第 53 卷 第 2 期 2004 年 2 月
1000-3290/2004/53(02)/0362-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.53, No.2, February, 2004

Sen 黑洞熵与能斯特定理*

张丽春　赵　仁†

（雁北师范学院物理系，大同　037000）

（2003 年 2 月 21 日收到；2003 年 4 月 9 日收到修改稿）

避开求解黑洞背景下波动方程的困难，应用量子统计方法，直接求解轴对称 Sen 黑洞背景下 Bose 场和 Fermi 场的配分函数. 然后利用改进的 brick-wall 方法-膜模型，计算黑洞背景下 Bose 场和 Fermi 场的熵. 得到黑洞熵不但与黑洞的外视界面积有关，而且也是内视界面积的函数. 在所得结论中不存在对数发散项与舍去项，也不存在黑洞视界外标量场或 Dirac 场为什么是黑洞熵疑难，并且给出粒子的自旋简并度对黑洞熵的影响. 当黑洞的辐射温度趋于绝对零度时，由黑洞内外视界面积决定的黑洞熵也趋于零，它满足能斯特定理，可视为黑洞的普朗克绝对熵.

关键词：膜模型，黑洞熵，能斯特定理

PACC：0420，9760L

1. 引　　言

20 世纪 70 年代初期，Bekenstein[1]，Hawking[2]，Bardeen[3] 等人提出了黑洞熵与其视界面积成正比的一套理论，从此黑洞热力学的研究获得了长足的进步，尤其是 Hawking 辐射的证明[2]，更刺激了人们研究黑洞热性质的积极性. 人们发现若把黑洞的表面重力 κ 看作温度，把黑洞视界的面积 A 看作熵，则可以建立起相当完美的与普通热力学 4 条定律相对应的黑洞热力学四定律. 此后，人们花了大量精力致力于探寻黑洞热力学，特别是探讨黑洞熵的统计起源. 因而各种求熵的方法应运而生[4—9]. 其中一种用得最多的方法是 't Hooft 提出的 brick-wall 方法[7]，人们用此方法研究了各种黑洞背景下自由标量场的统计性质[10—13]，得到了熵关于视界面积的一个表达式，验证了熵与其外视界面积成正比的关系，对 Schwarzschild 时空[7]，当截断因子满足一定的关系时，熵可写成 $S = A_{\rm H}/4$ 的形式. 而当截断因子趋于零时，熵会发散，'t Hooft 认为这一发散是由于视界附近态密度会趋于无穷造成的. 以后，人们用该方法研究了各种黑洞的熵[11—13]，但以往利用 brick-wall 方法时，对于较复杂的时空，都采用在外视界附近近似求积分的方法，来得到熵与外视界面积成正比的关系式.

本文直接运用量子统计的方法[14]，计算在轴对称 Sen 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数，得到系统熵的积分表达式. 然后应用膜模型计算黑洞的熵[15,16]. 由于我们直接采用了量子统计方法，回避了原 brick-wall 方法中求解波动方程的困难. 所得熵的表达式中，不但与黑洞外视界面积有关，而且也是内视界面积的函数. 当我们所得结论在取极限时，可得出熵只与黑洞外视界面积有关的形式. 进一步研究表明，用内外视界位置参量表达的熵，当黑洞的辐射温度趋于绝对零度时，黑洞的熵也趋于零. 满足能斯特定理. 本文取温度的最简单函数形式（$C = \hbar = G = K_{\rm B} = 1$）.

2. Sen 黑洞

文献[17]给出 Sen 黑洞时空线元

$$
\mathrm{d}s^2 = -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\mathrm{d}t^2 - \frac{4\mu ra\cosh^2\gamma\sin^2\theta}{\Sigma}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2 + \frac{\Lambda}{\Sigma}\mathrm{d}\varphi^2, \tag{1}
$$

式中

$$
\Delta = r^2 - 2\mu r + a,
$$
$$
\Sigma = r^2 + a^2\cos\theta + 2\mu r\sinh^2\gamma,
$$
$$
\Lambda = (r^2 + a^2)(r^2 + a^2\cos^2\theta) + 2\mu ra^2\sin^2\theta
$$

---

* 山西省自然科学基金（批准号：20001009）资助的课题.

