第 53 卷 第 2 期 2004 年 2 月
1000-3290/2004/53(02)/0356-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53,No.2,February,2004

原子激光传输的有效 *ABCD* 形式研究*

殷建玲[1)2)] 刘承宜[1)3)†] 杨友源[3)] 刘 江[2)] 范广涵[2)]

[1)](华南师范大学激光运动医学实验室，广州 510631)

[2)](华南师范大学信息光电子科技学院，广州 510631)

[3)](香港教育学院科学系，香港)

(2003 年 2 月 26 日收到；2003 年 4 月 10 日收到修改稿)

利用含适量子系统传播子的 *ABCD* 形式的理论，将品质因子守恒系统中的 ABCD 定律，推广到有效品质因子守恒的系统——原子激光的传输中，通过引入有效品质因子和有效参数 $q_{\rm eff}$，利用 Heisenberg 图像得到传播子的有效 *ABCD* 形式. 由于原子激光内部原子间相互作用的存在，原有的品质因子不再守恒，有效品质因子是描述原有品质因子和原子间相互作用综合作用效果的物理量.

关键词：原子激光，传输，有效 *ABCD* 参数，传播子

PACC：0365

1. 引 言

1997 年，麻省理工学院(MIT)成功研制了世界上第一台原子激光器[1]，从而引起了人们对原子激光的广泛关注[2]. 目前，原子激光的空间相干性和时间相干性[3]已经得到了证实，这就意味着原子激光能像光子激光那样从基本场出发来预测其演化. 原子激光的演化大多是用分步傅里叶变换对非线性 Schrödinger 方程进行数值计算，但这种方法只能进行数值模拟，人们期望有更为简单的方法来研究原子激光的传输. Busch 等人[4]用路径积分的方法得到了原子激光在出射过程的传播子，并用传播子关联原子激光在不同时刻的波函数. Yann 等人[5]采用类似于处理光子激光的方法，把引起光束发散的因素看作是可以用 *ABCD* 矩阵来表示的复杂光学系统，然后，用经典力学的方法得到光线的变换矩阵. Liu 等人[6]用量子力学的方法得到品质因子守恒的含时量子系统传播子的 *ABCD* 形式，但是 Liu 等人仅讨论了品质因子守恒的系统，而没有讨论品质因子不守恒的系统. 本文在 Liu 等人的理论基础上，引入守恒的有效品质因子，用量子力学的方法计算了有效品质因子守恒的含时系统——原子激光传播子的有效 *ABCD* 形式，并与 Yann 等人和 Busch 等人的工作进行了比较，本文的结果与原子束通过的势场有关，可以用以研究各种原子束的传输，而且计算极为简单.

2. 基本理论

文献[6]从含时量子系统的状态波函数所满足的 Schrödinger 方程出发，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle = H|\varphi\rangle, \tag{1a}$$

$$H = H_0 + V, H_0 = p^2/2m, \tag{1b}$$

通过定义光束传输参数分别为

$$W^2 = 4\langle(\boldsymbol{r} - \langle\boldsymbol{r}\rangle)^2\rangle/Id,$$

$$\Theta^2 = 4\langle(\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}\rangle)^2\rangle/Id,$$

$$W^2/R = 2\langle(\boldsymbol{r} - \langle\boldsymbol{r}\rangle)\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r} - \langle\boldsymbol{r}\rangle)\rangle/Id$$

和

$$Q^4 = (W^2\Theta^2 - W^4/R^2)/4\hbar^2,$$

得到 Heisenberg 图像中品质因子守恒系统的坐标算子和动量算子之间的线性演化关系，并用 *ABCD* 矩阵来表示这种关系，故相应的传播子也可以表达成 *ABCD* 矩阵元的函数. 然而，正如文献[6]曾提到的，品质因子不守恒的含时量子系统也存在，如原子激

* 国家科技部 2000 年重点攻关计划(批准号：00-068)、广东省自然科学基金团队项目(批准号：20003061)、广东省"千百十工程"优秀人才培养基金(批准号：Q02087)和香港求槎基金(Croucher Foundation)资助的课题.

