第 53 卷 第 2 期 2004 年 2 月
1000-3290/2004/53(02)/0331-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.53, No.2, February, 2004

单面完整约束力学系统的形式不变性*

张 毅
(苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)

(2003 年 4 月 1 日收到;2003 年 4 月 29 日收到修改稿)

研究单面完整约束力学系统的形式不变性.根据运动微分方程的形式在无限小变换下的不变性,给出了单面完整约束力学系统形式不变性的定义和判据,建立了系统的形式不变性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系,并举例说明结果的应用.

关键词:分析力学,单面约束,形式不变性,Lie 对称性,Noether 对称性,守恒量
PACC:0320

1. 引 言

力学系统的对称性,亦称不变性.自 1918 年 Noether 揭示了力学系统的守恒量与其内在的动力学对称性之间的关系以来,Noether 对称性的研究取得了重要进展[1—4].但是,Lutzky[5,6],Prince 和 Eliezer[7] 等曾研究并举例说明一些非 Noether 不变量的存在性,实际上,这些非 Noether 对称性大都是 Lie 对称性[8].1979 年,Lutzky[9] 将 Lie 理论应用于力学系统,开始研究动力学系统的 Lie 对称性和守恒量,其后 Lie 对称性方法发展迅速,已取得一系列重要成果[10—13].近年来,梅凤翔[14] 提出并研究了力学系统运动方程的形式在无限小变换下保持不变的形式不变性,并指出[8] 从力学角度看,形式不变性最易理解,也最直接.关于形式不变性的研究已取得了一些重要成果[14—17],但研究大多局限于具有双面约束的力学系统.

实际上,在自然界及工程技术问题中相当多的约束是属于单面的,而不是双面的.1988 年,梅凤翔[18] 专题研究了单面约束系统动力学.1993 年,Журавлев 和 Фуфаев 出版了国际上第一部单面约束系统动力学的专著[19].近年来,在单面约束系统的基本理论研究方面已取得了一些进展[12,20—24].本文研究单面完整约束力学系统的形式不变性,给出了在无限小群变换下单面完整约束系统的形式不变性的定义和判据,建立了系统的形式不变性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系.

2. 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s($s = 1,\cdots,n$)来确定,其运动受 a 个单面完整约束

$$f_\alpha(t,\boldsymbol{q}) \geqslant 0 \qquad (\alpha = 1,\cdots,a),\tag{1}$$

则系统的运动微分方程可表为[12]

$$E_s(L) = Q_s + \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_s} \qquad (s = 1,\cdots,n),$$
$$\lambda_\alpha \geqslant 0, \lambda_\alpha f_\alpha = 0, \qquad (\alpha = 1,\cdots,a),\tag{2}$$

其中

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \qquad (s = 1,\cdots,n)\tag{3}$$

为 Euler 算子,L 为系统的 Lagrange 函数,Q_s 为非势广义力,λ_α 为约束乘子.

若系统处于部分约束上,即约束(1)中有 b 个取等号,则可将 λ_γ 表为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,而方程(2)成为

$$E_s(L) = Q_s + \Lambda_s,$$
$$\Lambda_s = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\gamma \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s}$$
$$(\gamma = 1,\cdots,b;b \leqslant a;s = 1,\cdots,n).\tag{4}$$

若系统脱离全部约束,即约束(1)中不等号严格成立,则方程(2)成为

* 江苏省高校自然科学基金(批准号:01KJD130002)及江苏省青蓝工程基金资助的课题.

$$E_s(L) = Q_s \qquad (s = 1,\cdots,n), \tag{5}$$

称方程(4),(5)为与单面完整约束系统(1),(2)相应的完整系统的运动方程.

3. 系统的形式不变性

引进无限小群变换

$$t^* = t + \Delta t = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s(t) = q_s(t) + \varepsilon\xi_3(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$$

$$(s = 1,\cdots,n). \tag{6}$$

定义1 在无限小变换(6)下,如果与单面完整约束系统相应的完整系统的运动微分方程(4),(5)保持形式不变,即成立

$$E_s(L^*) = Q_s^* + \Lambda_s^* \qquad 当 f_\gamma = 0, \tag{7}$$

$$E_s(L^*) = Q_s^* \qquad 当 f_\alpha > 0, \tag{8}$$

式中

$$L^* = L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),$$

$$Q_s^* = Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),$$

$$\Lambda_s^* = \Lambda_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right), \tag{9}$$

则称这种不变性为相应完整系统的形式不变性.

