双旋转参数的 Kerr-dS (KdS) 时空情况.由于 KdS 黑洞时空除了宇宙视界还有黑洞视界,并且具有 Hawking 辐射和熵,如果采用 Balasubramanian, de Boer 和 Minic (BBM)<sup>[14]</sup> 描述中质量的定义,黑洞视界的熵不能写作像 Cardy-Verlinde 公式一样的形式.如果用 Abbott 和 Deser (AD)<sup>[15]</sup> 方法,在 KdS 空间中黑洞视界的熵可以通过 Cardy-Verlinde 公式表达,我们由此得到具有双旋转的 KdS 黑洞的热力学第一定律关

系式.还对极端情况下宇宙视界的热力学性质进行了分析.

## 2. 具有双旋转参数的 KdS 时空

具有双旋转参数的 5 维黑洞线元<sup>[16,17]</sup>

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\rho^2} \left( dt - \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi_a} d\phi - \frac{b \cos^2 \theta}{\Xi_b} \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_r} dr^2 + \frac{1-r^2/l^2}{r^2 \rho^2} \left[ ab dt - \frac{\mathcal{K}(r^2+a^2)\sin^2\theta}{\Xi_a} d\phi - \frac{\mathcal{A}(r^2+b^2)\cos^2\theta}{\Xi_b} d\psi \right]^2 + \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( a dt - \frac{r^2+a^2}{\Xi_a} d\phi \right)^2 + \frac{\Delta_\theta \cos^2 \theta}{\rho^2} \left( b dt - \frac{r^2+b^2}{\Xi_b} d\psi \right)^2, \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \frac{1}{r^2} (r^2 + a^2)(r^2 + b^2) \left( 1 - \frac{r^2}{l^2} \right) - 2m, \\ \Delta_\theta &= 1 + \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta + \frac{b^2}{l^2} \sin^2 \theta, \\ \Xi_a &= 1 + \frac{a^2}{l^2}, \\ \Xi_b &= 1 + \frac{b^2}{l^2}, \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

时空 (1) 有两个视界,宇宙视界位置  $r_c$  和黑洞视界

\* 山西省自然科学基金(批准号 20001009)资助的课题.

位置  $r_h$  ,并且满足方程  $\Delta_r = 0$  .

### 3. 宇宙视界的熵与 Cardy-Verlinde 公式

对于双旋转黑洞与宇宙视界对应的热力学参量为

$$\begin{aligned}
 E &= -\frac{3\pi m}{4G\Xi_a\Xi_b}, \\
 J_\phi &= \frac{\pi ma}{2G\Xi_a^2\Xi_b}, \\
 J_\psi &= \frac{\pi mb}{2G\Xi_b^2\Xi_a}, \\
 \Omega_\phi &= \frac{g_{03}g_{44} - g_{34}g_{04}}{g_{33}g_{44} - g_{34}^2} = -\frac{a\Xi_a}{r_c^2 + a^2}, \\
 \Omega_\psi &= \frac{g_{04}g_{33} - g_{34}g_{03}}{g_{33}g_{44} - g_{34}^2} = -\frac{b\Xi_b}{r_c^2 + b^2}, \\
 T &= -\frac{r_c^2\Delta'_r(r_c)}{4\pi(r_c^2 + a^2)(r_c^2 + b^2)}.
 \end{aligned}$$

应用文献 [18, 19] 的方法,可得宇宙视界对应的熵

$$S = \frac{\pi^2}{2r_c G\Xi_a\Xi_b}(r_c^2 + a^2)(r_c^2 + b^2). \quad (3)$$

这里,

$$m = \frac{1}{2r_c}(r_c^2 + a^2)(r_c^2 + b^2)\left(1 - \frac{r_c^2}{l^2}\right).$$

由此可知,黑洞的  $BBM^{[14]}$  质量  $E$  ,辐射温度  $T$  ,角动量  $J_\phi$  和  $J_\psi$  ,宇宙视界的角速度  $\Omega_\phi$  和  $\Omega_\psi$  ,和宇宙视界对应的熵  $S$  是宇宙视界位置  $r_c$  和旋转参  $a, b$  的函数. 由宇宙视界的热力学函数,我们来确定 Casimir 能量  $E_C$  .把文献 [11, 20] 的结论推广到双旋转黑洞,定义

$$E_C = 4E - 3TS - 3\Omega_\phi J_\phi - 3\Omega_\psi J_\psi. \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式,可得

$$E_C = -\frac{3\pi}{4G\Xi_a\Xi_b} \frac{(r_c^2 + a^2)(r_c^2 + b^2)}{r_c}. \quad (5)$$

则

$$2E - E_C = \frac{3\pi}{4G\Xi_a\Xi_b} \frac{(r_c^2 + a^2)(r_c^2 + b^2)}{l^2}. \quad (6)$$

因此,宇宙视界对应的熵(3)式可表示为

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{2\pi l}{3} \sqrt{|E_C|(2E - E_C)} \\
 &= \frac{\pi^2}{2G\Xi_a\Xi_b} \frac{(r_c^2 + a^2)(r_c^2 + b^2)}{r_c}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

(7)式表明宇宙视界的热力学参量在 KdS 解中可以通过共形场(CFT)描述,它被假设是在任意维中 CFT

熵的公式,即我们的结论提供了对 dS/CFT 对应的支持.这方面的研究见文献 [21—24].