† E-mail：zhao2969@sina.com

$$+4\mu r(r^2+a^2)\sinh^2\gamma+4\mu^2r^2\sinh^4\gamma.$$

其中质量 M，电荷 Q，角动量 J 和视界位置 r_+ 与参数 μ,γ,a 之间的关系是

$$M=\frac{\mu}{2}(1+\cosh2\gamma),\ Q=\frac{\mu}{\sqrt{2}}\sinh2\gamma,$$

$$J=\frac{a\mu}{2}(1+\cosh2\gamma),\ r_\pm=\mu\pm\sqrt{\mu^2-a^2}.$$

黑洞外视界的表面重力

$$\kappa=\frac{\sqrt{(2M^2-Q^2)-4J^2}}{2M\{2M^2-Q^2+[(2M^2-Q^2)-4J^2]^{1/2}\}},\tag{2}$$

Hawking 辐射温度为

$$T_H=\frac{\kappa}{2\pi}=\frac{1}{\beta}$$
$$=\frac{\sqrt{(2M^2-Q^2)-4J^2}}{4\pi M\{2M^2-Q^2+[(2M^2-Q^2)-4J^2]^{1/2}\}}.\tag{3}$$

黑洞外事件视界面积

$$A_+=8\pi M\left\{M-\frac{Q^2}{2M}+\left[\left(M-\frac{Q^2}{2M}\right)^2-\frac{J^2}{M^2}\right]^{1/2}\right\}.\tag{4}$$

3. 玻色场的熵

根据广义相对论理论，静止于无穷远处的观测者看到的，来自恒星表面粒子的频率移动

$$\nu=\nu_0\lambda^{1/2}.\tag{5}$$

其中 ν_0 为恒星表面处原子的固有频率，ν 为无穷远静止观测者测得的该粒子的固有频率.

无穷远静止观测者，测得的固有辐射温度[12,18]：

$$T=\frac{T_H}{\sqrt{-\tilde{g}_{tt}}}.\tag{6}$$

式中

$$\tilde{g}_{tt}=\frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi}-g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}}=-\frac{(r-r_+)(r-r_-)(r^2+2\mu r\sinh^2\gamma)}{(r^2+2\mu r\sinh^2\gamma+a^2)^2-(r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta}.\tag{7}$$

对于玻色气体，系统的配分函数为

$$\ln Z=-\sum_i g_i\ln(1-e^{-\beta\varepsilon_i}).\tag{8}$$

在单位体积内，能量在 ε 到 $\varepsilon+d\varepsilon$ 或 ν 到 $\nu+d\nu$ 间隔内，粒子的量子态数应为

$$g(\nu)d\nu=j4\pi\nu^2d\nu.\tag{9}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度. 由于时空(1)中，任意 r 点的二维曲面为

$$A(r)=\int dA=\int\sqrt{g}\,d\theta d\varphi,\tag{10}$$

式中 $g=\begin{vmatrix}g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi}\\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi}\end{vmatrix}=g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}$. 那么在视界外，任意 r 点的壳层体积元为

$$dV=A(r)\sqrt{g_{rr}}\,dr.\tag{11}$$

所以，在黑洞视界外，任意 r 点任意厚度的壳层内系统的配分函数为[19]

$$\ln Z=\int A(r)\sqrt{g_{rr}}\,dr\sum_i g_i\sum_{n=1}\frac{1}{n}e^{-n\beta\varepsilon_i}$$
$$=j4\pi\int A(r)\sqrt{g_{rr}}\,dr\sum_{n=1}\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\frac{nh\nu}{T}}\nu^2d\nu$$
$$=j\frac{1}{90}\pi^2\int\frac{A(r)\sqrt{g_{rr}}\,dr}{\beta^3}$$
$$=j\frac{\pi^2}{90}\int\frac{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}g_{rr}}\,dr d\theta d\varphi}{\beta^3},\tag{12}$$

其中$\frac{1}{\beta}=T$，利用熵与配分函数的关系

$$S=\ln Z-\beta_0\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta_0},\tag{13}$$