定义2 在无限小变换(6)下,如果与单面完整约束系统相应的完整系统的运动微分方程(4),(5)保持形式不变,且满足

$$f_\gamma^* = f_\gamma(t^*,\boldsymbol{q}^*) = 0 \qquad (\gamma = 1,\cdots,b;b \leqslant a)$$

$$当 f_\gamma = 0, \tag{10}$$

则称这种不变性为单面完整约束系统的形式不变性.

取无限小生成元向量为[11]

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{11}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{12}$$

二次扩展为

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{13}$$

展开 L^*,Q_s^*,Λ_s^* 和 f_α^*,有

$$L^* = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(L)] + o(\varepsilon^2), \tag{14}$$

$$Q_s^* = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(Q_s)] + o(\varepsilon^2), \tag{15}$$

$$\Lambda_s^* = \Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(\Lambda_s)] + o(\varepsilon^2), \tag{16}$$

$$f_\alpha^* = f_\alpha(t,\boldsymbol{q}) + \varepsilon[X^{(0)}(f_\alpha)] + o(\varepsilon^2). \tag{17}$$

由定义1容易得到

定理1 对于相应完整系统(4),(5),如果无限小变换(6)的生成元 ξ_0,ξ_s 满足以下条件:

$$E_s(X^{(1)}(L)) - X^{(1)}(Q_s) - X^{(1)}(\Lambda_s) = 0$$

$$当 f_\gamma = 0, \tag{18}$$

$$E_s(X^{(1)}(L)) - X^{(1)}(Q_s) = 0 \qquad 当 f_\alpha > 0, \tag{19}$$

则单面完整约束系统的相应完整系统在无限小变换(6)下是形式不变的.

证明 将关系(14),(15),(16)代入方程(7)和(8),略去 ε^2 及更高阶小项,便得方程(18),(19).

同理,根据定义2,可得

定理2 对于单面完整约束系统(1),(2),如果无限小变换(6)的生成元 ξ_0,ξ_s 满足条件(18),(19),还满足限制方程

$$X^{(0)}(f_\gamma(t,\boldsymbol{q})) = 0 \qquad (\gamma = 1,\cdots,b;b \leqslant a)$$

$$当 f_\gamma = 0, \tag{20}$$

则单面完整约束系统在无限小变换(6)下是形式不变的.

4. 形式不变性与Noether对称性

根据单面约束系统的Noether理论[24],对于相应完整系统(4),(5),如果存在规范函数 $G = G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0$$

$$+ (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \qquad 当 f_\gamma = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \qquad 当 f_\alpha > 0, \tag{22}$$

则相应的对称性为与单面完整约束系统相应的完整系统(4),(5)的Noether对称性.

显然,有

定理3 对于相应完整系统(4),(5),如果无限小变换(6)是形式不变性变换,且存在规范函数 $G =$

$G(t,q,\dot{q})$ 使得无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式(21),(22),则系统的形式不变性导致 Noether 对称性,否则不是 Noether 对称性.

约束(1)对无限小变换生成元 ξ_0,ξ_s 的限制归为如下附加限制方程:

$$\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0 \qquad (\gamma=1,\cdots,b;b\leqslant a)$$
$$\text{当 } f_\gamma=0. \tag{23}$$

定理 4　对于单面完整约束系统(1),(2),如果无限小变换(6)是形式不变性变换,且存在规范函数 $G=G(t,q,\dot{q})$ 使得无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式(21),(22)及附加限制方程(23),则系统的形式不变性导致 Noether 对称性,否则不是 Noether 对称性.

5. 形式不变性与 Lie 对称性

Lie 对称性是微分方程在无限小群变换下的一种不变性.文献[12]研究了单面完整约束系统的 Lie 对称性,实际上与单面完整约束系统相应的完整系统(4),(5)的 Lie 对称性也可以表为如下形式[8]:

$$X^{(2)}(E_s(L))-X^{(1)}(Q_s)-X^{(1)}(\Lambda_s)=0$$
$$\text{当 } f_\gamma=0, \tag{24}$$
$$X^{(2)}(E_s(L))-X^{(1)}(Q_s)=0$$
$$\text{当 } f_\alpha>0. \tag{25}$$

因此,有

定理 5　对于相应完整系统(4),(5),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(24),(25),则它们对应与单面完整约束系统相应的完整系统(4),(5)的 Lie 对称性.