由(3)式给出的宇宙视界对应的热力学函数满足热力学第一定律,

$$dE = TdS + \Omega_\phi dJ_\phi + \Omega_\psi dJ_\psi, \quad (8)$$

且

$$\begin{aligned}
 T &= \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{J_\phi, J_\psi}, \\
 \Omega_\phi &= \left(\frac{\partial E}{\partial J_\phi}\right)_{S, J_\psi}, \\
 \Omega_\psi &= \left(\frac{\partial E}{\partial J_\psi}\right)_{S, J_\phi}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

### 4. 黑洞视界的熵与 Cardy-Verlinde 公式

对于双旋转黑洞与黑洞视界对应的热力学参量为

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= -E = \frac{3\pi m}{4G\Xi_a\Xi_b}, \\
 \tilde{J}_\phi &= J_\phi = \frac{\pi ma}{2G\Xi_a^2\Xi_b}, \\
 \tilde{J}_\psi &= J_\psi = \frac{\pi mb}{2G\Xi_b^2\Xi_a}, \\
 \tilde{\Omega}_\phi &= -\frac{g_{03}g_{44} - g_{34}g_{04}}{g_{33}g_{44} - g_{34}^2} = \frac{a\Xi_a}{r_h^2 + a^2}, \\
 \tilde{\Omega}_\psi &= -\frac{g_{04}g_{33} - g_{34}g_{03}}{g_{33}g_{44} - g_{34}^2} = \frac{b\Xi_b}{r_h^2 + b^2}, \\
 \tilde{T} &= \frac{r_h^2\Delta'_r(r_h)}{4\pi(r_h^2 + a^2)(r_h^2 + b^2)}, \\
 \tilde{S} &= \frac{\pi^2}{2r_h G\Xi_a\Xi_b}(r_h^2 + a^2)(r_h^2 + b^2).
 \end{aligned} \quad (10)$$

$AD^{[15]}$  质量  $\tilde{E}$  和角动量满足热力学第一定律,

$$d\tilde{E} = \tilde{T}d\tilde{S} + \tilde{\Omega}_\phi d\tilde{J}_\phi + \tilde{\Omega}_\psi d\tilde{J}_\psi. \quad (11)$$

由(8)和(11)式知,具有双旋转参数的 5 维黑洞热力学第一定律的表达式为

$$\tilde{\kappa} d\tilde{A} + \kappa dA + 8\pi G(\Delta\Omega_\phi dJ_\phi + \Delta\Omega_\psi dJ_\psi) = 0, \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned}
 \Delta\Omega_\phi &= \tilde{\Omega}_\phi + \Omega_\phi = a\Xi_a \left(\frac{1}{r_h^2 + a^2} - \frac{1}{r_c^2 + a^2}\right), \\
 \Delta\Omega_\psi &= \tilde{\Omega}_\psi + \Omega_\psi = a\Xi_b \left(\frac{1}{r_h^2 + b^2} - \frac{1}{r_c^2 + b^2}\right).
 \end{aligned} \quad (13)$$

由黑洞视界的热力学函数,我们来确定 Casimir 能量  $\tilde{E}_c$ . 推广文献 [11] 的结论得

$$\tilde{E}_c = 4\tilde{E} - 3\tilde{T}\tilde{S} - 3\tilde{\Omega}_\phi\tilde{J}_\phi - 3\tilde{\Omega}_\psi\tilde{J}_\psi. \quad (14)$$

由 (10) 和 (14) 式可得

$$\tilde{E}_c = \frac{3\pi}{4G\Xi_a\Xi_b} \frac{(r_h^2 + a^2)(r_h^2 + b^2)}{r_h^2}. \quad (15)$$

则

$$2\tilde{E} - \tilde{E}_c = -\frac{3\pi}{4G\Xi_a\Xi_b} \frac{(r_h^2 + a^2)(r_h^2 + b^2)}{l^2}. \quad (16)$$

因此, 黑洞视界对应的熵 (10) 式可表示为

$$\tilde{S} = \frac{2\pi l}{3} \sqrt{|\tilde{E}_c|(2\tilde{E} - \tilde{E}_c)}. \quad (17)$$

## 5. 结 论

当  $m=0$  时, 时空线元 (1) 式描述具有双旋转的 dS 空间, 此种情况下的宇宙视界位置  $r_c = l$ , 则

BBM 质量  $E$ , 角动量  $J_\phi$  和  $J_\psi$  成为零, Hawking 辐射温度和熵为

$$T = \frac{1}{2\pi l}, \quad (18)$$

$$S = \frac{\pi^2 l^3}{2G}.$$

则 Casimir 能量可表示成

$$E_c = -\frac{3\pi l^2}{4G}. \quad (19)$$

当时空 (1) 中的  $a$  或  $b$  为零时, 我们所给结论就回到文献 [11] 的情况.