† E-mail：liutcy@scnu.edu.cn

光由于其内部原子之间存在的相互作用会产生类似于非线性的效果,使得品质因子不再守恒.在这种情况下,就必须推广原有的 *ABCD* 定律,寻找 *ABCD* 定律新的表达式.本文在前文的基础上[6],以原子激光的传输为例进一步讨论有效品质因子守恒的系统,利用 Heisenberg 图像研究原子激光传输的有效 *ABCD* 形式.首先,要看一下原子激光的传输是否满足前文讨论的条件.

目前,大多数理论和实验研究的是可以连续输出 0.1s 的准连续原子激光[7]:用连续射频(rf)辐射处于不对称捕获器($\omega_\perp = \omega_x = \omega_z, \omega_y = \lambda\omega_\perp$)中的玻色-爱因斯坦凝聚物(BEC),其中的原子就会从束缚态的磁次能级跃迁到非束缚态的磁次能级并在重力的作用下加速下落,形成原子激光.未受到辐射时,BEC 的整体已经在重力的作用下偏离了磁化捕获器对称中心 z_E 的距离,由于 z_E 很小,输出耦合面可近似视为平面.原子激光的初始波函数是 BEC 波函数的按比例缩小,$\phi_{td}(x, y, z = z_E, t) = \Gamma(t)\psi_{BEC}(x, y, z = z_E, t)$,$\Gamma(t) \propto \hbar^2\Omega_{rf}^2(t) \ll 1$ 为耦合率[8].

原子激光在传输过程中满足 Schrödinger 方程[4,5]

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(x, y, z, t)\rangle = H'|\psi(x, y, z, t)\rangle,
$$

$$
H' = H_0 + V, H_0 = p^2/2m, \tag{2}
$$

其中$|\psi(x, y, z, t)\rangle$是表征原子激光状态的波函数,H'为系统的哈密顿量,V 为势能,m 是原子的质量.在空间坐标表象中,动量 $\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}$,$\boldsymbol{r}$ 是波束的位置,代表 x, y, z.

原子激光具有良好的方向性并且是准连续的,波函数的横向和纵向可以分离[5,9].

$$
\psi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z, t)\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\sigma(z,t)}
$$

本文讨论势能也可以分离的情况.

$$
V(x, y, z, t) = V_d(x = 0, y = 0, z, t) + V_{trans}(x, y, z, t).
$$

选择适当的路径,使传输距离 z 是时间 t 的函数,并满足 $z'(t) = v(z(t), t)$,$z(t_i) = z_i$,速度 $v(z, t) = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z, t)$.在傍轴近似下(2)式可以化为[5]

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}\sigma(z, t) = &-\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sigma(z, t) \\
&+ \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial z}\sigma(z, t)\right)^2 \\
&+ V_d(x = 0, y = 0, z, t),
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi_{td}(x, y, t)\rangle = H|\phi_{td}(x, y, t)\rangle, \tag{4}
$$

其中

$$
H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 + V_{td}^{trans}(x, y, t)\right),
$$

$$
\phi_{td}(x, y, t) = \phi(x, y, z(t), t)
$$

为横向分布函数,

$$
V_{td}^{trans}(x, y, t) = V_{trans}(x, y, z(t), t)
$$

为横向势能.(4)式描述原子激光的横向分布函数随时间的演化,可以得到一段时间后原子激光的光强、力学量的平均值等特征量,以下所提到的波函数都是指横向分布函数.由(4)式可以看出,原子激光传输所满足的方程与文献[6]所讨论的方程非常一致,故借鉴文献[6]的理论进行讨论.