定理 6　对于单面完整约束系统(1),(2),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(24),(25)和限制方程(20),则它们对应单面完整约束系统(1),(2)的弱 Lie 对称性.

定理 7　对于单面完整约束系统(1),(2),如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(24),(25)、限制方程(20)和附加限制方程(23),则它们对应单面完整约束系统(1),(2)的强 Lie 对称性.

对于与单面完整约束系统相应的完整系统(4),(5),形式不变性和 Lie 对称性之间的关系有如下结果.

定理 8　对于相应完整系统(4),(5),如果无限小变换(6)是形式不变性变换,且无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足条件

$$\begin{aligned}&E_s(\xi_0)\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^{\cdot}+E_s(\xi_k)\frac{\partial L}{\partial q_k}\\&+\frac{\partial\xi_k}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)^{\cdot}+E_s(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\\&+\left(\frac{\partial\dot{\xi}_k}{\partial\dot{q}_s}-\dot{q}_k\frac{\partial\dot{\xi}_0}{\partial\dot{q}_s}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)^{\cdot}=0\\&(s=1,\cdots,n),\end{aligned}\tag{26}$$

则无限小变换(6)也是 Lie 对称的.

证明　对于任意函数 $f(t,q,\dot{q})$ 和 $g(t,q,\dot{q})$,有

$$E_s(fg)=fE_s(g)+gE_s(f)+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g}{\partial\dot{q}_s},\tag{27}$$

容易验证以下关系式:

$$\frac{\partial}{\partial t}E_s(L)=E_s\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right),\tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k}E_s(L)=E_s\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right),\tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}E_s(L)=E_s\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k},\tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_k}E_s(L)=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}.\tag{31}$$

利用关系式(28)—(31),可以得到

$$\begin{aligned}X^{(2)}(E_s(L))&=\xi_0E_s\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)+\xi_kE_s\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\\&+(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)E_s\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\\&+(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\\&+[(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)^{\cdot}-\ddot{q}_k\dot{\xi}_0]\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_k\partial\dot{q}_s}.\end{aligned}\tag{32}$$

由(27)式和(32)式,有

$$\begin{aligned}E_s(X^{(1)}(L))&=E_s\left(\xi_0\frac{\partial L}{\partial t}+\xi_k\frac{\partial L}{\partial q_k}+(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\\&=\xi_0E_s\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)+E_s(\xi_0)\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^{\cdot}\\&+\dot{\xi}_0\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\dot{q}_s}+\xi_kE_s\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)+E_s(\xi_k)\frac{\partial L}{\partial q_k}\\&+\frac{\partial\xi_k}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)^{\cdot}+\dot{\xi}_k\frac{\partial^2 L}{\partial q_k\partial\dot{q}_s}\end{aligned}$$

$$+ (\dot{\xi}_k - \dot{q}_k \dot{\xi}_0) E_s \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)$$
$$+ E_s (\dot{\xi}_k - \dot{q}_k \dot{\xi}_0) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} (\dot{\xi}_k - \dot{q}_k \dot{\xi}_0) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)^{\cdot}$$
$$+ (\dot{\xi}_k - \dot{q}_k \dot{\xi}_0)^{\cdot} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_s}$$
$$= X^{(2)} (E_s (L)) + E_s (\xi_0) \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)^{\cdot}$$
$$+ E_s (\xi_k) \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right)^{\cdot}$$
$$+ E_s (\dot{\xi}_k - \dot{q}_k \dot{\xi}_0) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$
$$+ \left(\frac{\partial \dot{\xi}_k}{\partial \dot{q}_s} - \dot{q}_k \frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial \dot{q}_s} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)^{\cdot} . \tag{33}$$

将条件(26)代入上式,得

$$E_s (X^{(1)} (L)) = X^{(2)} (E_s (L)) \quad (s = 1, \cdots, n), \tag{34}$$

将(34)式代入(18),(19)式分别得到(24),(25)式,根据定理1和定理5,本定理成立.证毕.

定理9 对于单面完整约束系统(1),(2),如果无限小变换(6)是系统的形式不变性变换,且无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足条件(26),则无限小变换(6)也是系统的弱Lie对称性变换.