可得

$$S_b=j\frac{2}{45}\pi^2\frac{1}{\beta_0^3}\int\frac{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}g_{rr}}\,dr}{(-\tilde{g}_{tt})^{3/2}}$$
$$=j\frac{2\pi^2}{45\beta_0^3}\int d\theta d\varphi\int\frac{[(r^2+a^2+2\mu r\sinh^2\gamma)^2-(r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta]^2\sin\theta}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta+2\mu r\sinh^2\gamma)}dr.\tag{14}$$

式中 $\beta_0=\frac{1}{T_H}$，$\beta=\beta_0\sqrt{-\tilde{g}_{tt}}$. (14)式积分，对 r 取积分区间为 $[r_++\zeta,r_++N\zeta]$. 其中 ζ 为一非负的小量，N 为一大于 1 的常数. 则

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{b}} &= j\frac{4\pi^3}{45\beta_0^3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{r_+ +\zeta}^{r_+ + N\zeta}\frac{[(r^2+a^2+2\mu r\sinh^2\gamma)^2-(r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta]^2\sin\theta}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta+2\mu r\sinh^2\gamma)}\mathrm{d}r\\
&= j\frac{4\pi^3}{45\beta_0^3}\int_0^{\pi}\frac{(r_+^2+a^2+2\mu r_+\sinh^2\gamma)^4}{(r_+-r_-)^2(r_+^2+a^2\cos^2\theta+2\mu r_+\sinh^2\gamma)}\left[\frac{N-1}{N\zeta}\right]\sin\theta\mathrm{d}\theta+G(r_+,N,\zeta)\\
&= j\frac{8\pi^3}{45\beta_0^3}\frac{(r_+^2+a^2+2\mu r_+\sinh^2\gamma)^4}{(r_+-r_-)^2}\frac{\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\left[\frac{N-1}{N\zeta}\right]+G(r_+,N,\zeta)+f(r_+,\theta)\\
&= j\frac{8\pi^3}{45\beta_0^3}\frac{(2\mu r_+\cosh^2\gamma)^3}{(r_+-r_-)^2}\frac{\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\left[\frac{N-1}{N\zeta}\right]+G(r_+,N,\zeta)+f(r_+,\theta)\\
&= j\frac{8\pi^3}{45\beta_0^3}\frac{(2Mr_+)^3}{(r_+-r_-)^2}\frac{\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\left[\frac{N-1}{N\zeta}\right]+G(r_+,N,\zeta)+f(r_+,\theta),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

式中

$$f(r_+,\theta)=\left[\left.\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_+}-y_2(r_+)\right]\ln N,$$

$$\alpha=\mathrm{arctg}\frac{a}{\sqrt{r_+^2+2\mu r_+\sinh^2\gamma}},$$

$$
\begin{aligned}
G(r_+,N,\zeta) &= j\frac{4\pi^3}{45\beta_0^3}\int_0^{\pi}\int_{r_+ +\zeta}^{r_+ + N\zeta}[f_1(r,\theta)+f_2(r,\theta)\\
&\quad + f_3(r,\theta)]\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r,
\end{aligned}
$$

$$f_1(r,\theta)=\sum_{n=2}\frac{1}{n!}y_1^{(n)}(r_+)(r-r_+)^{n-2}\mathrm{d}r,$$

$$f_2(r,\theta)=\sum_{n=1}\frac{1}{n!}y_2^{(n)}(r_+)(r-r_+)^{n-2}\mathrm{d}r,$$

$$f_3(r,\theta)=\sum_{n=0}\frac{1}{n!}y_3^{(n)}(r_+)(r-r_+)^{n-2}\mathrm{d}r,$$

$$y_1=\frac{(r^2+a^2+2\mu\sinh^2\gamma)^2}{(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta+2\mu r\sinh^2\gamma)},$$

$$y_2=-\frac{2(r^2+a^2+2\mu\sinh^2\gamma)^2a^2\sin^2\theta}{(r-r_-)(r^2+a^2\cos^2\theta+2\mu r\sinh^2\gamma)},$$

$$y_3=\frac{a^4\sin^4\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta+2\mu r\sinh^2\gamma)}$$

$$y_1^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^ny_1}{\mathrm{d}r^n},y_2^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^ny_2}{\mathrm{d}r^n},y_3^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^ny_3}{\mathrm{d}r^n}.$$

由文献[7]中的(3.17)知,当 $N\zeta=L\gg r_+$ 时,如取

$$\zeta=\frac{1}{90\times 8\pi M},\tag{16}$$

可得到黑洞熵的主导项与视界面积成正比的关系.