原子激光是相干原子束,它的传输可以视为物质波的传输.本文仍利用光束传输参数[6,10,11]来表征原子激光的传输:束宽 W 表示空间坐标表象中波函数的形状,发散角 Θ 表示空间动量表象中波函数的形状,曲率半径 R 标度束宽随时间的变化,品质因子 Q 反映不确定关系.动力学变量 F 的期望值为 $\langle F\rangle = \langle\psi|F|\psi\rangle = \langle\phi_{td}|F|\phi_{td}\rangle$.为了后面与 Yann 等人[5]的结论对比的方便,本文对光束参数的定义[6]略作调整(仅仅是调整系数,不会影响光束参数本身的性质):

$$
W^2 = \frac{2}{I}\left\langle(\boldsymbol{r} - \langle\boldsymbol{r}\rangle)^2\right\rangle,
$$

$$
\Theta^2 = \frac{2}{I\hbar^2}\left\langle(\boldsymbol{p} - \langle\boldsymbol{p}\rangle)^2\right\rangle,
$$

$$
\frac{W^2}{R} = \frac{1}{I\hbar}\left\langle(\boldsymbol{r} - \langle\boldsymbol{r}\rangle)\cdot\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r} - \langle\boldsymbol{r}\rangle)\right\rangle,
$$

$$
Q^4 = \frac{1}{4}\left(W^2\Theta^2 - \frac{W^4}{R^2}\right),
$$

其中 I 为归一化因子.原子激光是中心对称系统,$\langle x\rangle = \langle y\rangle = 0$.

利用前文的方法[6]可以得到类似的结论,如

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle F\rangle = \mathrm{i}\hbar\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle + \langle[F, H]\rangle, \tag{5}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}t} = \frac{2\hbar}{m}\frac{W^2}{R}, \tag{6}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}Q^4}{\mathrm{d}t} = \frac{W^2}{4}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}t} - \frac{m^2}{8\hbar^2}\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2W^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{2\hbar^2}{m^2}\Theta^2\right), \tag{7}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}^2W^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{2\hbar^2}{m^2}\Theta^2 - \frac{4}{Im}\left\langle\boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}V\right\rangle. \tag{8}
$$

(7)式可以判断系统的品质因子是否守恒.由于原子

激光内部原子间所存在的相互作用会产生类似于非线性的效应,即产生一项与 $|\varphi_{td}|^2$ 有关的因子,使得(7)式不等于零,故原子激光属于品质因子不守恒的系统.对于这样的系统,如果可以将(7)式右边化为全微分的形式,即可以定义有效发散角 Θ_{eff} 使相应的有效品质因子 Q_{eff} 守恒,同时引入有效复数曲率半径 q_{eff},

$$\Theta_{eff}^2 = \Theta^2 - \frac{2m}{I\hbar}\langle \boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V_n\rangle, \tag{9}$$

$$Q_{eff}^4 = \frac{1}{4}\left(W^2\Theta_{eff}^2 - \frac{W^4}{R^2}\right), \tag{10}$$

$$q_{eff}^{-1} = R^{-1} + 2\mathrm{i}Q_{eff}^2W^{-2}. \tag{11}$$

值得注意的是,(9)式中出现的势能 V_n 是指使品质因子不守恒的势能项.

由(10)式可以发现,对于原子激光,在原子间存在相互作用的情况下,原来定义的描述光束质量的品质因子不再是一个不变量,保持恒定不变的是品质因子和原子间相互作用共同作用的有效品质因子.如果可以找到守恒的有效品质因子,就可以由(6)和(7)式得到有效品质因子守恒的充要条件

$$\frac{\mathrm{d}Q_{eff}^4}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{\hbar}\frac{\mathrm{d}q_{eff}}{\mathrm{d}t} = 1 - q_{eff}^2\frac{\mathrm{d}\Theta_{eff}^2}{\mathrm{d}W^2}. \tag{12}$$

引入 Rucatti 代换[12] $(1/q(t) = [m/\hbar u(t)]\mathrm{d}u(t)/\mathrm{d}t)$,从而用 $ABCD$ 参数来关联不同时刻的复数曲率半径

$$q_{2eff}^{-1} = (C + Dq_{1eff}^{-1})(A + Bq_{1eff}^{-1})^{-1}, \tag{13}$$

$$C = \frac{m}{\hbar}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t_2}, D = \frac{m}{\hbar}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t_2}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t_2} = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t_2} = \frac{\hbar}{m}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}. \tag{15}$$