定理10 对于单面完整约束系统(1),(2),如果无限小变换(6)是系统的形式不变性变换,且无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足条件(26)和附加限制方程(23),则无限小变换(6)也是系统的强Lie对称性变换.

6. 形式不变性与守恒量

对于单面完整约束系统,形式不变性不一定导致守恒量.下述定理给出守恒量存在的条件和形式.

定理11 对于相应完整系统(4),(5),如果无限小变换(6)是系统的形式不变性变换,且存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)} (L) + (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \dot{G} = 0 \quad \text{当 } f_\gamma = 0, \tag{35}$$

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)} (L) + Q_s (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \dot{G} = 0 \quad \text{当 } f_\beta > 0, \tag{36}$$

则与单面完整约束系统相应的完整系统存在如下守恒量:

$$I = L\xi_0 + (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + G = \text{const}. \tag{37}$$

定理12 对于单面完整约束系统(1),(2),如果无限小变换(6)是系统的形式不变性变换,且存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(35),(36),则单面完整约束系统存在形如(37)式的守恒量.

7. 算 例

例 带单面约束的数学摆[18].系统的Lagrange函数与约束方程为

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + (R - q_1)^2 \dot{q}_2^2) + mg (R - q_1) \cos q_2, \tag{38}$$

$$f_1 = q_1 \geqslant 0, \tag{39}$$

系统的运动微分方程为

$$\begin{aligned} & m\ddot{q}_1 + m(R - q_1)\dot{q}_2^2 + mg\cos q_2 = \lambda, \\ & m(R - q_1)^2 \ddot{q}_2 - 2m(R - q_1)\dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + mg(R - q_1)\sin q_2 = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

若系统处于约束上,即

$$f_1 = q_1 = 0, \tag{41}$$

则有

$$\lambda = m(R - q_1)\dot{q}_2^2 + mg\cos q_2, \tag{42}$$

于是

$$\begin{aligned} & m\ddot{q}_1 = 0, \\ & m(R - q_1)^2 \ddot{q}_2 - 2m(R - q_1)\dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + mg(R - q_1)\sin q_2 = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

若系统脱离约束,即

$$f_1 = q_1 > 0, \tag{44}$$

则有

$$\begin{aligned} & m\ddot{q}_1 + m(R - q_1)\dot{q}_2^2 + mg\cos q_2 = 0, \\ & m(R - q_1)^2 \ddot{q}_2 - 2m(R - q_1)\dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ & + mg(R - q_1)\sin q_2 = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

取

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \tag{46}$$

容易验证生成元(46)满足方程(18),(19),因此它对应相应完整系统的形式不变性.

限制方程(20)给出

$$\xi_1 = 0 \qquad 当 f_1 = 0, \tag{47}$$

显然生成元(46)满足(47)式,因此它对应单面约束系统(38),(39)的形式不变性.

Noether 等式(21),(22)给出

$$L\dot{\xi}_0 - m(R - q_1)\dot{q}_2^2\xi_1 - mg\cos q_2\xi_1 - mg(R - q_1)\sin q_2\xi_2 + m(R - q_1)^2\dot{q}_2(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) + m\dot{q}_1(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) + [m(R - q_1)\dot{q}_2^2 + mg\cos q_2](\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) + \dot{G} = 0 \quad 当 f_1 = 0, \tag{48}$$

$$L\dot{\xi}_0 - m(R - q_1)\dot{q}_2^2\xi_1 - mg\cos q_2\xi_1 - mg(R - q_1)\sin q_2\xi_2 + m\dot{q}_1(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) + m(R - q_1)^2\dot{q}_2(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) + \dot{G} = 0 \quad 当 f_1 > 0. \tag{49}$$

将生成元(46)代入(48),(49)式,可解得

$$G = 0, \tag{50}$$

因此生成元(46)对应相应完整系统的 Noether 对称性.

附加限制方程(23)给出

$$\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0 = 0 \qquad 当 f_1 = 0, \tag{51}$$

显然上式成立,即生成元(46)又对应单面完整约束系统(38),(39)的 Noether 对称性.