众所周知,黑洞熵是与视界面积成正比的,而且视界的存在是黑洞最基本的性质.已经证明,视界的存在普遍导致 Hawking 效应[20].又黑洞熵的有无直接与视界的存在与否有关[21].那么,由此启示我们:与视界面积成正比是黑洞熵的内禀性质,它的取值大小与视界外的辐射场无关,而只是视界作为三维空间里的一个二维膜所具有的性质,为此在我们计算黑洞熵的(15)式中不应与 N 和 ζ 有关,并且考虑到当 $\alpha\to 0$,$N\to\infty$ 时,我们所取的截断因子应回到文献[7]所给的(3.17)式.为此对 Sen 黑洞我们取紫外截断因子

$$\zeta=\frac{1}{90\times 8\pi M}\frac{\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\frac{N-1}{N},\tag{17}$$

和'红外'截断因子 $N\zeta$,则

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{b}} &= j\pi M\frac{r_+-r_-}{2}+G(r_+,N,\zeta)+f(r_+,\theta)\\
&= j\frac{1}{4}[A_+-A_-]+G(r_+,N,\zeta)+f(r_+,\theta),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

式中 $A_-=4\pi 2Mr_-$,为黑洞的内视界面积.

当 $N\to 1$ 时,$\zeta\to 0$,$N\zeta\to 0$ 即紫外截断因子与"红外"截断因子都趋于黑洞的外视界上,然而所求的黑洞熵为

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{b}} &= \frac{j}{4}[A_+-A_-]\\
&= j2\pi M\left[\left\{M-\frac{Q^2}{2M}+\left[\left(M-\frac{Q^2}{2M}\right)^2-\frac{J^2}{M^2}\right]^{1/2}\right\}\right.\\
&\quad \left.-\left\{M-\frac{Q^2}{2M}-\left[\left(M-\frac{Q^2}{2M}\right)^2-\frac{J^2}{M^2}\right]^{1/2}\right\}\right].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

在计算中我们应用了 $\lim\limits_{N\to 1}G(r_+,N,\zeta)\to 0$,和 $\lim\limits_{N\to 1}f(r_+,\theta)\to 0$.由于当紫外截断因子与'红外'截断因子都趋于黑洞的外视界上,所以我们计算的熵与黑洞外辐射场无关,故(19)式所给出的熵应为黑洞熵.

4. Fermi 场的熵

对于 Fermi 系统,巨配分函数

$$\ln Z = \sum_i g_i \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon_i}), \tag{20}$$

由(9)式,可得

$$\begin{aligned}\ln Z &= \int A(r)\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-n\beta\varepsilon_i} \\ &= i4\pi \int A(r)\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{nh\nu}{T}} \nu^2 \mathrm{d}\nu \\ &= i\frac{\pi^2}{90}\frac{7}{8}\int \frac{A(r)\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r}{\beta^3} \\ &= i\frac{\pi^2}{90}\frac{7}{8}\int \frac{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}g_{rr}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\beta^3},\end{aligned} \tag{21}$$

利用第三部分的方法,可得 Fermi 场的熵为

$$S_{\mathrm{f}} = i\frac{7}{8}\frac{1}{4}[A_+ - A_-]. \tag{22}$$

式中,i 为费米子自旋简并度.

5. 结　　论

由(19)式和(22)式知,当黑洞的内视界位置相对外视界位置很小时,即 $r_+ \gg r_-$ 时,我们的结论回到已知结果,黑洞熵为外视界面积的四分之一. 当黑洞取极端情况,即 $r_+ \to r_-$ 时,黑洞的辐射温度趋于零,而我们定义的黑洞熵也趋于零,满足能斯特定理. 故由内外视界决定的黑洞熵,可为普朗克绝对熵.