由(14)和(15)式可知,$AD - BC$ 与时间 t 无关,为常数,又根据本文光束参数的定义,故取 $AD - BC = 1$.相应于前面的 $ABCD$ 参数,把本文得到的参数称为有效 $ABCD$ 参数.由(12)式可以证明,有效品质因子守恒是(13)式成立的充要条件.这样,通过引入有效品质因子和有效参数 q_{eff},就可以把 $ABCD$ 定律这种简单形式推广到有效品质因子守恒系统.

原子激光的势能是实函数,故 A, B, C 和 D 为实数,可以利用前文的方法[6]得到

$$W_2^2 = (A + BR_1^{-1})^2W_1^2 + 4B^2Q_{eff}^4W_1^{-2}, \tag{16}$$

$$\frac{W_2^2}{R_2} = (A + BR_1^{-1})(C + DR_1^{-1})W_1^2 + 4BDQ_{eff}^4W_1^{-2}, \tag{17}$$

$$\Theta_{2eff}^2 = (C + DR_1^{-1})^2W_1^2 + 4D^2Q_{1eff}^4W_1^{-2}. \tag{18}$$

如果再引入演化算子 $U(t,0)$,使得 $|\varphi_i(t_i)\rangle = U_i(t_i,0)|\varphi(0)\rangle (i = 1,2)$ 成立,然后,利用 Heisenberg 图像的定义[6]、光束传输参数的定义以及(9),(16)和(18)式就得到

$$r_{H2}^2 = \left(A\boldsymbol{r}_{H1} + B\frac{\boldsymbol{p}_{H1}}{\hbar}\right)^2 - \frac{m}{\hbar}B^2[\boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V_n(\boldsymbol{r},t)]_{H1}, \tag{19}$$

$$\frac{p_{H2}^2}{\hbar^2} - \frac{m}{\hbar}[\boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V_n(\boldsymbol{r},t)]_{H2} = \left(C\boldsymbol{r}_{H1} + D\frac{\boldsymbol{p}_{H1}}{\hbar}\right)^2 - \frac{m}{\hbar}D^2[\boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V_n(\boldsymbol{r},t)]_{H1}, \tag{20}$$

$$r^2T = T\left(A\boldsymbol{r} + B\frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)^2 - \frac{m}{\hbar}B^2T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V_n(\boldsymbol{r},t_1), \tag{21}$$

$$\frac{p^2}{\hbar^2}T - \frac{m}{\hbar}\boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V_n(\boldsymbol{r},t_2)T = T\left(C\boldsymbol{r} + D\frac{\boldsymbol{p}}{\hbar}\right)^2 - \frac{m}{\hbar}D^2T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_\perp V_n(\boldsymbol{r},t_1), \tag{22}$$

其中 $V_n(\boldsymbol{r},t_i)$, $i = 1,2$ 仍是指使品质因子不守恒的势能项,变换算子,$T(t_2,t_1) = U_2(t_2,0)U_1^+(t_1,0)$,它在空间坐标表象中的表示就是相应的传播子 $K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;t_2,t_1) = \langle\boldsymbol{r}_2|T(t_2,t_1)|\boldsymbol{r}_1\rangle$,利用传播子可以关联初、末状态的波函数

$$\varphi_{td2}(\boldsymbol{r}_2,t_2) = \int K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;t_2,t_1)\varphi_{td1}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1. \tag{23}$$