通过以上研究可知, 对于 KdS 空间中的总熵是黑洞视界熵和宇宙视界熵之和, 如果用渐近 dS 空间中的 BBM 质量, 黑洞视界熵不能表达为 Cardy-Verlinde 公式的形式. 而我们采用文献 [11] 提供的理论, 应用 AD 方法计算具有双旋转参数 KdS 黑洞的质量, 则黑洞视界熵可以写作 Cardy-Verlinde 公式的形式. 由此得出, 在具有双旋转参数的 KdS 空间, 黑洞视界的热力学参量可以通过 CFT 描述.

- [1] Perlmutter S, Gabi S, Goldhaber G et al 1997 *Astrophys. J.* **483** 565
- [2] Caldwell R R, Dave R, Steinhardt P J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1582
- [3] Carnavich P M, Jha S, Challis P et al 1998 *Astrophys. J.* **509** 74
- [4] Sun M C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1350 (in Chinese) [孙鸣超 2003 物理学报 **52** 1350]
- [5] Li X, Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 463
- [6] Gao C J, Shen Y G 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 618
- [7] Zhang L C, Zhao R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 362 (in Chinese) [张丽春、赵 仁 2004 物理学报 **53** 362]
- [8] Zhao R, Zhang J F, Zhang L C 2002 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **37** 4575
- [9] Zhao R, Wu Y Q, Zhang L C 2004 *Chin. Phys.* **13** 974
- [10] Zhao R, Wu Y Q, Zhang L C 2003 *Class Quantum. Grav.* **20** 4885
- [11] Cai R G 2002 *Nucl. Phys. B* **628** 375
- [12] Cai R G 2002 *Phys. Lett. B* **525** 331
- [13] Myung Y S 2002 *Phys. Lett. B* **531** 1

- [14] Balasubramanian V, de Boer J, Minic D 2002 *Phys. Rev. D* **65** 123508
- [15] Abbott L F, Deser S 1982 *Nucl. Phys. B* **195** 76
- [16] Dehghani M H 2002 *Phys. Rev. D* **65** 104003
- [17] Hawking S W, Hunter C J, Taylor-Robinson M M 1999 *Phys. Rev. D* **59** 64005
- [18] Zhao R, Zhang L C 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 21 (in Chinese) [赵 仁、张丽春 2002 物理学报 **51** 21]
- [19] Zhao R, Zhang L C 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1167 (in Chinese) [赵 仁、张丽春 2002 物理学报 **51** 1167]
- [20] Verlinde E 2003 *JHEP* **0312** 54
- [21] Hull C M 1998 *JHEP* **9807** 21; Hull C M 1998 *JHEP* **9811** 17; Hull C M, Khuri 1998 *Nucl. Phys. B* **536** 219; Hull C M 2000 *Nucl. Phys. B* **575** 231
- [22] Balasubramanian V, Horava P, Minic D 2001 *JHEP* **0105** 43
- [23] Witten E 1998 *Theor. Math. Phys.* **2** 505
- [24] Mazur P O, Mottola E 2001 *Phys. Rev. D* **64** 104022

# Cardy-Verlinde formula and thermodynamics of the two parameter five-dimensional rotating black hole<sup>\*</sup>

Zhang Li-Chun Zhao Ren

( *Department of Physics , Yanbei Normal Institute , Datong 037000 , China* )

( Received 9 January 2004 ; revised manuscript received 17 May 2004 )

## Abstract

In this paper , in the two-parameter five-dimensional( 5D ) rotating black hole , we discuss the thermodynamic parameters corresponding to the black hole's horizon and the thermodynamic parameters corresponding to the cosmological horizon. It is obtained that the entropy of cosmological horizon can be written in the form of Cardy-Verlinde formula. However , if we want to write the entropy of the black hole's horizon in the form of Cardy-Verlinde formula , we have to use the methods offered by Abbott and Deser to calculate the mass of the 5D black hole with double-spinning parameter. Through the research , we can give the relation among the thermodynamic parameters of the 5D black hole , that is , the differential expression of the first law of thermodynamics .

**Keywords :** Cardy-Verlinde formula , Casimir energy , de Sitter spacetime

**PACC :** 9760L , 0420

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province , China ( Grant No. 20001009 ).