由此,在 Sen 黑洞背景下,直接运用量子统计的方法,计算玻色场和费米场的配分函数,得到系统熵的积分表达式. 然后应用膜模型计算黑洞的熵. 由于本文直接采用了量子统计方法,回避了原 brick-wall 方法中求解波动方程的困难. 所得熵的表达式中,不但与黑洞外视界面积有关,而且也是内视界面积的函数,与文献[22,23]观点一致. 当我们所得结论,取 $r_- \to 0$ 时,可得出熵只与黑洞外视界面积有关的形式. 进一步研究表明,用内外视界位置参量表达的熵,当黑洞的辐射温度趋于绝对零度时,黑洞的熵也趋于零. 满足能斯特定理,更具有普遍的物理意义.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333

[2] Hawking S W 1975 *Commun*. *Math*. *Phys*. **43** 199

[3] Bardeen J M, Carter B and Hawking S W 1973 *Math*. *Phys*. **31** 161

[4] Hochberg D, Kephart T W and York J W 1993 *Phys*. *Rev*. D **48** 479

[5] Jing J L and Yan M L 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 389

[6] Lee H, Kim S W and Kim W T 1996 *Phys*. *Rev*. D **54** 6559

[7] G 't Hooft. 1985 *Nucl*. *Phys*. B **256** 727

[8] Cognola G and Lecca P 1998 *Phys*. *Rev*. D **57** 1108

[9] Cai R G, Ji J Y and Soh K S 1998 *Class*. *Quantum*. *Grav*. **15** 2783

[10] Li X and Zhao Z 2000 *Phys*. *Rev*. D **62** 104001

[11] Shen G Y and Chen D M 2000 *Gen*. *Rel*. *Grav*. **32** 2269

[12] Lee H and Kim J W 1996 *Phys*. *Rev*. D **54** 3904

[13] Mann R B, Tarasov L and Zelnikov A 1992 *Class*. *Quantum*. *Grav*. **9** 1487

[14] Zhao R, Zhang J F and Zhang L C 2001 *Nucl*. *Phys*. B **609** 247

[15] Zhao R, Zhang J F and Zhang L C 2002 *Gen*. *Rel*. *Grav*. **34** 571

[16] Zhang J Y and Zhao Z 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2399 (in Chinese) [张靖仪、赵　峥 2002 物理学报 **51** 2399]

[17] Sen A 1992 *Phys*. *Rev*. *Letters*. **63** 1006

[18] Tolman R C 1934 *Relativity*, *Thermodynamics and Cosmology* (Oxford: Oxford University Press)

[19] Zhao R and Zhang L C 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1167 (in Chinese) [赵　仁、张丽春 2002 物理学报 **51** 1167]

[20] Zhao Z 1981 *Acta Phys*. *Sin*, **30** 1508 (in Chinese) [赵　峥 1981 物理学报 **30** 1018]

[21] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys*. *Rev*. D **15** 2752

[22] Zhao Z, Zhu J Y and Liu W B 1999 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **16** 698

[23] Zhao R and Zhang L C 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 593 (in Chinese) [赵　仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 593]

The entropy of Sen black hole and the Nernst theorem*

Zhang Li-Chun Zhao Ren

(*Department of Physics*, *Yanbei Normal Institute*, *Datong* 037000, *China*)

(Received 21 February 2003; revised manuscript received 9 April 2003)

Abstract

By using the method of quantum statistics, we directly derive the partition functions of the bosonic field and fermionic field in the Sen black hole with an axial symmetry. Then via the improved brick-wall method and the membrane model, we calculate the entropies for the bosonic field and fermionic feld. We derive the entropy of the black hole which is not only related to the area of the outer horizon but also the function of the area of the inner horizon. In our results, there are no logarithmic divergent terms and left terms. There does not exist the question why the entropy of the scalar field or Dirac field outside the horizon is the entropy of the black hole. The influence of the spinning degeneracy of particles on the entropy of a black hole is studied. When the radiation temperature of the black hole approaches absolute zero, the entropy determined by the area of the inner and outer horizons also approaches zero. This satisfies the Nernst theorem. It can be taken as the Planck absolute entropy of a black hole.

Keywords: membrance model, entropy of a black hole, Nernst theorem

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 20001009).