由前文[6]可知,品质因子守恒系统的空间坐标算子和动量算子的变换是线性的,这里将线性算子记为 T_0.(21)与(22)式表明,本文的品质因子不守恒系统的空间坐标算子和动量算子的变换是非线性的.由于非线性变换很难得到严格解,本文采用近似方法进行计算[13,14].在空间坐标表象中,与线性变换算子 T_0 相应的传播子可以记为 K_0,

$$K_0(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;t_2,t_1) = \left(-\frac{\mathrm{i}}{Bh}\right)\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{Bh}(Ar_1^2 - 2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2 + Dr_2^2)\right].$$

如果满足(21)和(22)式的变换可以写为 $T = (1 + T_1)T_0$,则相应的传播子就可以写为

$$K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;t_2,t_1) = K_0(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;t_2,t_1) + \int K_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3;t_2,t_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_3 \times K_0(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_1;t_2,t_1). \tag{24}$$

然后,利用变换算子 T_0 的性质($T_0^{+}=T_0^{-1}$)、线性变换及(21)和(22)式可得

$$[\boldsymbol{r},T_1]=-\frac{m}{\hbar}B^2\,T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp}V_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r},t_1)\,T_0^{+},\qquad(25)$$

$$\left[\frac{p^2}{\hbar^2},T_1\right]=\frac{m}{\hbar}T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp}V_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r},t_2)-\frac{m}{\hbar}D^2\,T\boldsymbol{r}\cdot\nabla_{\perp}V_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r},t_1)\,T_0^{+},\qquad(26)$$

其中泊松括号[]代表对易关系.(25)式在空间坐标表象中的表示为

$$K_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3;t_2,t_1)=-\frac{mB^2}{\hbar(r_2^2-r_3^2)}\int K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4,t_2,t_1)\,\boldsymbol{r}_4\cdot\frac{\partial V_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}_4,t_1)}{\partial\boldsymbol{r}_4}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4\,K_0^{*}(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4;t_2,t_1).\qquad(27)$$

利用(24)和(27)式进行迭代求解就得到光束传输的传播子.如果引起品质因子不守恒的势能为小量,就可以将(24)式代入(27)式并忽略 T_1 项得到

$$K_1(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3;t_2,t_1)=-\frac{mB^2}{\hbar(r_2^2-r_3^2)}\int K_0(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_4;t_2,t_1)\,\boldsymbol{r}_4\cdot\frac{\partial V_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r}_4,t_1)}{\partial\boldsymbol{r}_4}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_4\,K_0^{*}(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4;t_2,t_1).\qquad(28)$$

再把(28)式代入(24)式即传播子的有效 *ABCD* 形式.将所得到的传播子和初态波函数代入(23)式并通过简单的积分计算就可以得到末态的波函数.

3. 应　　用

本文以原子激光在从 BEC 中穿出过程、在磁化捕获器没关闭的情况下传输以及在自由空间传输这三个过程为例,讨论对上述方法的应用,并在讨论部分与 Yann 等人利用经典力学的方法得到的结果[5]进行比较.

原子激光产生以后先要通过辐射面以下的部分 BEC,在这个过程中,总势能为

$$V_{\mathrm{total}}(x,y,z,t)=U\,|\,\psi_{\mathrm{BEC}}(x,y,z,t)\,|^2+U\,|\,\varphi(x,y,z,t)\,|^2+V_{\mathrm{QZE}}(\boldsymbol{r})-mgz,\qquad(29)$$

其中 $U|\psi_{\mathrm{BEC}}(x,y,z,t)|^2$ 是 BEC 中原子和光束中原子间的相互作用所产生的势能,$U|\varphi(x,y,z,t)|^2$ 是光束内部原子间的相互作用所产生的势能,$V_{\mathrm{QZE}}(\boldsymbol{r})=-\mu_{\mathrm{B}}B^2(\boldsymbol{r})/B_{\mathrm{HF}}$ 是二次塞曼效应所产生的势能,与第一项相比可以忽略,$-mgz$ 是重力势能.假设 BEC 的波函数在整个过程中保持不变,由于势能和波函数的可分离性,原子激光在托马斯-费米(TF)近似严格成立的条件下,其横向势能为

$$V_{\mathrm{td}}^{\mathrm{trans}}(x,y,t)=\mu\left(1-\frac{x^2}{R_x^2}-\frac{y^2}{R_y^2}\right)+U\,|\,\varphi_{\mathrm{td}}(x,y,t)\,|^2,\qquad(30)$$