确定方程(24),(25)分别给出

$$\ddot{\xi}_1 - 2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 = 0,$$
$$(R - q_1)(\ddot{\xi}_2 - 2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0) - 2\dot{q}_2(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - 2\dot{q}_1(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) - \xi_1\ddot{q}_2 + \xi_2 g\cos q_2 = 0$$
$$当 f_1 = 0, \tag{52}$$

$$\ddot{\xi}_1 - 2\ddot{q}_1\dot{\xi}_0 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 + 2(R - q_1)\dot{q}_2(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) - \xi_1\dot{q}_2^2 - g\sin g_2\xi_2 = 0,$$
$$(R - q_1)(\ddot{\xi}_2 - 2\ddot{q}_2\dot{\xi}_0 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0) - 2\dot{q}_2(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - 2\dot{q}_1(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) - \xi_1\ddot{q}_2 + \xi_2 g\cos q_2 = 0$$
$$当 f_1 > 0. \tag{53}$$

显然,生成元(46)满足方程(52),(53),它们对应相应完整系统的 Lie 对称性.生成元(46)还满足条件(47)和(51),由定理 9 和定理 10,生成元(46)对应单面完整系统的强(弱)Lie 对称性.

生成元(46)对应的守恒量为

$$I = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m(R - q_1)^2\dot{q}_2^2 - mg(R - q_1)\cos q_2 = \text{const}. \tag{54}$$

[1] Noether A E 1918 *Nachr kgl Ges Wiss Göttingen*. *Math*. *Phys*. KI II 235

[2] Djukic Dj S and Vujanovic B 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[3] Liu D 1991 *Science in China* (Series A) **34** 419

[4] Mei F X 1993 *Science in China* (Series A) **36** 709

[5] Lutzky M 1979 *Phys*. *Lett*. **72A** 86

[6] Lutzky M 1979 *Phys*. *Lett*. **75A** 8

[7] Prince G E and Elizer C J 1981 *J*. *Phys*. *A*:*Math*. *Gen*. **14** 587

[8] Mei F X 2001 *J*. *Shangqiu Teachers College* **17** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2001 商丘师范学院学报 **17** 1]

[9] Lutzky M 1979 *J*. *Phys*. *A*:*Math*. *Gen*. **12** 973

[10] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech*. *Sin*. **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[11] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing:Science Press) p1 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)第 1 页]

[12] Zhang Y and Mei F X 2000 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **45** 1354

[13] Zhang Y and Xue Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 816 (in Chinese) [张　毅、薛　纭 2001 物理学报 **50** 816]

[14] Mei F X 2000 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **9** 120

[15] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 373

[16] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[17] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟　军 2002 物理学报 **51** 1]

[18] Mei F X 1988 *Special Problems in Analytical Mechanics* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) p318 (in Chinese) [梅凤翔 1988 分析力学专题(北京 北京工业学院出版社)第 318 页]

[19] Журавлев В Ф, Фуфаев Н А 1993 *Механика систем с неудерживающими связэями* (Москва:Наука)

[20] Lacomba E A and Tulczyjew W M 1990 *J*. *Phy*. *A*:*Math*. *Gen*. **23** 2801

[21] Ibort A, de León M, Lacomba E A et al 1997 *J*. *Phys*. *A*:*Math*. *Gen*. **30** 5835

[22] Goeleven D, Panagiotopoulos P D, Lebeau C *et al* 1997 *ZAMM Z angew Math*. *Mech*. **77** 483

[23] Zhang Y and Mei F X 2002 *Acta Mech*. *Solid*. *Sin*. **15** 62

[24] Zhang Y and Mei F X 2000 *Appl*. *Math*. *Mech*. **21** 59

Form invariance of mechanical systems with unilateral holonomic constraints*

Zhang Yi

(*Department of Civil Engineering*, *University of Science and Technology of Suzhou*, *Suzhou* 215011, *China*)

(Received 1 April 2003; revised manuscript received 29 April 2003)

Abstract

In this paper, we study the form invariance of a mechanical system with unilateral holonomic constraints. According to the invariance of the form of the differential equation of motion under the infinitesimal transformations, we give the definition and criterion for the form invariance of mechanical systems with unilateral holonomic constraints, and establish the relation between the form invariance and Noether symmetry and Lie symmetry. In the end of the paper, an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: analytical mechanics, unilateral constraint, form invariance, Lie symmetry, Noether symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

---

* Project supported by the Natural Science Foundation of High Education of Jiangsu Province, China (Grant No. 01KJD130002) and the 'Qing Lan' Project Foundation of Jiangsu Province, China.