其中 μ 为化学势,U 为 s 波耦合强度,$R_x=\sqrt{2\mu/m\omega_{\perp}^2}$,$R_y=\sqrt{2\mu/m\omega_y^2}$ 为 TF 半径.由于 $\omega_{\perp}\neq\omega_{\perp}$,故上式第一项中 x,y 方向的系数不同引起品质因子不守恒.为此,我们引入新坐标 $\boldsymbol{r}'=x\boldsymbol{i}+ky\boldsymbol{j}$ 来代换光束参数中的 $\boldsymbol{r}$,k 是使平方势能项 x,y 方向系数相同的参数(在不同过程中取值不同),在这个过程中 $k=\lambda$.这样,(30)式就可以写成非线性平方率介质[15]的形式.将势能代入(7)式可知,使品质因子不守恒的势能项是 $V_{\mathrm{n}}=U|\varphi_{\mathrm{td}}|^2$ 并且比平方项大约小三个量级,可以视为小量,符合(28)式成立的条件,所以可以利用前述方法得到传播子的有效 *ABCD* 形式.首先,利用(7),(8)和(30)式可得

$$\frac{\mathrm{d}Q^4}{\mathrm{d}t}=-\frac{mU}{2\hbar^2}W^2\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}-\frac{mU}{2\hbar^2}J\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}t},\qquad(31)$$

其中 $J=\frac{1}{I}\int|\varphi_{\mathrm{td}}|^4\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.因而,守恒的有效品质因子为

$$Q_{\mathrm{eff}}^4(t)=Q^4+\frac{mU}{2\hbar^2}W^2J\equiv Q_{\mathrm{eff}}^4(0).\qquad(32)$$

然后,利用(7),(9),(10)和(32)式可以得到方程

$$\frac{m}{\hbar}\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}t}=1-\frac{2m\mu}{\hbar^2R_{\mathrm{TF}}^2}q_{\mathrm{eff}}^2.\qquad(33)$$

最后,解(33)式就得到这个过程的有效 *ABCD* 参数

$$M_1(t_1)=\begin{pmatrix}A_1 & B_1\\ C_1 & D_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}}\frac{t_1}{R_x}\right) & \frac{\hbar R_x}{\sqrt{2\mu m}}\sinh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}}\frac{t_1}{R_x}\right)\\ \frac{\sqrt{2\mu m}}{\hbar R_x}\sinh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}}\frac{t_1}{R_x}\right) & \cosh\left(\sqrt{\frac{2\mu}{m}}\frac{t_1}{R_x}\right)\end{pmatrix}.\qquad(34)$$

由于 x,y 方向不对称，y 方向的变换矩阵实际上要用 R_y 来代替(32)式中的 R_x.

原子激光经历上述过程后从 BEC 中射出，如果磁化捕获器仍然打开，就要考虑二次塞曼效应所产生的势能，这时，横向势能在忽略高阶小量的情况下表示为

$$V_{\mathrm{td}}^{\mathrm{trans}}(x,y,t) \approx -\frac{m}{2}\Omega^2(x^2+k^2y^2)+U\mid\varphi_{\mathrm{td}}\mid^2. \tag{35}$$

在这个过程中 $k\to0$，(35)式类似于(34)式且非线性项仍然是 $V_{\mathrm{n}}=U|\varphi_{\mathrm{td}}|^2$，仿照前一过程可得在磁化捕获器打开情况下原子激光在空间传输过程中的有效 $ABCD$ 参数

$$M(t_2)=\begin{pmatrix}\cosh(\Omega t_2) & \frac{\hbar}{m\Omega}\sinh(\Omega t_2)\\ \frac{m\Omega}{\hbar}\sinh(\Omega t_2) & \cosh(\Omega t_2)\end{pmatrix}. \tag{36}$$

由于 y 方向的系数趋于零($k\Omega\to0$)，所以原子激光在 y 方向的演化可以看作在自由空间的传输.

磁化捕获器关闭后，原子激光在自由空间传输，其横向势能 $V_{\mathrm{td}}^{\mathrm{trans}}(x,y,t)=U|\varphi_{\mathrm{td}}|^2$，非线性项 $V_{\mathrm{n}}=U|\varphi_{\mathrm{td}}|^2$，故自由传输过程的有效 $ABCD$ 参数为

$$M(t_3)=\begin{pmatrix}1 & \frac{\hbar}{m}t_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{37}$$

将所得到的有效 $ABCD$ 参数代入(24)和(28)式，就可以得到不同过程中传播子的表达式，如果知道初始波函数，由(23)式就可以推出末态的波函数.利用本文所给的方法，可以将用分步傅里叶变换才能解决的非线性 Schrödinger 方程通过简单的积分进行准确求解.

原子激光在经历从 BEC 中穿出过程、在磁化捕获器没关闭的情况下传输以及在自由空间传输的总过程之后，总的变换矩阵在 x,y 方向分别满足 $M(t_3)M(t_2)M(t_1)$和 $M_y(t_3+t_2)M_y(t_1)$.

4. 讨 论

本文在前文讨论品质因子守恒的含时量子系统的基础上，引入有效品质因子，并以原子激光的传输为例进一步讨论了有效品质因子守恒系统传播子的有效 $ABCD$ 形式.结果表明，有效参数 q_{eff}和原来的参数 q 的区别在于，它除了和 q 参数一样是曲率半径、束宽、发散角的函数外，还是原子间相互作用的函数.在引入有效参数 q_{eff}以后，有效 $ABCD$ 定律将适用于含有强度类非线性情况下的傍轴原子激光的传输.此时的有效品质因子将为描述原子激光光束质量的参数——品质因子和原子间相互作用共同作用的物理量.品质因子不再是恒量，因为此时原子间相互作用将影响光束质量.虽然本文所引入的有效光束参数不能直接进行测量，但是可以在初、末状态之间建立一种简单的关系，而光束参数是可以直接进行测量的物理量，如束宽等，利用有效光束参数和光束参数间的关系，就可以得到有效光束参数.

与文献[4]对比可知，Yann 等人得到的是不同势能项所引起的变换矩阵[5]，本文得到的是不同过程中的变换矩阵，由于在不同过程中只有一项势能起主要作用，并且本文把原子间相互作用归入了有效品质因子和有效参数 q_{eff}中，故是否考虑原子间相互作用对变换矩阵都没有影响，所以我们可以比较两者的结果.如果(34)式中时间取 $t_1^2\approx2(R_z-z_0)/g\to0$，得到的(34)—(37)式就与 Yann 等人的结果(文献[5]中(3)—(5)式)完全相同.考虑原子激光经历从 BEC 中穿出过程、在磁化捕获器没关闭的情况下传输以及在自由空间传输的总过程情况，x,y 方向上总的变换矩阵满足 $M_x(t_3)M_x(t_2)M_x(t_1)$和 $M_y(t_3+t_2)M_y(t_1)$，这与 Yann 等人不考虑原子激光内部原子间的相互作用，利用经典力学的方法计算不同势能项所得到的总变换矩阵 $M_{\mathrm{FF}}(t_{\mathrm{F}})M_2(t_2)M_{1x}(z_0)$和 $M_{\mathrm{FF}}(t_2+t_{\mathrm{F}})M_{1y}(z_0)$是一致的.以上与 Yann 等人相同的结论证明了本文理论的正确性.在此基础上，本文相对于 Yann 等人的方法还具有以下优点：一是本文对波函数的形式没有要求，二是本文考虑了光束中原子间相互作用所产生的非线性势能项，所以我们得到的是有效 $ABCD$ 参数，由于本文在得到(34)式时没有采用薄透镜近似，故无论时间是否趋于零(34)式都适用，因此，本文方法的适用范围更为广泛.

利用迭代方法本文还得到传播子的表达式，与 Busch 等人的路径积分法[4]相比，本文不仅考虑到非线性项，且方法更为简单.本文在以往光束参数的基础上还引入了参数 k，从而能够更为简单地处理不对称系统.指出 V_{n} 是使品质因子不守恒的势能项，进一步明确了有效发散角的定义.利用本文所提供的方法还可以研究原子激光在其他介质中的传输.

[1] Mewes M O *et al* 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **78** 582
[2] Jing H 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 186
[3] Köhl M, Hänsch T W and Esslinger T 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **87** 160404
[4] Busch Th, Kohl M *et al* 2002 *Phys*. *Rev*. A **65** 043615
[5] Coq Y L *et al* 2001 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **87** 170403
[6] Liu T C Y, Liu J, Yin J L *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2431(in Chinese)[刘承宜、刘 江、殷建玲 等 2002 物理学报 **51** 2431]
[7] Bloch I *et al* 1999 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **82** 3008
[8] Ballagh R and Savage C M 2000 *Bose-Einstein Condensation*:Atomic Physics to Quantum Fluids, Proceedings of the 13th Physics Summer School edited by Savage C M and Das M P (World Scientific, Singapore)
[9] Wiseman H M 1997 *Phys*. *Rev*. A **56** 2068
[10] Liu T C Y, Guo H, Hu W and Deng X M 2000 *Chin*. *Phys*. *Lett* **17** 734
[11] Liu T C Y, Guo H, Hu W and Deng X M 2000 *Science in China* (Series A) **43** 312
[12] Tovar A A and Casperson L W 1995 *J*. *Opt*. *Soc*. A **12** 1552
[13] Liu T C Y, Hu W, Lu G S and Guo H 2000 *Acta Optica*. *Sin*. **21** 1280(in Chinese)[刘承宜、胡 巍、卢光山、郭 弘 2000 光学学报 **21** 1280]
[14] Liu T C Y, Deng D M, Hu W and Guo H 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 524(in Chinese)[刘承宜、邓冬梅、胡 巍、郭 弘 2002 物理学报 **51** 524]
[15] Porras M A, Aida J and Bernabeu E 1992 *Opt*. *And*. *Quant*. *Electron* **24** S1051

Effective *ABCD* formulation of the propagation of the atom laser*

Yin Jian-Ling[1)2)] Liu Cheng-Yi[1)3)†] Yang You-Yuan[3)] Liu Jiang[2)] Fan Guang-Han[2)]

[1)] (*Laboratory of Laser Sports Medicine*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510631, *China*)

[2)] (*School for Information and Optoelectronic Science and Engineering*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510631, *China*)

[3)] (*Department of Science*, *Hong Kong Institute of Education*, *Hong Kong*, *China*)

(Received 26 February 2003; revised manuscript received 10 April 2003)

Abstract

Within the frame of the *ABCD* formulation for the propagators in a time-dependent quantum system, the *ABCD* law has been extended to the so – called effective *ABCD* system in which the effective beam quality factor is conservative. We discussed the system as the propagation of the atom laser beam. The effective beam quality factor and the effective parameter are introduced to obtain the effective *ABCD* formulation of the propagators by means of Heisenberg picture. The atom-atom interactions in the atom laser beam make the beam quality factor nonconservative, and thus the effective beam quality factor can describe the combined effect of the beam quality factor and the atom-atom interaction.

Keywords: atom laser beam, propagation, effective *ABCD* parameter, propagator

PACC: 0365

* Project supported by the 2000 key program of Chinese Department of Sciences and Technology (Grant No. 00-068), Team project of the Natural Science Foundation of Guangdong Province (Grant No. 20003061), the Guangdong Qibaishi Fellow Foundation (Grant No. Q02087) and the Croucher Foundation of Hong Kong.

† E-mail: liutcy@scnu.edu.cn